

# MODELO BIDIMENSIONAL PARA LA EXTRACCIÓN DE AGUA POR LAS RAÍCES DE LAS PLANTAS

• Manuel Zavala •

*Universidad Autónoma de Zacatecas, México*

• Heber Saucedo •

*Instituto Mexicano de Tecnología del Agua*

• Carlos Bautista-Capetillo •

*Universidad Autónoma de Zacatecas, México*

• Carlos Fuentes •

*Universidad Autónoma de Querétaro, México*

## Resumen

Los modelos tradicionales para describir la extracción de agua por las plantas usan funciones mecanicistas o empíricas para representar el término de sumidero de la ecuación de transferencia de agua en el suelo, lo cual no permite representar explícitamente el efecto de la geometría del sistema de raíces sobre los patrones de extracción. Para eliminar esta limitante se desarrolla un modelo que simula la extracción, el cual considera las raíces como segmentos de frontera del dominio de solución e impone en éstos una condición tipo radiación para representar la resistencia al flujo del agua en la interfaz suelo-raíz, la cual es despreciada en los modelos reportados en la literatura que usan en las raíces una condición de frontera tipo Dirichlet. Se establece la condición tipo radiación, la cual contiene parámetros que representan las propiedades de las plantas, las características hidrodinámicas del suelo y la resistencia al flujo del agua en la interfaz suelo-raíz. Se obtiene una solución de elemento finito de la forma bidimensional de la ecuación de transferencia de agua sujeta en las raíces a la condición de radiación establecida; se aplica el modelo a un escenario de extracción, asumiendo valores medios característicos para las propiedades de las plantas y considerando un coeficiente de resistencia de la interfaz suelo-raíz variable. Se muestra que la resistencia en la interfaz suelo-raíz define el orden de magnitud del caudal de agua que extraen las raíces del suelo, por lo que esta variable no puede ser despreciada cuando se analiza el fenómeno de la extracción.

**Palabras clave:** condición de frontera tipo radiación, coeficiente de resistencia de la interfaz suelo-raíz, potencial de presión de las raíces, sistema planta-suelo.

## Introducción

Los primeros esfuerzos dirigidos al desarrollo de un criterio con base mecanicista para describir la extracción de agua por las plantas se deben a Gradmann (1928) y van den Honert (1948); estos investigadores analizaron el flujo de agua del suelo a las raíces mediante relaciones análogas a las que describen el flujo de corriente

eléctrica en un sistema de resistencias en serie. Sin embargo es hasta que Gardner (1960) presenta su modelo, cuando el estudio del proceso de extracción de agua del suelo por las plantas inicia su pleno desarrollo. Los modelos matemáticos que se han desarrollado para predecir la extracción abordan su estudio a dos escalas diferentes de análisis: la microscópica y la macroscópica.

Los denominados modelos microscópicos describen la extracción de agua por las plantas, representando sus raíces como tubos cilíndricos de longitud infinita que absorben agua uniformemente del suelo. Bajo este supuesto, se han obtenido soluciones analíticas para calcular la extracción, resolviendo la ecuación de transferencia de agua en suelo (Richards, 1931) en coordenadas cilíndricas y despreciando el efecto de la gravedad (Gardner, 1960). En esta escala de análisis se deduce que la extracción de agua es directamente proporcional a la diferencia de presiones entre el suelo y la raíz, e inversamente proporcional a la resistencia de la interfaz suelo-raíz. Sin embargo, al generalizar estos modelos a todo el sistema de raíces, se ha encontrado que sus resultados difieren sensiblemente de las observaciones realizadas en campo y laboratorio (Passioura y Munns, 1985). Esto se atribuye principalmente a la representación del sistema de raíces como un arreglo de tubos cilíndricos.

Los modelos macroscópicos, por su parte, consideran todo el sistema de raíces de las plantas y pueden ser clasificados en dos grupos. El primer grupo está formado por aquellos modelos que integran las propiedades de las raíces sobre un volumen elemental representativo de suelo, considerando con esta hipótesis que la raíz es una componente del suelo. En esta aproximación se representa el término de sumidero de la ecuación de transferencia o ecuación de Richards mediante funciones de extracción empíricas o mecanicistas. Las funciones empíricas relacionan la extracción con la profundidad de las raíces, el contenido de humedad del suelo y la transpiración de las plantas, tratando de reproducir los datos medidos en campo sin tomar en cuenta la física del proceso (Feddes *et al.*, 1976 y 1988; Vrugt *et al.*, 2001; Dardanelli *et al.*, 2004). Por su parte, las funciones de extracción mecanicistas presentan una estructura matemática basada en la ley de Ohm, y requieren de un conocimiento detallado de la distribución de la densidad de las raíces en el suelo, y de la estimación de las

magnitudes de resistencia al flujo del agua del suelo y de las raíces (Nimah y Hanks, 1973; Feddes *et al.*, 1974; Radcliffe *et al.*, 1986). La mayor limitante de este enfoque macroscópico es que no permite representar explícitamente el efecto de la geometría de las raíces en los patrones de extracción y en la distribución de humedad en el suelo.

El segundo grupo de modelos macroscópicos es aquel que toma en cuenta explícitamente la distribución espacial de las raíces en el suelo. El modelo representativo de este grupo es el desarrollado por Lafolie *et al.* (1991), basado en el análisis con la ecuación de Richards de cortes horizontales del sistema de raíces y en el uso de una condición de frontera tipo Dirichlet de potencial de presión, especificado en todos aquellos puntos donde se intersecta una raíz con el plano de corte. En este modelo, la mayor limitante es el uso de la condición tipo Dirichlet, que desprecia la evolución de la resistencia al flujo del agua de la interfaz suelo-raíz.

En este trabajo se aborda el estudio de la extracción, considerando el sistema de raíces como segmentos de frontera del dominio de solución de la ecuación de Richards, para lo cual se propone lo siguiente: proyectar las raíces sobre el plano vertical; establecer la forma de la condición de frontera de radiación que debe usarse en las raíces para considerar explícitamente las propiedades hidrodinámicas del suelo y las propiedades de las raíces (absorción y resistencia al flujo del agua), y desarrollar un modelo de simulación basado en la solución de elemento finito tipo Galerkin de la ecuación de Richards bidimensional para analizar la extracción de agua del suelo por las raíces de las plantas.

### Ecuaciones de base

La combinación del principio de conservación de masa y la ley de Darcy generalizada a medios porosos parcialmente saturados per-

mite obtener la ecuación que describe los procesos de transferencia de agua en el suelo. Para el caso de un suelo homogéneo, isotrópico, sin fuentes ni sumideros, esta ecuación diferencial puede escribirse como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi) \nabla (H)] \quad (1)$$

donde  $\theta$  es el contenido volumétrico de agua [ $L^3 L^{-3}$ ] y es una función del potencial de presión del agua en el suelo  $\psi$ , conocida como curva característica de humedad o curva de retención  $\theta(\psi)$ ;  $t$  es el tiempo [T];  $\nabla$  es el operador gradiente [ $L^{-1}$ ];  $K$  es la conductividad hidráulica del suelo [ $LT^{-1}$ ], que en un suelo parcialmente saturado es función del contenido volumétrico de agua  $K(\theta)$  o del potencial de presión del agua en el suelo  $K(\psi)$ ;  $H$  es el potencial hidráulico [L], que es igual a la suma del potencial de presión de agua en el suelo  $\psi$  y el potencial gravitacional, asimilado generalmente a la coordenada  $z$ , orientada positivamente hacia abajo;  $H = \psi - z$ .  $\theta(\psi)$  y  $K(\psi)$  son conocidas como las características hidrodinámicas del suelo y son funciones no lineales.

Para el análisis de la extracción con la ecuación (1) es necesario representar las propiedades hidrodinámicas del suelo, expresando el contenido volumétrico de agua como función del potencial de presión del agua en el suelo  $\theta(\psi)$  y la conductividad hidráulica como función del contenido volumétrico  $K(\theta)$ . Fuentes *et al.* (1992) recomiendan en estudios experimentales y de campo la curva de retención propuesta por van Genuchten (1980), considerando la restricción de Burdine (1953), y la curva de conductividad hidráulica propuesta por Brooks y Corey (1964), debido a que esta combinación satisface las propiedades integrales de la infiltración y a la facilidad para identificar sus parámetros.

La relación propuesta por van Genuchten (1980) es:

$$\theta(\psi) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left[ 1 + \left( \frac{\psi}{\psi_d} \right)^n \right]^{-m} \quad (2)$$

donde  $\theta_s$  es el contenido volumétrico de agua a saturación;  $\theta_r$ , el contenido volumétrico residual;  $\psi_d$  un valor característico de la presión del agua;  $m$  y  $n$ , parámetros de forma empíricos relacionados a través de la restricción de Burdine (1953):  $m = 1 - 2/n$ , con  $0 < m < 1$  y  $n > 2$ .

El modelo para la conductividad hidráulica propuesto Brooks y Corey (1964) es:

$$K(\theta) = K_s \left( \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^\eta \quad (3)$$

donde  $K_s$  es la conductividad hidráulica a saturación [ $LT^{-1}$ ] y  $\eta$  es un parámetro de forma adimensional.

### Condición de frontera en las raíces

La condición de frontera que se debe utilizar en la frontera de las raíces se deduce de la siguiente manera:

Por una parte, el flujo de agua en el suelo en la dirección normal al segmento de frontera que representa las raíces ( $q_{ns}$ ) se puede calcular utilizando la ley de Darcy:

$$q_{ns} = -K(\psi) \frac{\partial (\psi - z)}{\partial n} \quad (4)$$

donde  $n$  denota normal a la frontera.

Por otra parte, en analogía con la ley de Ohm, el flujo de agua en las raíces en la dirección normal ( $q_{nr}$ ) está dado por:

$$q_{nr} = -K_{in}(\psi_{in}) \left[ \frac{\psi_r - \psi}{\lambda_n} \right] + K_{in}(\psi_{in}) \cos \theta_z \quad (5)$$

donde  $\psi_r$  es el potencial de presión del agua en interior de la raíz;  $K_{in}(\psi_{in})$ , la conductividad de la interfaz suelo-raíz [LT<sup>-1</sup>];  $\lambda_n$ , una longitud característica de la interfaz suelo-raíz [L], y  $\cos\theta_z$  es el coseno director asociado con la coordenada vertical.

La resistencia de la interfaz suelo-raíz [T] está dada por:

$$R_{in}(\psi_{in}) = \frac{\lambda_n}{K_{in}(\psi_{in})} \quad (6)$$

Por continuidad en un punto localizado sobre la superficie de la raíz, el flujo de agua en el suelo  $q_{ns}$  es igual al flujo de agua en la raíz  $q_{nr}$ ; para cumplir esta condición se igualan las ecuaciones (4) y (5), y al considerar la expresión (6) se obtiene la condición tipo radiación (Carslaw y Jaeger, 1959) siguiente:

$$-K_{in}(\psi) \frac{\partial(\psi - z)}{\partial n} = -\frac{(\psi_r - \psi)}{R_{in}(\psi_{in})} + K_{in}(\psi_{in}) \cos\theta_z \quad (7)$$

Para aplicar la ecuación (7) es necesario disponer de relaciones funcionales para los parámetros que en ella intervienen. Considerando resultados de estudios que muestran que la resistencia en la interfaz es definida principalmente por la raíz (Taylor y Klepper, 1975; Herkelrath *et al.*, 1977), en una primera aproximación se propone que la conductividad de la interfaz suelo-raíz se calcule como el promedio geométrico de la conductividad hidráulica del suelo  $K(\psi)$  y la conductividad de la raíz, la cual es función de la presión del agua en la raíz  $K_r(\psi_r)$ :

$$K_{in}(\psi_{in}) = \sqrt{K(\psi)K_r(\psi_r)} \quad (8)$$

El comportamiento extremo de la relación (8), considerando las ecuaciones (6) y (7), permite deducir que la extracción es nula cuando la conductividad en la interfaz tiende a cero; mientras que la extracción es máxima cuando la conductividad de la interfaz alcan-

za su valor máximo. En consecuencia se tiene que la condición tipo radiación (7) describe el fenómeno de la extracción y contiene como caso particular la condición tipo Dirichlet propuesta por Lafolie *et al.* (1991), que considera despreciable la resistencia al flujo del agua en la interfaz suelo-raíz, hipótesis que físicamente no es correcta.

## Modelo numérico

Se desarrolla un modelo basado en la solución numérica de la forma bidimensional de la ecuación (1):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] - \frac{\partial K(\psi)}{\partial z} \quad (9)$$

donde  $x$  y  $z$  son las coordenadas espaciales horizontal y vertical, respectivamente [L].

La integración en el espacio de la ecuación (9) se realiza con el método del elemento finito tipo Galerkin, considerando funciones de interpolación lineales y su integración en el tiempo con un método de diferencias finitas implícito; se usa el método iterativo de Picard para linealizar el sistema de ecuaciones resultante de la discretización y un método de gradiente conjugado precondicionado para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas (Noor y Peters, 1987), el cual ha sido adaptado para utilizar un almacenamiento matricial libre de ceros. Los detalles del procedimiento de discretización están bien documentados en la literatura y pueden ser consultados, por ejemplo, en Zavala y Ojeda (1999), o en Zienkiewicz *et al.* (2005). El esquema numérico que se obtiene al incluir la condición de frontera tipo radiación (7) es el siguiente:

$$\mathbf{H}_{t+\Delta t}^{p+1/2} \psi_{t+\Delta t}^{p+1} = \mathbf{N}_{t+\Delta t}^{p+1/2} \quad (10)$$

siendo:

$$\mathbf{H}_{t+\Delta t}^{p+1/2} = \mathbf{C}_{t+\Delta t}^{p+1/2} \frac{\mathbf{M}_{t+\Delta t}^{p+1/2}}{\Delta t} + \mathbf{B}_{t+\Delta t}^{p+1/2} + \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{p+1/2} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{t+\Delta t}^{p+1/2} = & \mathbf{Q}_{t+\Delta t}^{p+1/2} + \mathbf{L}_{t+\Delta t}^{p+1/2} + \mathbf{G}_{t+\Delta t}^{p+1/2} + \frac{\mathbf{C}_{t+\Delta t}^{p+1/2} \Psi_{t+\Delta t}^{p+1/2}}{\Delta t} \\ & - \mathbf{M}_{t+\Delta t}^{p+1/2} \frac{\theta_{t+\Delta t}^{p+1/2} - \theta_t}{\Delta t} \end{aligned} \quad (12)$$

$t$  es el tiempo;  $\Delta t$ , el paso de tiempo;  $p$ , el número de iteraciones en el intervalo de tiempo;  $C = d\theta/d\psi$ , la capacidad específica (Richards, 1931);  $\mathbf{M}$ , la matriz de masa;  $\mathbf{B}$ , la matriz de rigidez;  $\mathbf{G}$ , el vector de la fuerza de gravedad;  $\mathbf{Q}$ , el vector de flujos en la frontera asociados con una condición tipo Neumann;  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{L}$ , la matriz y vector asociados con la condición de frontera tipo radiación. Los coeficientes de estas matrices y vectores son:

$$M_{ij} = \delta_{ij} \sum_e \frac{A}{3} \quad (13)$$

$$B_{ij} = \sum_e \frac{\bar{K}}{4A} (u_i u_j + v_i v_j) \quad (14)$$

$$F_j = \sum_e \frac{1}{R_{inj}} \frac{L_{fj}}{2} \quad (15)$$

$$Q_j = \sum_e q_j \frac{L_{qfj}}{2} \quad (16)$$

$$L_j = \sum_e \left[ \frac{\Psi_{rj}}{R_{inj}} + K_{in} \cos \theta \omega_j \right] \frac{L_{fj}}{2} \quad (17)$$

$$G_j = \sum_e \frac{\bar{K}}{2} v_j \quad (18)$$

donde  $e$  es el número de elementos finitos;  $\delta_{ij}$  la delta de Kronecker;  $A$ , el área del elemento finito triangular;  $\bar{K}$ , la conductividad hidráulica promedio en el elemento;  $u$  y  $v$ , factores

geométricos definidos según las funciones de base  $u_k = z_i - z_j$  y  $v_k = x_i - x_j$ , los subíndices  $i, j, k$ , que corresponden a las esquinas del elemento finito triangular, corren sobre sus tres posibles permutaciones secuenciales (Zienkiewicz *et al.*, 2005);  $R_{inj}$  el valor de la resistencia en la interfaz suelo-raíz en cada nodo sujeto a la condición tipo radiación;  $L_{fj}$  la longitud de frontera asociada con cada nodo sujeto a la condición tipo radiación;  $q_j$  un valor de flujo de agua asociado con una condición tipo Neumann;  $L_{qfj}$  la longitud de frontera asociada con cada nodo sujeto a una condición tipo Neumann;  $\Psi_{rj}$  el valor de la presión en la raíz en cada nodo sujeto a la condición tipo radiación.

El caudal de agua por unidad de longitud que se transfiere a través de los nodos localizados en las fronteras sujetas a la condición tipo radiación ( $\mathbf{Q}_R$ ) se calcula de la siguiente forma:

$$\mathbf{Q}_{Rt+\Delta t}^{p+1} = \left[ - \frac{(\Psi_r - \Psi_{t+\Delta t}^{p+1/2})}{R_{int+\Delta t}^{p+1/2}} + K_{int+\Delta t}^{p+1/2} \cos \theta_z \right] \mathbf{L}_f \quad (19)$$

El esquema numérico (10-19) se codificó en lenguaje de programación C++ y permite realizar modelación de escenarios de extracción con diferentes condiciones iniciales y de frontera.

## Aplicación y resultados

Tomando en cuenta que la distribución bidimensional del sistema de raíces de las plantas puede ser caracterizada, por ejemplo, mediante modelos de ruptura dieléctrica (Chikushi e Hirota, 1998) o patrones fractales (Tatsumi *et al.*, 1989), es posible generar con estos métodos dominios de solución para alimentar el modelo de extracción desarrollado. En este trabajo se modela la extracción considerando una proyección del sistema de raíces de una planta de mijo (*Panicum miliaceum*) sobre el plano vertical ( $x-z$ ) reportada por Tatsumi *et al.* (1989); para facilitar la visualización de resultados, a la imagen original se le aplicó un factor de escala de 10:1 (figura 1).

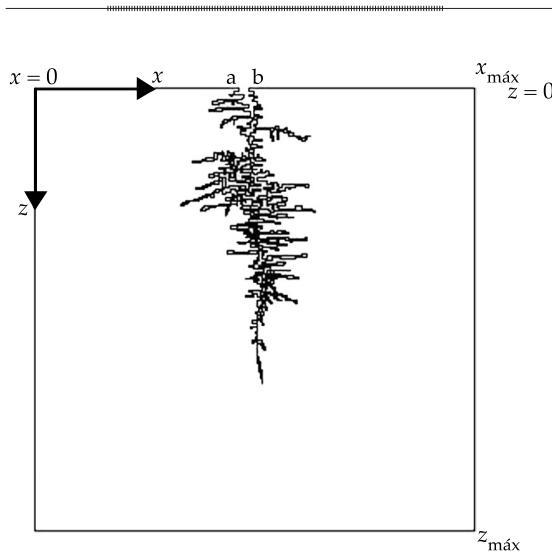


Figura 1. Proyección de las raíces de una planta de maíz (Tatsumi *et al.*, 1989).

La condición inicial que se considera en la modelación numérica corresponde a una distribución de humedad uniforme cercana a la saturación, que puede representar, por ejemplo, la condición de humedad que se alcanza instantes posteriores a la aplicación de un riego:

$$\psi(x, z) = \psi_{ini} \quad t = 0 \quad (20)$$

donde  $\psi_{ini} = -0.10$  cm.

Las condiciones de frontera consideradas en los segmentos del dominio distintos de aquellos que representan el sistema de raíces son (ver figura 1): 1) en la superficie del suelo se impone una condición de frontera tipo Neumann de flujo variable para representar la evaporación superficial; 2) en la fronteras laterales se impone una condición de flujo nulo; 3) en la frontera inferior se usa una condición de gradiente unitario. Este conjunto de condiciones de frontera se pueden escribir como:

$$-K(\psi) \frac{\partial(\psi - z)}{\partial z} = -E_{\max} \left| \sin\left(\frac{t}{24}\right) \right| \quad 0 \leq x < a \quad y \\ b < x \leq x_{\max}; \quad z = 0 \quad (21a)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial(\psi - z)}{\partial z} = -1 \quad 0 \leq x \leq x_{\max}; \quad z = z_{\max} \quad (21b)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial(\psi)}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \quad y \quad x = x_{\max}; \\ 0 \leq z \leq z_{\max} \quad (21c)$$

donde  $E_{\max} = 0.2$  cm/d;  $x_{\max} = 200$  cm y  $z_{\max} = 200$  cm. A lo largo de la frontera  $\overline{ab}$  se impone la condición tipo radiación (7).

El dominio mostrado en la figura 1 se discretizó generando una malla de elementos finitos con el programa *ARGUS ONE 4.0p*, respetando la condición de uniformidad (Zienkiewicz *et al.*, 2005) y concentrando los nudos cerca de la raíz y la superficie, que es donde se generan los mayores gradientes de presión (figura 2). La malla consta de 25773 nudos y 45395 elementos, con espaciamientos mínimos:  $\Delta x_{\min} = 1.38 \times 10^{-1}$  cm y  $\Delta z_{\min} = 1.38 \times 10^{-1}$  cm.

Se utiliza el suelo franco de Fuentes *et al.* (1992), cuyos parámetros hidráulicos son los siguientes:  $\theta_s = 0.45$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup>,  $\theta_r = 0.10$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup>,  $\psi_d = -100$  cm,  $m = 0.5$ ,  $\eta = 12$  y una conductividad hidráulica a saturación  $K_s = 6 \times 10^4$  cm/s. El potencial de presión en la raíz y la conductividad hidráulica se asumieron constantes, utilizándose los siguientes valores característicos  $\psi_r = -1.0 \times 10^4$  cm y  $K_r = 1 \times 10^{-8}$  cm/s (Taylor y Klepper, 1975; Radcliffe *et al.* 1986), y una longitud característica de  $\lambda_n = 1 \times 10^{-1}$  cm.

El paso de tiempo inicial para la simulación fue de  $\Delta t_{ini} = 0.1$  s, y éste se incrementó 10% si el número de iteraciones "p" realizadas en el paso de tiempo era menor de 3, hasta alcanzar el valor máximo de  $\Delta t_{\max} = 300$  s; mientras que el criterio de convergencia adoptado fue  $\epsilon = \max \left| \left( \psi_{it+\Delta t}^{p+1} - \psi_{it+\Delta t}^{p+1/2} / \psi_{it+\Delta t}^{p+1} \right) \right| \leq 1 \times 10^{-3}$  cm.

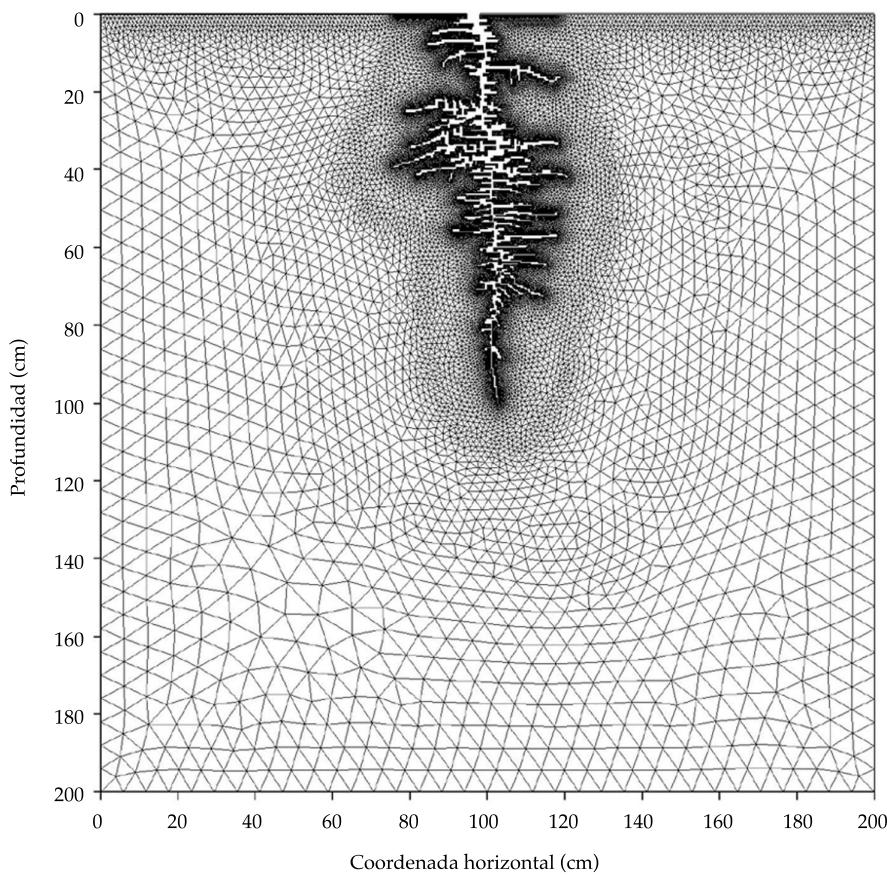


Figura 2. Malla de elementos finitos.

En las figuras 3 y 4 se presentan las líneas equipotenciales a los 7 y 21 días obtenidas con el modelo numérico; se puede observar que la humedad disminuye rápidamente en las zonas de suelo que presentan mayor densidad de raíces, lo cual muestra la importancia de representar explícitamente la arquitectura del sistema de raíces en el estudio de la extracción. En la figura 5 se presenta la variación en el tiempo del gasto extraído por la raíz, teniéndose que la extracción disminuye sensiblemente durante los primeros tres días de simulación y posteriormente presenta una disminución gradual; este comportamiento se debe a la evolución de la resistencia en la interfaz suelo-raíz. Al inicio de la simulación, la resistencia en

la interfaz suelo-raíz alcanza su valor mínimo ( $R_{in} = 4.1 \times 10^4$  s) y la extracción alcanza valores máximos conforme el contenido de humedad del suelo que circundan a la raíz decrece, la resistencia en la interfaz suelo-raíz se incrementa y el gasto extraído disminuye, evidenciando que la resistencia en la interfaz suelo-raíz define la magnitud de caudal de agua extraído por las plantas, tal y como han mostrado numerosas investigaciones experimentales (Passioura y Munns, 1985).

La condición de frontera tipo radiación (7), además de incluir la resistencia al flujo del agua en la interfaz suelo raíz, considera también el potencial de presión del agua en el interior de las raíces, el cual determina la apertura de los

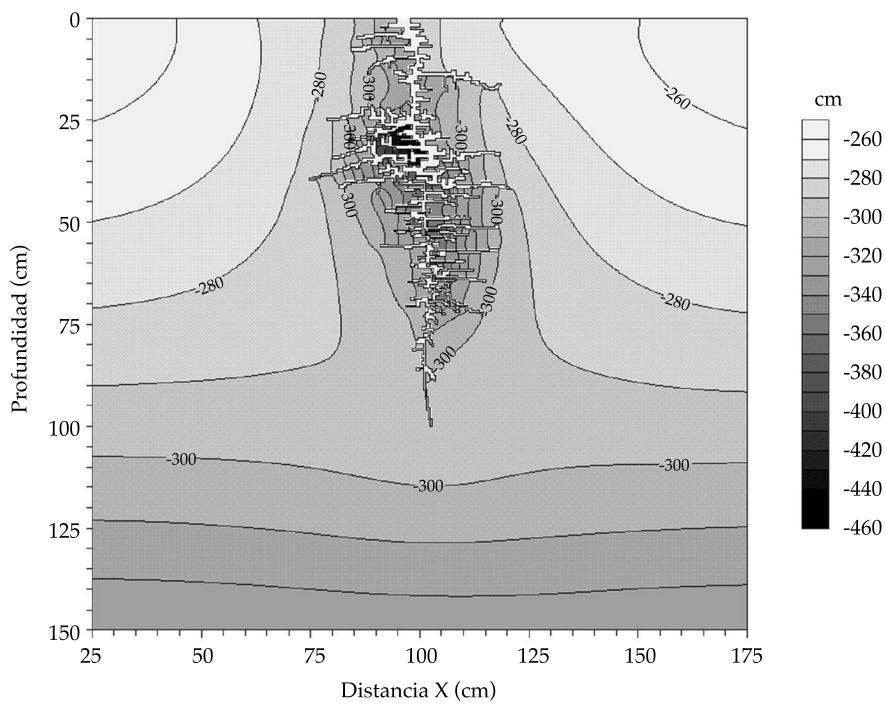


Figura 3. Equipotenciales a los siete días (cm).

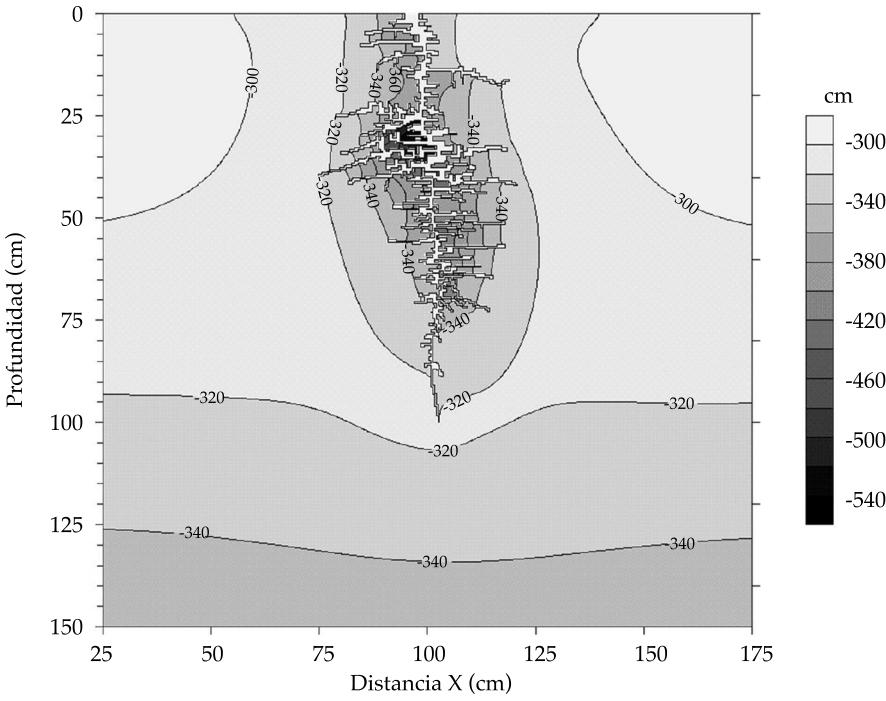


Figura 4. Equipotenciales a los 21 días (cm).

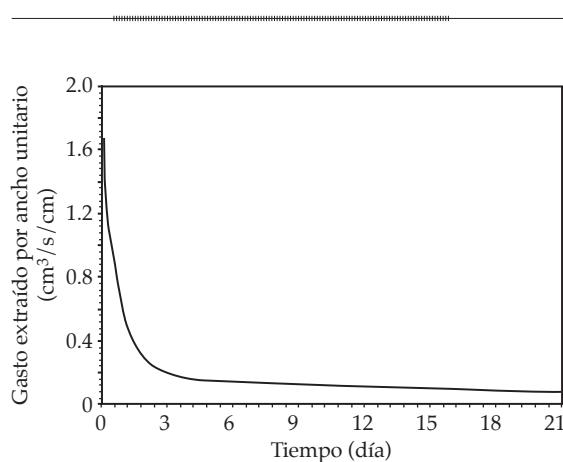


Figura 5. Variación en el tiempo del gasto de agua extraído por ancho unitario de raíz, calculado con la ecuación (19).

estomas, y por lo tanto la transpiración, por medio de mensajes químicos. En consecuencia, una buena descripción y caracterización de los parámetros de la condición de radiación (presión y conductividad de las raíces) permite un análisis más detallado de la extracción respecto del que puede obtener con los modelos reportados en la literatura que manejan condiciones de frontera tipo Dirichlet o tipo Neumann.

## Conclusiones

Se ha propuesto una aproximación mecanicista para describir el fenómeno de la extracción de agua del suelo por las plantas, que está basada en el análisis con la ecuación de Richards de proyecciones del sistema de raíces sobre el plano vertical.

Se ha establecido la condición de frontera tipo radiación que debe sujetar la ecuación de Richards en la frontera de las raíces de las plantas para describir la extracción de agua del suelo; esta condición de frontera incluye parámetros hidráulicos del suelo, propiedades de la planta y un coeficiente de resistencia al flujo del agua de la interfaz suelo-raíz que es variable, lo cual permite describir el comportamiento de la extracción bajo

diferentes condiciones de humedad en el suelo y necesidades hídricas de la planta. El análisis del comportamiento extremo de la condición de radiación establecida ha permitido mostrar que contiene la condición de frontera tipo Dirichlet propuesta por Lafolie *et al.* (1991).

Se ha desarrollado un modelo basado en la solución numérica de la ecuación de Richards bidimensional y se ha simulado un escenario de extracción, cuyas condiciones asimilan, por ejemplo, las condiciones generadas después de la aplicación del riego. El escenario de extracción analizado muestra que la conductividad de la interfaz suelo-raíz define el orden de magnitud del caudal o gasto de agua que extraen las raíces de las plantas y evidencia la importancia de caracterizar este parámetro. El modelo desarrollado es una herramienta útil para simular escenarios de extracción en diferentes tipos de suelo y cultivos.

Recibido: 02/03/10

Aceptado: 05/09/11

## Referencias

- BROOKS, R.H. and COREY, A.T. Hydraulic properties of porous media. *Hydrol. Pap.* 3. Fort Collins: Colorado State University, 1964.
- BURDINE, N.T. Relative permeability calculation from size distribution data. *Pet. Trans. AIME.* Vol. 198, 1953, pp. 71-78.
- CARSLAW, H.S. and JAEGER, J.C. *Conduction of heat in solids.* Second ed. Oxford: Oxford University Press, 1959, 507 pp.
- CHIKUSHI, J. and HIROTA, O. Simulation of root development based on the dielectric breakdown model. *Hydrological Sciences—Journal—des Sciences Hydrologiques.* Vol. 43, No. 4, Special issue: Monitoring and Modeling of Soil Moisture: Integration over Time and Space, 1998, pp. 549-559.
- DARDANELLI, J.L., RITCHIE, J.T., CALMON, M., ANDRIANI, J.M., and COLLINO, D.J. An empirical model for root water uptake. *Field Crops Research.* Vol. 87, No. 1, 2004, pp. 59-71.
- FEDDES, R.A., BRESLER, E., and NEUMAN, S.P. Field test of a modified numerical model of water uptake by root systems. *Water Resources Research.* Vol. 10, 1974, pp. 1199-1206.

- FEDDES, R.A., KOWALIK, P.J., KOLINKA-MALINKA, K., and ZARADNY, H. Simulation of field water uptake by plants using a soil water dependent root extraction function. *J. Hydrol.* Vol. 31, 1976, pp. 13-26.
- FEDDES, R.A., KABAT, P., VAN BAKEL, P.J.T., BRONSWIKS, J.J.B., and HALBERTSMA, J. Modelling soil water dynamics in the unsaturated-zone-State of the art. *J. Hydrol.* Vol. 100, 1988, pp. 69-111.
- FUENTES, C., HAVERKAMP, R., and PARLANGE, J.-Y. Parameter constraints on closed-form soil-water relationships. *J. Hydrol.* Vol. 134, 1992, pp. 117-142.
- GARDNER, W.R. Dynamic aspects of a water availability to plants. *Soil Sci.* Vol. 89, 1960, pp. 63-73.
- GRADMANN, H. Untersuchungen über die Wasserverhältnisse des Bodens als Grundlage des Pflanzen Wachstums. *Lehrb. Wiss. Biol.* Vol. 69, 1928, pp. 1-100.
- HERKELRATH, W.N., MILLER, E.E., and GARDNER, W.R. Water Uptake by Plants II: The Root Contact Model. *Soil Sci. Soc. Am. J.* Vol. 41, 1977, pp. 1039-1043.
- LAFOLIE, F., BRUCKLER, L., and TARDIEU, F. Modeling root water potential and soil water transport: I model presentation. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, Vol. 55, 1991, pp. 1203-1212.
- NIMAH, M.N. and HANKS, R.J. Model for estimating soil water, plant and atmospheric interrelations, I. Description and sensitivity. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.* Vol. 37, 1973, pp. 522-527.
- NOOR, A. and PETERS, J.M. Preconditioned conjugate gradient technique for the analysis of symmetric structures. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol. 24, 1987, pp. 2057-2070.
- PASSIOURA, J.B. and MUNNS, R. Hydraulic resistance of plants. Effects of rooting medium and time of day in barley and lupin. *Aust. J. Plant. Physiol.* Vol. 11, 1985, pp. 341-350.
- RADCLIFFE, D.E., PHILLIPS, R.E., EGLI, D.B., and MECKEL, L. Experimental Test of a Model of Water Uptake by Soybean. *Agronomy Journal.* Vol. 78, 1986, pp. 526-530.
- RICHARDS, L.A. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics.* Vol. 1, 1931, pp. 318-333.
- TATSUMI, J., YAMAUCHI, A., and KONO, K. Fractal analysis of plant root systems. *Ann. Bot.* Vol. 64, 1989, pp. 499-503.
- TAYLOR, H.M. and KLEPPER, B. Water uptake by cotton root systems: an examination of assumptions in the single root model. *Soil Sci.* Vol. 120, No. 1, 1975, pp. 57-67.
- VAN GENUCHTEN, M.Th. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of the unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Amer. J.* Vol. 44, 1980, pp. 892-898.
- VAN DEN HONERT, T.H. Water transport in plants as a catenary process. *Discuss. Faraday Chem. Soc.* Vol. 3, 1948, pp. 146-153.
- VRUGT, J.A., VAN WIJK, M.T., HOPMANS, J.W., and SIMUNEK, J. One-, two-, and three-dimensional root water uptake functions for transient modeling. *Water Resources Research.* Vol. 37, No. 10, 2001, pp. 2457-2470.
- ZAVALA, M. y OJEDA, W. Un modelo para simular la transferencia de agua en sistemas de riego por goteo. *Ingeniería Hidráulica en México.* Vol. XIV, núm. 3, julio-septiembre de 1999, pp. 55-63.
- ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L. and ZHU, J.Z. *The Finite Element Method. Its Basis and Fundamental.* Sixth ed. Amsterdam: Elsevier, 2005, 733 pp.

## Abstract

ZAVALA, M., SAUCEDO, H., BAUTISTA-CAPETILLO, C., & FUENTES, C. *Two-dimensional model for water uptake by root systems*. Water Technology and Sciences (in Spanish). Vol. III, No. 1, January-March, 2012, pp. 33-43.

*Classical models to describe water uptake by roots use mechanistic or empirical functions to represent the sink term in the water transfer equation, which does not allow for analyzing the effect of the root system geometry on extraction patterns. A model to simulate water uptake was developed in order to eliminate this limitation. This model considers the roots to be one boundary of the domain and uses a radiation condition which allows for representing the water flow resistance at the soil-root interface. This resistance is neglected by the models reported in the literature because they use a Dirichlet boundary condition for the roots (specified pressure). The radiation condition is established, which contains parameters that represent the properties of the plants and hydraulic soil as well as the resistance to water flow at the soil-root interface. A finite element solution is obtained for the two-dimensional form of the water transfer equation subject to the radiation condition at the roots. This model is applied to the analysis of a water uptake case, with typical values for the plants' properties and considering the variability of the resistance of the soil-root interface. Since the resistance at the soil-root interface is shown to define the magnitude of the water uptake by roots, this variable cannot be neglected when analyzing the water uptake phenomenon.*

**Keywords:** radiation boundary condition, soil-root resistance coefficient, root water potential, soil-plant system.

## Dirección institucional de los autores

Dr. Manuel Zavala

Dr. Carlos Bautista Capetillo

Universidad Autónoma de Zacatecas  
Jardín Juárez 147, Centro Histórico  
98000 Zacatecas, Zacatecas, MÉXICO  
Teléfono: +52 (492) 1354 512  
mzavala73@yahoo.com.mx  
baucap@uaz.edu.mx

Dr. Heber Saucedo

Subcoordinador de Contaminación y Drenaje Agrícola  
Coordinación de Riego y Drenaje  
Instituto Mexicano de Tecnología del Agua  
Paseo Cuauhnáhuac 8532, Colonia Progreso  
62550 Jiutepec, Morelos, MÉXICO  
Teléfonos: + 52 (777) 3293 659 y 3293 600, extensión 443  
Fax: + 52 (777) 3293 659  
hsaucedo@tlaloc.imta.mx

Dr. Carlos Fuentes

Laboratorio de Hidráulica  
Facultad de Ingeniería  
Universidad Autónoma de Querétaro  
Centro Universitario, Colonia Las Campanas  
76010 Querétaro, Querétaro, MÉXICO  
Teléfono y fax: +52 (442) 1921 200, extensión 6036.  
cbfuentesr@gmail.com