

Modos guiados en un sistema de multicapas dieléctricas de Thue-Morse

A. Aguirre-Méndez*

Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
14 Sur y San Claudio, Ciudad Universitaria, C.P. 72570, Cd. Puebla, México

X. I. Saldaña-Saldaña

Instituto de Física de la Universidad Autónoma de Puebla, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
14 Sur y San Claudio, Ciudad Universitaria, C.P. 72570, Cd. Puebla, México

M. P. Sampedro

Instituto de Física de la Universidad Autónoma de Puebla, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
14 Sur y San Claudio, Ciudad Universitaria, C.P. 72570, Cd. Puebla, México.

(Recibido: 8 de julio de 2010; Aceptado: 24 de noviembre de 2010)

En este trabajo se presenta el cálculo de los modos electromagnéticos guiados en un sistema de multicapas dieléctricas aperiódico del tipo Thue-Morse. En este caso los dieléctricos se consideran sin absorción ni disipación de luz. Para analizar los modos guiados en este tipo de superred se resuelve la ecuación de onda de Maxwell y se aplica el método de la matriz de transferencia y la aproximación racional. Se calcula el diagrama de bandas de los modos guiados variando el índice de refracción y el grosor de las capas, así mismo se indica bajo qué condiciones tenemos modos guiados en esta superred. Se observó que las bandas permitidas de los modos guiados del sistema aperiódico de Thue-Morse se van fraccionando presentando el fenómeno de autosimilaridad.

Palabras clave: Multicapas dieléctricas; Modos guiados; Sistema aperiódico Thue-Morse

The numerical analysis of the electromagnetic guided waves in a non-periodic Thue-Morse layer media is presented. We do not consider absorption or dissipation of light in the dielectric layers. To analyze the guided waves, the solution of the wave Maxwell's equation in each layer is found, thus the matrix method and the rational approximation are used. The band structures of the guided modes are computed varying the refractive index and the thickness of the layers for different generation of the Thue-Morse sequence and the conditions for the existence of the guided modes in these systems are explained. The band diagrams of the guided modes are split according with the aperiodic system Thue-Morse showing autosimilarity.

Keywords: Dielectric multilayer; Guided modes; Aperiodic system Thue-Morse

1. Introducción

Un cristal es un arreglo periódico de átomos o moléculas. El patrón con el cual los átomos o moléculas son repetidos en el espacio es la red del cristal. El cristal presenta un potencial periódico para un electrón propagándose a través de él, los constituyentes del cristal y la geometría de la red, rigen las propiedades de conducción del cristal. Sin embargo, la red puede incluso prohibir la propagación de algunas ondas. Podría haber *gaps* en la estructura de bandas del cristal, esto significa que los electrones con cierta energía no se pueden propagar en algunas direcciones. Si el potencial de la red es lo suficientemente fuerte, el *gap* puede extenderse para cubrir todas las posibles direcciones de propagación resultando una banda prohibida completa (complete band gap). Por ejemplo, un

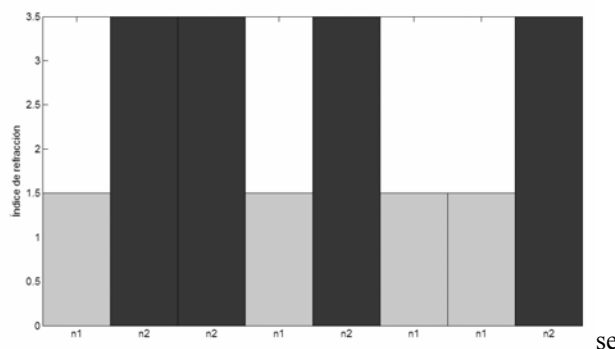


Figura 1. Perfil de índice de refracción para la generación tres de la secuencia aperiódica de Thue-Morse.

miconductor tiene una banda prohibida completa entre la banda de energía de valencia y la banda de energía de conducción.

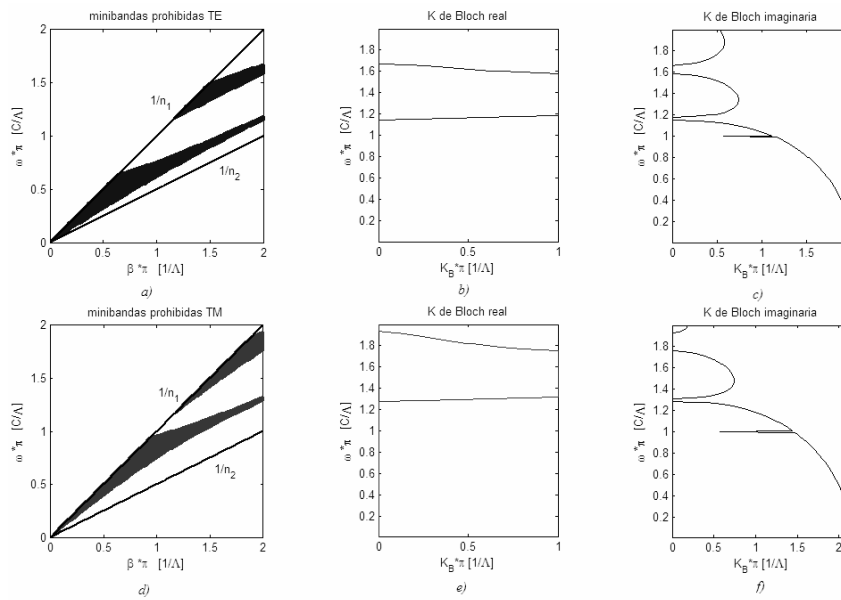


Figura 2. a) Modos guiados en un sistema con una celda unitaria de dos placas ($n_1=1$, $n_2=2$, $L_1=L_2=0.5$, $\Lambda=1$) para polarización S y d) para polarización P. b) K_B real para la polarización S con $B=2$ y c) la parte imaginaria. e) K_B real para la polarización P con $B=2$ y f) la parte imaginaria.

La analogía óptica a los cristales son los llamados cristales fotónicos, en los cuales los átomos o moléculas son reemplazados por un medio macroscópico con diferentes constantes dieléctricas y el potencial periódico es reemplazado por una función dieléctrica periódica equivalente a un índice periódico de refracción. Si las constantes dieléctricas de los materiales en un cristal fotónico son suficientemente distintas, y si la absorción de la luz es mínima o nula, entonces las reflexiones y transmisiones de la luz de todas las interfaces pueden producir muchos fenómenos para *fotones* parecidos a los que el potencial atómico produce para los electrones [1] A partir de los trabajos de E. Yablonovitch [2] y S. John [3] se empieza a considerar el estudio de estos materiales conocidos como cristales fotónicos. En este caso se observa que variando las propiedades ópticas de estos sistemas se puede guiar la radiación electromagnética y diseñar nuevos dispositivos ópticos [4]. En particular, los cristales fotónicos unidimensionales pueden utilizarse como: filtros, espejos y en aplicaciones para óptica no lineal, que en principio pueden funcionar en un amplio rango de energía, entre otros. Muchos de estos dispositivos están hechos con multicapas periódicas. El objetivo de este estudio es calcular el diagrama de bandas en la región de los modos guiados y mostrar gráficamente la autosimilaridad de cristales fotónicos unidimensionales infinitos con una celda unitaria aperiódica ordenada de acuerdo con la secuencia recursiva Thue-Morse. La ventaja de tener una celda unitaria no periódica es que el diagrama de bandas presenta *minigaps* a diferencia de tener una periódica, esto nos puede servir para tener *gaps* con rangos más selectivos de frecuencias. Los sistemas aperiódicos también presentan la propiedad de autosimilaridad que se refleja en todas sus propiedades ópticas. Para el estudio de estos sistemas se

resuelve la ecuación de onda de Maxwell para cada capa, y se aplica el método de la matriz de transferencia. El teorema de Bloch es utilizado con celdas unitarias periódicas, entonces para poder aplicarlo a las celdas unitarias de Thue-Morse será necesario emplear la aproximación racional que consiste en considerar a la *celda unitaria* como un número de placas ordenadas de acuerdo a las generaciones de la secuencia aperiódica que se desee. Entre mayor sea el número de capas que contenga la celda unitaria, mayor será la aproximación al sistema infinito.

2. Modelo

Los sistemas periódicos se forman mediante la repetición infinita de una celda unitaria que contiene un número arbitrario de capas. Para este trabajo, gracias a la aproximación racional, se puede formar la celda unitaria siguiendo una relación de recurrencia de Thue-Morse [5] que se representa matemáticamente de la siguiente manera:

$S_j = S_{j-1} \& \hat{S}_{j-1}$ esto es, se van construyendo generaciones sucesivas de la secuencia aperiódica, de manera que cuando j es infinito se tiene el sistema completo de multicapas aperiódico. Aquí $\&$ significa la unión del conjunto S_{j-1} y \hat{S}_{j-1} . En este caso si el valor inicial es $S_0=A$ entonces \hat{S}_0 significa cambiar A por B. Así $S_1=S_0\&\hat{S}_0=\{A\}\&\{B\}=\{AB\}$; $S_2=S_1\&\hat{S}_1=\{AB\}\&\{BA\}=\{ABBA\}$; $S_3=S_2\&\hat{S}_2=\{ABBA\}\&\{BAAB\}=\{ABBABAAB\}$; y así sucesivamente. Aquí A y B representan capas dieléctricas homogéneas, isotrópicas y no magnéticas caracterizadas por un índice de refracción positivo constante, así que no presentan absorción ni disipación de luz, estas restricciones se toman para observar mejor la propiedad de

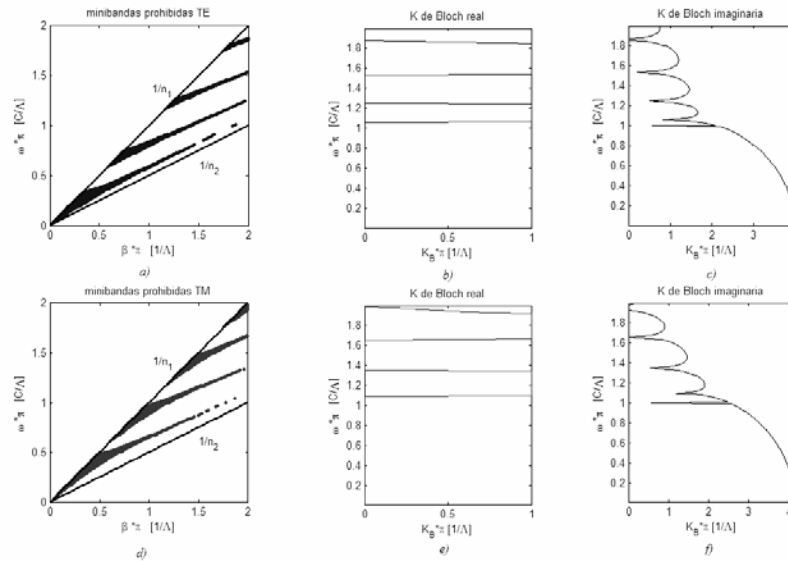


Figura 4. a) Modos guiados para la segunda generación de Thue-Morse ($n1=1, n2=2, L1=L2=0.5, A=2$) para polarización s y d) para polarización p . b) K_B real para la polarización s con $B=2$ y c) la parte imaginaria. e) K_B real para la polarización p con $B=2$ y f) la parte imaginaria.

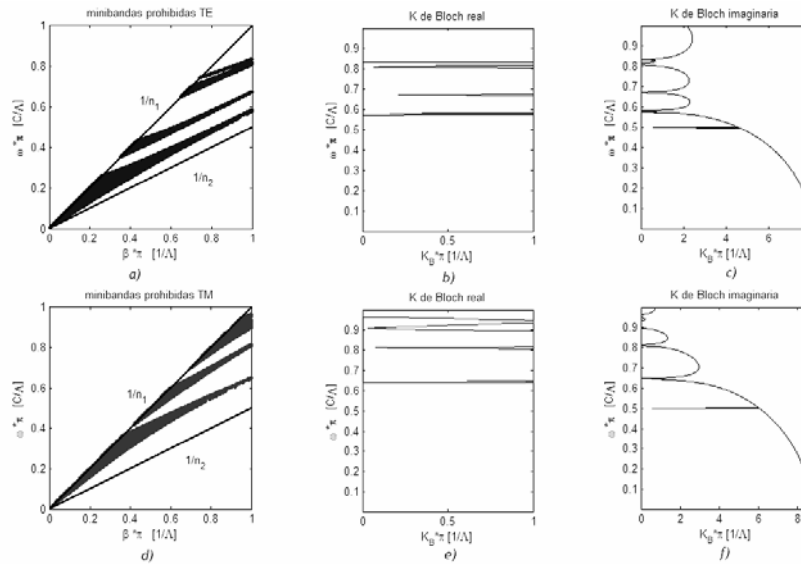


Figura 4. a) Modos guiados para la cuarta generación de Thue-Morse ($n1=1, n2=2, L1=L2=0.5, A=8$) para polarización s y d) para polarización p . b) K_B real para la polarización s con $B=2$ y c) la parte imaginaria. e) K_B real para la polarización p con $B=1$ y f) la parte imaginaria.

multifractalidad, porque si tenemos absorción y disipación esta propiedad desaparece. En la figura 1 se presenta el perfil de índices de refracción de la celda unitaria de Thue-Morse correspondiente a la generación $j=3$.

3. Teoría

Dos de los resultados más importantes de las ecuaciones de Maxwell son: la ecuación de onda y la existencia de ondas electromagnéticas, siendo éstas las soluciones a la ecuación de onda, que en general tienen carácter vectorial. En nuestro caso la geometría del problema nos permite hacer un análisis unidimensional de la solución de la ecuación de

onda en el que la solución es una onda plana monocromática de la forma

$$\Psi = Ae^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \tag{1}$$

donde A representa la amplitud del campo eléctrico o del magnético que se encuentran relacionados a través de las ecuaciones de Maxwell.

Uno de los problemas más importantes es la determinación de la propagación electromagnética a través de medios laminados por lo que aprovechamos que en medios dieléctricos, las componentes tangenciales a las interfaces de los vectores del campo eléctrico y del campo magnético

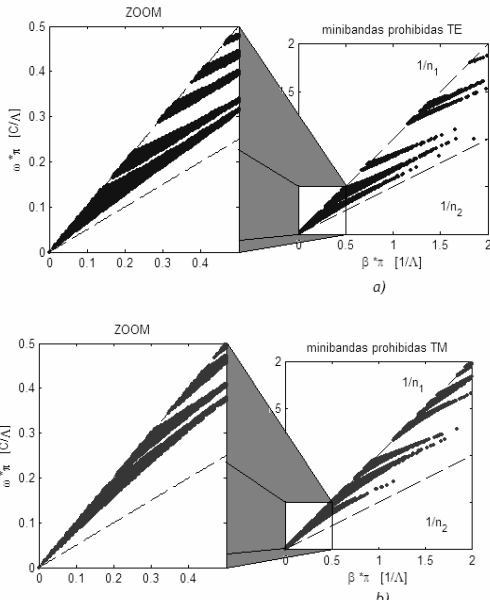


Figura 5. Modos guiados para la generación 5 de Thue-Morse ($n_1=1$, $n_2=2$, $L_1=L_2=0.5$, $A=16$). a) para la polarización s y b) para la polarización p

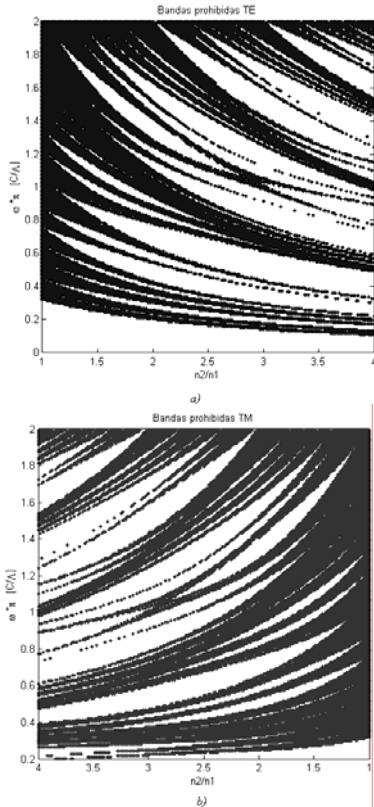


Figura 6. a) Diagrama de bandas con respecto al contraste de índices de refracción de la generación 5 de Thue-Morse con $L_1=L_2$ y $B=1$ para la polarización s y b) para la polarización p

se conservan, estableciendo el método de la matriz de transferencia que nos permite analizar la forma en que cambian las amplitudes del campo eléctrico y magnético al propagarse en la estructura.

La matriz de transferencia para cada placa es [6]:

$$Q_l = D_l P_l D_l^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \phi_l & \frac{i}{\alpha_l} \text{sen} \phi_l \\ i \alpha_l \text{sen} \phi_l & \cos \phi_l \end{pmatrix} \quad (2)$$

donde D_l es la matriz dinámica para las interfaces y P_l es la matriz de propagación dentro del medio l . Y

$$\phi_l = \frac{\omega}{c} n_l \cos \theta_l d_l = \sqrt{\left(n_l \frac{\omega}{c} \right)^2 - \beta^2} d_l = k_{lx} d_l \quad (3)$$

para la polarización S tenemos:

$$\alpha_l = n_l \cos \theta_l = \frac{c}{\omega} \sqrt{\left(\frac{n_l \omega}{c} \right)^2 - \beta^2} \quad (4)$$

y para la polarización P

$$\alpha_l = \frac{n_l}{\cos \theta_l} = \frac{n_l^2 \frac{\omega}{c}}{\sqrt{\left(\frac{n_l \omega}{c} \right)^2 - \beta^2}} \quad (5)$$

Si tenemos una celda unitaria periódica con sólo dos placas ($S_l=AB$), tenemos que la matriz de transferencia para la celda unitaria es $Q_T=Q_A Q_B$, por lo tanto, podemos utilizar el teorema de Bloch que nos conduce a la relación de dispersión

$$\cos K_B \Lambda = \frac{1}{2} \text{Tr}[Q_T] \quad (6)$$

Si el módulo de un medio de la traza es menor que uno tendremos que el vector de onda de Bloch K_B es real y los modos se propagan a través de la estructura; en caso contrario K_B es un número imaginario puro y obtenemos ondas evanescentes, que corresponden a las bandas prohibidas, los límites de las bandas se dan cuando el módulo de un medio de la traza es igual a uno.

$$\frac{n_1 \omega}{c} < \beta < \frac{n_2 \omega}{c} \quad (7)$$

Cuando se cumple la desigualdad (7) entonces el sistema tiene la capacidad para presentar modos guiados esta condición es fundamental, esto es posible porque $n_2 > n_1$. Los modos guiados existen en las placas con índice de refracción mayor (n_2) y en las placas con índice de refracción menor (n_1) hay ondas evanescentes que pueden interferir constructivamente si los anchos de las placas son pequeños. Este criterio de modos guiados es válido para un sistema de multicapas arbitrario que contenga únicamente dos tipos de placas A y B.

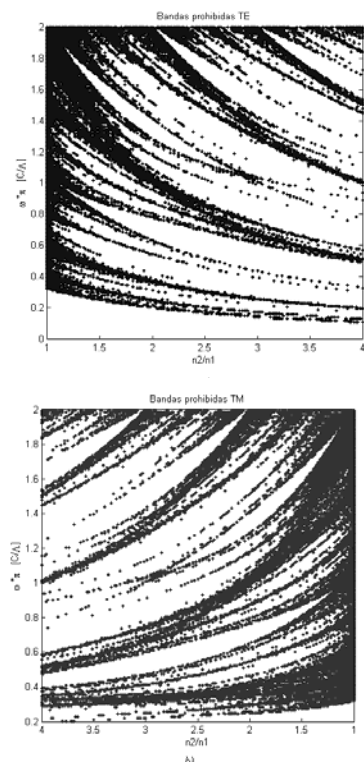


Figura 7. a) Diagrama de bandas para la generación 10 de la secuencia de Thue-Morse con $L_1=L_2$ y $B=1$ para la polarización s y b) para polarización p .

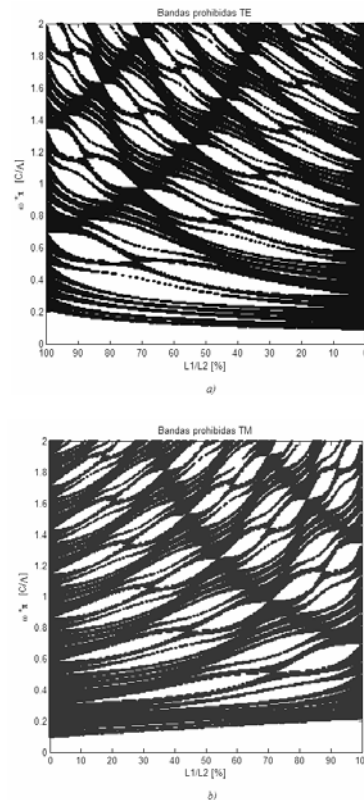


Figura 8. a) Diagrama de bandas con respecto al contraste de grosores de las placas del sistema de multicapas, para la generación 5 de Thue-Morse con $n_1=1.5$, $n_2=3.5$ y $B=1$ para la polarización s y b) para la polarización p .

$$Q_T = \prod_{i=1}^{\infty} Q_i \quad (8)$$

siendo i el número total de placas y cada Q_i corresponde a cada placa que contenga el sistema.

4. Resultados

Para obtener las gráficas siguientes, se utilizó una normalización para manejar cantidades adimensionales, y así hacer más general el análisis, es decir, una gráfica sirve para distintas regiones de energía como: el visible, el infrarrojo, el ultravioleta, etc. La normalización es la siguiente: $W = \frac{\omega\Lambda}{c}$, $B = \beta\Lambda$ y $K'_B = K_B\Lambda$ y $L_i = \frac{d_i}{\Lambda}$, donde Λ es

la suma de todos los grosores de las capas, contenidas en la celda unitaria.

Utilizando (6) obtenemos los modos guiados para el sistema periódico que se presenta en la figura 2. El índice de refracción para la lámina uno es $n_1=1$ con un grosor $L_1=0.5$ y para la lámina dos $n_2=2$ y $L_2=0.5$. En las figuras 2a) y 2d) se muestran el diagrama de bandas para la polarización s (TE) y para la polarización p (TM), respectivamente. Como se podrá observar, las bandas están limitadas por un cono formado por dos líneas rectas: la línea con la pendiente mayor corresponde a la relación

$$\omega = \frac{c}{n_1} \beta$$

$$\omega = \frac{c}{n_2} \beta$$

siendo $n_2 > n_1$. En esta región β cumple con la

desigualdad (7), que es la región donde obtenemos los modos guiados. En las figuras 2b) y 2c) se muestra la parte real e imaginaria del vector de onda de Bloch cuando $B=2$ para la polarización s y en las figuras 2e) y 2f) para la polarización p . En las regiones de energía donde el vector de onda de Bloch es real, las ondas electromagnéticas se propagan a través del medio. En las regiones de energía donde el vector de onda de Bloch es puramente imaginario no existe propagación de la radiación.

En la figura 3 se presentan resultados para la segunda generación de Thue-Morse ($S_2=ABBA$), esto es, la celda unitaria en este caso contiene $N=2^2=4$ capas ordenadas de acuerdo con la secuencia propuesta. De aquí en adelante Q_A corresponderá para una lámina A dieléctrica, con un grosor $L_1=0.5$, homogénea e isotrópica, sin propiedades magnéticas para un índice de refracción $n_1=1$ y Q_B será para otra lámina con las mismas propiedades pero con un índice de refracción $n_2=2$.

De esta manera para la generación dos $Q_T=Q_AQ_BQ_BQ_A$, como se puede ver la matriz de transferencia total es el producto de multiplicar las matrices Q^s de acuerdo al orden en que aparecen las placas en la celda unitaria. La celda unitaria de la generación dos se podría ver como una de la generación uno, pero con placas del doble de ancho.

Como se vio antes, la secuencia de Thue-Morse es matemáticamente autosimilar, ya que una generación contiene a las otras menores. Esto lo podemos ver en la figura 4 donde se muestra una sección de los modos

guiados del diagrama de bandas para la cuarta generación y si lo comparamos con una sección del de la quinta generación podremos ver gráficamente el fenómeno de autosimilaridad que no se puede observar en sistemas periódicos. La autosimilaridad que presenta este arreglo de Thue-Morse, no es tan estricta, pero puede ser medida (véase referencia 5 de este extenso).

Cambios en el número de generación pueden modificar el diagrama de bandas, pero no es el único parámetro que lo puede hacer. El cambiar el contraste de índices de refracción y los grosores de las placas también modifica los diagramas de bandas sin tener que aumentar o disminuir el número de capas.

La figura 6 presenta el diagrama de bandas de la frecuencia con respecto al contraste de índices de refracción de la generación 5 de Thue-Morse.

Al graficar el mismo diagrama de bandas pero ahora para la generación 10, podemos observar el fenómeno de autosimilaridad, que en este caso es más evidente que en las figuras anteriores, como se puede observar el diagrama de la figura 6 está contenido en el de la figura 7.

La figura 8 presenta el diagrama de bandas de la frecuencia con respecto al contraste de grosores de las capas L_1 y L_2 de la generación 5 de Thue-Morse. En estos diagramas también se podría observar el fenómeno de autosimilaridad.

5. Conclusiones

Con las figuras 6 y 7 se observa que entre mayor sea el contraste de índices de refracción más bandas permitidas

aparecen y en la figura 8 vemos que un cambio en los anchos de las placas cambia la posición en energía de las bandas, esto coincide con lo que se menciona el libro de P. Yeh, (referencia 6 de este extenso) para estructuras periódicas. En el sistema aperiódico se observó que las bandas permitidas de los modos guiados se van fraccionando de acuerdo con la generación de Thue-Morse que forme la celda unitaria. Comparando la figura 6 y 7 se puede observar el fenómeno de autosimilaridad para las polarizaciones S y P; esta característica no se puede obtener en un sistema periódico y puede aprovecharse para diseñar nuevos dispositivos ópticos. El estudio matemático detallado de la autosimilaridad es motivo de otro trabajo de investigación.

Agradecimientos

Trabajo parcialmente apoyado por VIEP-BUAP, México, proyecto SASX-EXC09-I

Referencias

- [1]. Joannopoulos. John D, Photonic crystals Molding the flow of light. (USA 2008).
- [2]. E. Yablonovitch, Phys. Rev. Lett. **58**, 2059 (1987).
- [3]. S. John, Phys. Rev. Lett. **58**, 2486 (1987).
- [4]. E. Maciá, Phys. Rev. B, **63**, 205421 (2001).
- [5]. E. Maciá, Phys. Rev. Lett. **69**, 397 (2006).
- [6]. W.Pardo, Tesis "Caracterización Matemática de las Sucesiones y Heteroestructuras cuasirregulares" (Cuba, 2005).
- [7]. P.Yeh, Optical wave in layered media, (United States 1988).