RMIE, OCTUBRE-DICIEMBRE 2006, VOL. 11, NÚM. 31, PP. 1389-1422

Investigación

DESARROLLO DE EPISODIOS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA

*Estudiantes de bachillerato en procesos de resolución de problemas**

ARMANDO SEPÚLVEDA LÓPEZ / LUZ MANUEL SANTOS TRIGO

Resumen:
Se documenta el trabajo realizado por estudiantes de bachillerato cuando se enfrentaron a un conjunto de problemas que involucran diferentes métodos de solución, en un escenario de instrucción basado en resolución de problemas. Durante el desarrollo de la investigación, los estudiantes tuvieron oportunidad de trabajar en pequeños grupos, presentar y defender sus ideas en la clase completa y revisar constantemente su trabajo como resultado de críticas y opiniones que surgieron durante sus presentaciones y discusiones en clase. En este contexto, los alumnos exhibieron diferentes episodios de comprensión que les permitió refinar y robustecer sus acercamientos iniciales y, eventualmente, utilizar distintos caminos de solución de los problemas.

Abstract:
The article documents the work performed by high school students when faced by a set of problems involving different methods of solution, in an educational scenario based on problem solving. During the study, the students had the opportunity to work in small groups, to present and defend their ideas to the whole class, and to revise their work constantly, based on the criticism and opinions that arose during their presentations and class discussions. In this context, the students exhibited different episodes of comprehension that allowed them to refine and strengthen their initial approaches, and eventually to use different paths for solving problems.

Palabras clave: enseñanza de las matemáticas, solución de problemas, razonamiento, alumnos, educación media superior, México.
Key words: mathematics teaching, problem solving, reasoning, students, high school education, Mexico.

Armando Sepúlveda López es Coordinador del Programa de Maestría en Educación Matemática de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Michoacana. Fray Jacobo Daciano 192, colonia Ampliación Ocotusen, CP 58279, Morelia, Michoacán. CE: asepulve@umich.mx

Luz Manuel Santos Trigo es investigador del Departamento de Educación Matemática del CINVESTAV. CE. msantos@cinestav.mx

*Este trabajo se basa en la tesis doctoral del primer autor, presentada en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, bajo la dirección del segundo autor. Agradecemos el apoyo recibido por el Conacyt con el proyecto núm.47850.

Introducción

El desarrollo del razonamiento de los estudiantes sobre las nociones de proporción y de variación tiene una gran importancia en el currículum del bachillerato. Por ello el estudio del razonamiento proporcional representa un aspecto crucial en el currículum matemático preuniversitario. Generalmente, se reconoce que las experiencias de aprendizaje de los estudiantes se enriquecen cuando trabajan con problemas o tareas planteadas en contextos familiares y donde tengan la oportunidad utilizar recursos que les permitan aplicar ideas fundamentales de las matemáticas en los procesos de resolución. Así, la resolución de problemas que involucren distintos contextos es fundamental para lograr una sólida formación en la educación matemática.

¿Qué tipo de tareas o problemas promueven el aprendizaje matemático?, ¿qué significa que los estudiantes aprendan matemáticas?, ¿qué formas de trabajo en el aula favorecen el aprendizaje? Éstas son algunas preguntas que han sido parte de la agenda de investigación en educación matemática durante los últimos quince años. El uso de procesos de resolución de problemas y la puesta en marcha de una forma de trabajo en el aula que combine la modalidad colectiva –en la clase completa y en pequeños grupos– con la individual son aspectos clave de las orientaciones que actualmente se promueven en la educación matemática. Sin embargo, tradicionalmente la enseñanza de los contenidos matemáticos se ha visto desligada de estos aspectos y de una selección adecuada de tareas.

En este trabajo nos interesa documentar las estrategias, representaciones y recursos que los estudiantes usaron durante el proceso de solución de un conjunto de problemas. Entre los contenidos relevantes que aparecieron en las soluciones se incluyen los conceptos de variación o cambio, ideas de proporcionalidad, búsqueda de lugares geométricos y solución de ecuaciones. Los contextos en que se presentaron los problemas son familiares para la mayoría de los jóvenes y representan situaciones que les son fáciles de comprender. En la selección de los problemas se consideró la posibilidad de que, al ser abordados, los estudiantes utilizaran y potenciaran sus propios recursos matemáticos (Doerr y English, 2003); es decir, que el proceso de solución demandara de los alumnos una reflexión constante donde tuvieran oportunidad de expresar y refinar sus acercamientos iniciales a los problemas.

Las preguntas que guían el desarrollo de este estudio incluyen:

1) ¿En qué medida las tareas contribuyeron para que los estudiantes revelaran, inicialmente, sus ideas y, luego de interactuar con ellas, las evaluaran y extendieran, estableciendo conexiones o desarrollando nuevas ideas?
2) ¿Qué formas de comprensión y métodos de solución aparecieron durante los procesos de resolución de problemas? En particular, ¿qué habilidades o rasgos del pensamiento matemático y qué recursos o contenidos de la disciplina se promovieron en los estudiantes durante su interacción con los problemas o tareas?, ¿de qué manera los modelos iniciales de solución de los problemas se robustecieron o refinaron, como resultado de la participación de los estudiantes?
3) ¿Cuál fue el papel del profesor durante el desarrollo de las sesiones de resolución de problemas en el salón de clases?

Marco conceptual

En la organización y estructuración del estudioestán relacionados tres temas importantes:

1) La idea de que el aprendizaje de las matemáticas involucra el desarrollo de cierta disposición de los estudiantes para explorar e investigar relaciones matemáticas, emplear diversas formas de representación al analizar fenómenos particulares, usar distintos tipos de argumentos y comunicar resultados. Esta disposición resulta relevante en los procesos de refinar los acercamientos iniciales de los alumnos. En esta perspectiva, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) sugiere la importancia de que los estudiantes construyan sus conocimientos matemáticos al resolver distintos tipos de tareas que reúnan tres características: que los motiven a expresar lo que saben; que los aliente a estar dispuestos a investigar lo que desconocen por medio de la discusión, la experimentación y el intercambio de experiencias; y que permitan recuperar los procesos de pensamiento empleados en sus intentos de solución. Además, también es importante que los profesores los ayuden a plantear conjeturas y apoyen a quienes lo necesitan, sin eliminar el reto que contiene la tarea. En este contexto se reconoce la importancia de que los estudiantes utilicen recursos y estrategias que les permitan pensar matemáticamente:

> Aprender a pensar matemáticamente significa (a) desarrollar un punto de vista que valore el proceso de matematización y abstracción y tener la tendencia a aplicarlos, y (b) desarrollar una competencia con las herramientas de trabajo y usarlas en la meta de entender y construir estructuras –desarrollar el sentido matemático (Schoenfeld, 1994:60).

Así, el reto en la instrucción matemática es generar condiciones de aprendizaje para los estudiantes donde se reflejen valores propios relacionados con el desarrollo de la disciplina. En particular, el salón de clase debe promover actividades y hábitos consistentes con la práctica real de la misma.

> […] Para desarrollar los hábitos apropiados y la disposición de interpretación y de encontrar sentido a las ideas matemáticas y el desarrollo de modelos apropiados de pensamiento matemático –la comunidad de práctica en donde los estudiantes aprenden matemáticas debe soportar y desarrollar las formas de pensar de la práctica matemática. Esto es, el salón de clase deben ser comunidades en la cual el encontrar sentido a las ideas debe ser lo que se espera que los estudiantes practiquen (Schoenfeld, 1992:345).

2) El reconocimiento de que aprender matemáticas es un proceso continuo que se ve favorecido en un ambiente de resolución de problemas (Schoenfeld, 1998), y donde los estudiantes tienen oportunidad de desarrollar formas de pensar consistentes con el quehacer de la disciplina. En este contexto, los alumnos conceptualizan la disciplina en términos de preguntas o dilemas que necesitan examinar, explorar y resolver a través del uso de distintas estrategias y recursos matemáticos (Hiebert y Carpenter, 1992). Es decir, resulta relevante que formulen preguntas al intentar resolver problemas o comprender ideas matemáticas. Postman y Weingartner (1969:23) afirman que:

> El conocimiento se produce en respuesta a preguntas […] Una vez que ha aprendido a cómo preguntar –preguntas relevantes, apropiadas y sustanciosas– el estudiante ha aprendido cómo aprender y ya nadie lo puede detener en el camino de seguir aprendiendo lo que necesite y quiera conocer.

3) El reconocimiento de que los estudiantes exhiben ciclos o episodios de comprensión en las distintas fases de resolución de los problemas, que les

permite refinar constantemente sus modelos de solución (Lesh *et al.*, 2000). Esto es, en sus acercamientos, ellos incorporan una diversidad de formas de representación y generan ciclos de entendimiento que evolucionan a través de sus interpretaciones iniciales, intermedias y finales de las tareas. En general, al trabajar los problemas, los estudiantes muestran varios ciclos de modelación en donde sus acercamientos iniciales, descripciones, explicaciones, y predicciones, son gradualmente refinados, revisados o rechazados con base en la retroalimentación y discusión de sus ideas dentro de una comunidad:

> En la resolución de problemas varios niveles y tipos de respuesta casi siempre son posibles (donde una es la mejor dependiendo del propósito y circunstancias), y los estudiantes mismos deben ser capaces de juzgar el valor relativo o formas alternativas de pensar el problema. De otra manera, el estudiante no tiene forma de conocer que debe ir mas allá de la forma inicial de pensar el problema; y tampoco tiene forma de juzgar las ventajas y desventajas de una forma alternativa de pensar […] (Lesh y Doerr, 2003:18).

La identificación de episodios de comprensión, en términos del uso de recursos matemáticos, estrategias y representaciones, genera información útil para analizar los acercamientos de los estudiantes en la resolución de problemas; en particular, Lesh y Kelly (2000) así como Doerr y English (2003) han documentado que, cuando trabajan con problemas que les son significativos, emplean ideas matemáticas fundamentales y, con frecuencia, sus soluciones van más allá de la situación escolar; eventualmente, construyen modelos que les permiten resolver las tareas.

Diseño de la investigación, métodos y procedimientos

Este trabajo se llevó a cabo con un grupo de 24 estudiantes (16-17 años) de tercer grado de bachillerato, en una escuela pública del sistema educativo mexicano quienes, previamente, habían cursado álgebra, geometría y trigonometría y geometría analítica. Estos jóvenes participaron en un curso de resolución de problemas durante un semestre, con dos sesiones regulares de clases de dos horas cada una. Las sesiones se desarrollaron en un curso curricular "Temas selectos de matemáticas" que permite al profesor proponer el programa a estudiar; los jóvenes no recibieron instrucción específica para resolver las tareas.

Durante la instrucción, los estudiantes tuvieron oportunidad de exhibir sus ideas y formas de resolver el conjunto de problemas. En particular, resultó relevante que reconocieran la importancia de contrastar sus propios acercamientos con los que proponían sus compañeros. En este contexto, en su trabajo aparecieron múltiples formas de representar e interpretar los problemas. Así, en las actividades de instrucción se combinó el trabajo individual y colectivo, en pequeños grupos y con la clase completa, registrándose los hechos relevantes en estas formas de trabajo. Durante el desarrollo del estudio aparecen tres etapas importantes (Sepúlveda y Santos, 2004):

Etapa de aplicación

1) *Actividad previa:* el profesor da al grupo una breve introducción a la tarea, con el propósito de ubicar a los estudiantes en contextos similares a la actividad; destacando la importancia que representa su participación en el desarrollo de la sesión.
2) *Trabajo en equipos:* se organizan en equipos de tres, procurando que en cada uno haya estudiantes con distintos niveles de desempeño, que tengan la posibilidad de interactuar entre ellos y los demás equipos, así como de expresar y comunicar sus ideas. Al concluir el periodo asignado al trabajo por equipos, cada uno entrega su reporte de solución.
3) *Presentaciones:* cada equipo presenta a toda la clase su solución a la tarea, permitiendo que los miembros de los demás equipos pregunten libremente a quienes exponen.
4) *Discusión colectiva:* el profesor promueve la discusión colectiva entre los estudiantes, con la idea de analizar ventajas y desventajas de los diferentes métodos de solución presentados y, cuando sea necesario, realiza una sistematización de las ideas e identifica posibles extensiones del problema.
5) *Trabajo individual:* enseguida, a partir de la discusión colectiva, los estudiantes tienen la posibilidad de volver a la actividad y aplicar los nuevos entendimientos que se generaron como producto de la interacción y abordan individualmente la tarea.

Etapa de entrevistas

Como resultado de la observación del trabajo en equipos, de las presentaciones y de la discusión colectiva se entrevistaron a algunos estudiantes que mostraron un comportamiento de interés para la investigación. Las entrevistas fueron del tipo no estructurada y se abordan aspectos donde los jóvenes tuvieron dificultad o bien en los que mostraron ideas relevantes que era pertinente explorar con mayor profundidad en la solución de los problemas.

Etapa de análisis

Nos interesó distinguir si hay una evolución en el nivel de entendimiento de los estudiantes, identificando los momentos cruciales que contribuyeron a ese cambio. El análisis se realizó en tres partes: primera: se analizó el trabajo de los estudiantes en pequeños grupos, los cambios en las interpretaciones de los problemas, el tipo de cantidades y relaciones que usaron, el tipo de razonamiento matemático y expresiones de generalización. Segunda: se enfoca en describir las variaciones en los diferentes modelos que desarrollaron los alumnos en cada tarea, como resultado del uso de distintas representaciones de los problemas. Tercera: se analizan las transcripciones de equipos que contribuyeron con ideas para la solución de los problemas, así como de estudiantes que participaron en la discusión durante las presentaciones o en las entrevistas.

Nuestras fuentes de información para el análisis son: *a)* los reportes escritos de los estudiantes, tanto del trabajo en equipos como el individual; *b)* las trascripciones del audio y videograbaciones realizadas; y *c)* las observaciones de los investigadores. En cada una de las tareas, recibieron especial atención, en el audio y la videograbación, los equipos D y H, por la facilidad de expresión y comunicación de sus integrantes; con otra cámara el video fue rotando. Así, las copias del trabajo de los estudiantes, los reportes de campo y las transcripciones de las discusiones en equipos y en la clase completa, conforman el cuerpo de datos de nuestro estudio. Para organizar a los estudiantes en equipos de tres –denominados por las letras A, B, S, etcétera– se consideró: el desempeño mostrado durante las primeras sesiones, antes de la aplicación de las tareas; su comportamiento en el grupo; y las opiniones expresadas por sus anteriores profesores de matemáticas.

Los propósitos principales que se persiguieron con el estudio fueron: Primero: describir el desarrollo del pensamiento de los estudiantes sobre proporcionalidad, tipos de variación, lugares geométricos y ecuaciones. Aquí anticipamos diferentes usos de recursos de los estudiantes y formas potenciales de solución. Segundo: documentar las diferentes maneras de pensar de los estudiantes, que se generan cuando interactúan con las tareas en un ambiente que combina el trabajo y discusión colectiva, con el individual. Tercero: describir e ilustrar el desarrollo de los modelos que establecieron los estudiantes al resolver un conjunto de problemas en diferentes contextos.

La tabla 1 contiene las tareas seleccionadas (*Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum*, 1999, 2000), los contenidos matemáticos relevantes, el uso de recursos matemáticos y las estrategias potenciales de solución.

TABLA 1
Clasificación de las tareas

Contenidos fundamentales	Uso de recursos	Estrategias potenciales de solución
Tarea: Relámpagos		
Medición; geometría; números y operaciones	1° Medir y transformar escalas 2° Aplicar proporcionalidad 3° Aplicar propiedades de mediatriz y circunferencia	Transformar escalas y aplicar nociones de proporcionalidad; trazar mediatrices y circunferencias; y usar las propiedades de estos lugares geométricos
Tarea: Carros de supermercado		
Álgebra; medición	1° Medir y transformar escalas 2° Aplicar proporcionalidad 3° Obtener relación que modele la situación	Transformar escalas, identificar una variación lineal y obtener una relación entre dos variables; graficar número de carros contra espacio ocupado
Tarea: Sombras		
Geometría; álgebra	1° Usar proporcionalidad 2° Semejanza de triángulos 3° Trigonometría 4° Establecer gráfica y modelo de una variación lineal	Aplicar semejanza de triángulos y nociones de proporcionalidad, trigonometría; graficar distancia al poste contra longitud de la sombra
Tarea: Evaluar un dibujo		
Geometría; álgebra; números y operaciones	1° Aplicar proporcionalidad 2° Usar argumentos verbales 3° Usar argumentos geomet. 4° Usar relaciones de proporcionalidad entre perímetro y área	Dibujar figuras y obtener el tipo de variación en el perímetro y en el área; obtener constante de proporcionalidad, aplicar regla de tres; usar restricciones en un problema

Cada problema fue inicialmente analizado por el investigador con la intención de identificar las ideas y conceptos matemáticos fundamentales alrededor del proceso de solución. Además, la identificación de las soluciones potenciales a cada problema ayudó a detectar teóricamente las formas de solución que los estudiantes podían exhibir en sus acercamientos a los problemas. Esta información resulta relevante al estructurar el desarrollo del estudio (Santos, 1997).

El análisis de la información que proviene del trabajo individual de los estudiantes, el realizado en pequeños grupos, las presentaciones, las observaciones de clase y las entrevistas, se basa en el seguimiento del trabajo en los distintos escenarios. Así, una representación del problema o una idea inicial propuesta en forma individual se analizaba desde la perspectiva de cómo se exploraba o discutía en los pequeños grupos, en las presentaciones de equipo y durante las entrevistas.

Presentación de resultados

A continuación presentamos los resultados obtenidos durante la aplicación de cada una de las tareas. Iniciamos con algunos comentarios generales acerca de las características de las preguntas que las conforman para, posteriormente, centrarnos en aspectos relevantes donde se aprecien distintos acercamientos y la evolución en el manejo de recursos, argumentos y representaciones que utilizaron los estudiantes.

Contexto y enunciado de la tarea Relámpagos

Se trata de un problema que involucra mapas, dados en una cierta escala, que indican la localización de varias poblaciones en relación con un lugar donde hay una tormenta con truenos y relámpagos (figura 1); se informa a los estudiantes que el sonido viaja un kilómetro en tres segundos y que una manera de estimar la distancia a la que ocurrió un relámpago es contar el número de segundos a partir de que se ve el destello de luz hasta escuchar el trueno, y entonces dividir ese número entre 3. La tarea consiste en:

1) Supongamos que ves el destello de la luz de un relámpago y después de 3 segundos escuchas el trueno: *a)* ¿A qué distancia ocurrió el relámpago? *b)* ¿Qué te dice la regla "dividir entre 3" sobre qué tan rápido el sonido del trueno viaja por el aire? Explica.

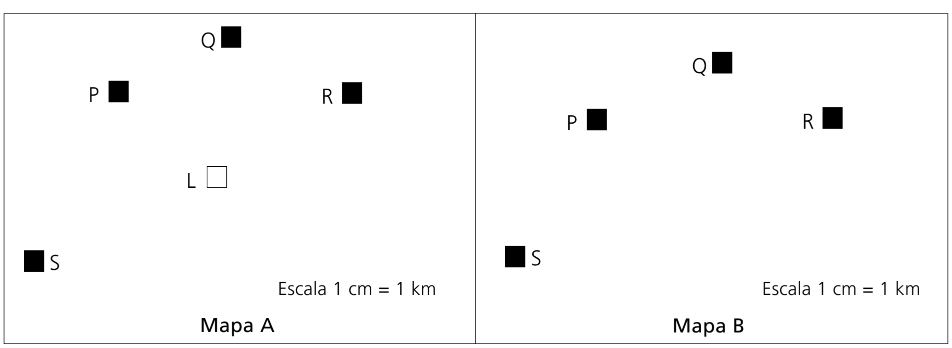
2) En los puntos P, Q, R y S marcados en el mapa A de la figura 1, hay gente de pie y ven un relámpago en el punto L: *a)* ¿quién escucha primero el trueno? *b)* ¿Quién lo escucha al último? c) Una persona lo escucha después de 15 segundos ¿dónde está? *d)* ¿Después de cuántos segundos escucha el trueno la persona que está en P?

3) Si hay un relámpago en diferente lugar y las personas que están en P y Q lo escuchan después de la misma cantidad de tiempo: *a)* Muestra en el mapa B el lugar donde pudo haber ocurrido el relámpago. *b)* ¿Hay otros lugares?, si los hay, muestra cómo pueden obtenerse. *c)* ¿Puedes decir quién escuchará primero el trueno de P y R?

4) Ahora el relámpago ocurre en diferente lugar. *a)* Si sabes que una persona en P lo escucha 9 segundos después de ver la luz, muestra en el mapa B los lugares donde pudo haber ocurrido. *b)* Si sabes que una persona en R escucha el trueno de este mismo relámpago 18 segundos después de verlo, muestra en el mapa los lugares donde pudo haber ocurrido.

Esta tarea contiene dos tipos de preguntas: las que pueden responderse de manera directa con una operación, una medición o una argumentación que se deriva inmediatamente del enunciado (1 y 2), y las que involucran argumentos relacionados con los lugares geométricos de mediatriz y circunferencia (3 y 4); en este caso, la noción de proporción aparece implícitamente en las respuestas o en el trazo de los lugares geométricos. En las dos primeras hubo diferencias en las respuestas de los estudiantes, debido a que consideraron puntos distintos desde los cuales medir. La pregunta en la que hubo más discusión y reflexión fue la 3; aquí nos centramos en ésta.

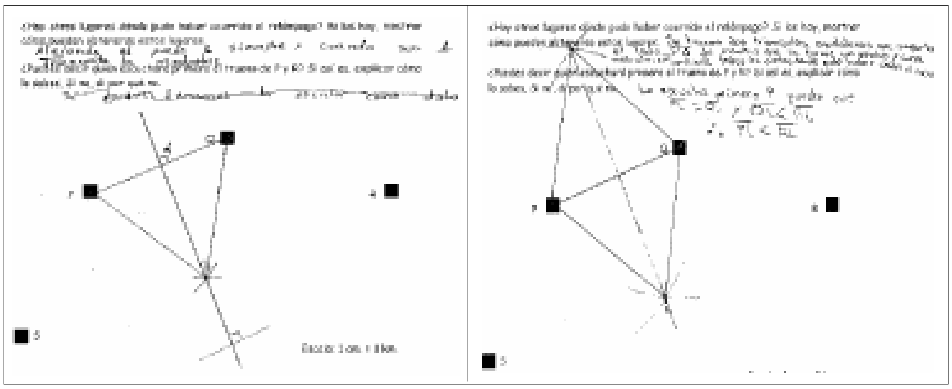
FIGURA 1
Mapas que acompañan a la tarea de Relámpagos



Las figuras 2 y 3 resumen algunos acercamientos de los estudiantes, así como parte del trabajo en pequeños grupos y reportes individuales. Los ocho equipos respondieron a los incisos a y b de la pregunta 3 mediante el trazo de la mediatriz del segmento PQ, señalando dos o más puntos de la misma.

FIGURA 2

Acercamientos para trazar la mediatriz de PQ *en la pregunta 3b*

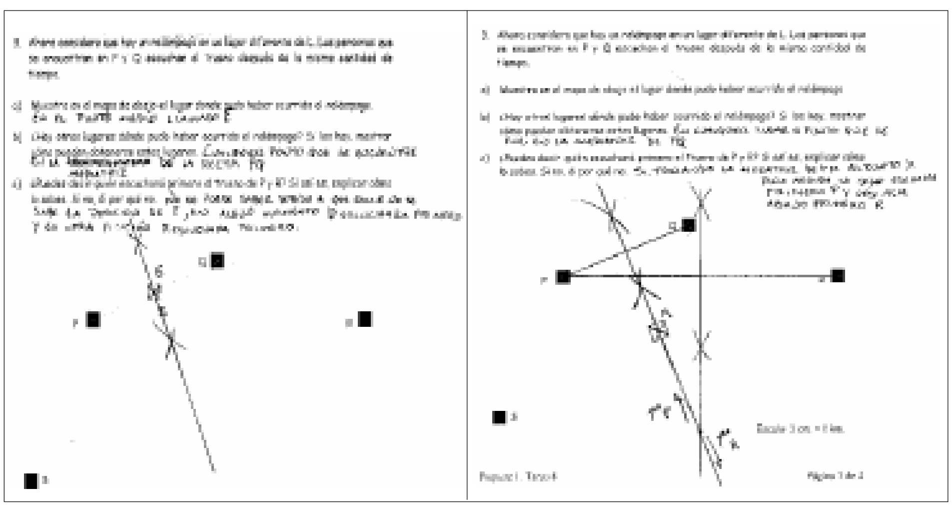


El equipo F usó un triángulo isósceles, dibujó la recta que va del vértice al punto medio de *PQ*.

El equipo G dibujó dos triángulos equiláteros y una recta que pasa por los vértices.

FIGURA 3

Trabajo del equipo H *y de Andrés (individual) en la pregunta 3 de Relámpagos*



El equipo H concluyó que no se podía decir quién escuchará primero el trueno; si la persona que está en P o quien está en R.

Andrés (del equipo H) reporta, después de las presentaciones y discusión colectiva, que sí es posible decir quién escuchará primero el trueno.

Se observan tres formas distintas de trazar la mediatriz, las contenidas en la figura 2 y la habitual con regla y compás. En la figura 3 se aprecian los reportes escritos del equipo H y de Andrés, uno de sus integrantes, quien se oponía y descalificaba la argumentación de Roberto durante el trabajo en equipos, que consistía en que debería haber un punto "que estuviera en el mismo radio" y desde ahí se escucharía al mismo tiempo en P, Q y R.

En general, los reportes individuales contienen respuestas completas en la pregunta 4 y coinciden con el trabajo previo en equipos. Hay evidencia de que los acercamientos en pequeños grupos fueron importantes para que los estudiantes propusieran y refinaran las representaciones del problema. El trabajo en grupo fue un elemento fundamental tanto en la búsqueda de explicaciones y justificaciones, como en la importancia de entender y valorar el trabajo de los compañeros de clase. Una evidencia de ello se muestra en el siguiente diálogo, correspondiente a un episodio del trabajo en pequeños grupos en la tarea Relámpagos, que ilustra esta actitud entre los integrantes del equipo H, donde Roberto se anticipa y resuelve la pregunta 3c, pero sus compañeros, Karla y Andrés, no le prestan atención. Previamente, habían trazado la mediatriz de PQ y aceptado que si el relámpago ocurriera en cualquiera de sus puntos, se escucharía al mismo tiempo en P y Q [Andrés (A), Karla (K), Roberto (R)]:

[Andrés y Karla se encuentran discutiendo en contra de lo que dice Roberto]

1. K: [...] Pero entonces, ¿cómo le hago para saber? [se refiere a quién escuchará primero el trueno, una persona que está en P o una que esta en Q].
2. R: ¡Ah! Pos mídelo [asocia la distancia como referente importante] Si estos tres puntos fueran iguales y éste fuera diferente [señala el punto Q], entonces ya nada más tomaríamos en cuenta de dónde queremos escuchar; si tomáramos en cuenta que debería ser por ésta [señala los puntos P y R, y mueve el dedo indicando una línea perpendicular entre los dos].
3. A: Pero pide quién sí y quién no, ¿dónde está?
4. R: [...] Entonces hay un punto por aquí [señala la mediatriz de PR e indica un punto de ésta]; entonces ese punto está igual de aquí a P y de aquí a R. Algunas veces estará más cerca de P y a veces más cerca de R.
5. K: No es claro.
6. R: ¿Por qué no? Si pudieras saber ese punto, entonces todos estarían en el mismo radio...
7. A: A ver, vamos a ver la otra pregunta [Andrés intenta esquivar el diálogo, dando la vuelta a la hoja y empieza a leer].

8. R: […] Yo digo que se puede sacar la recta por el punto medio y sacar el radio de ambas [se refiere a las mediatrices de los segmentos PQ y PR] para ver qué es lo que pasa desde ese punto [se refiere al punto de intersección de esas mediatrices (circuncentro del triángulo PQR)]… pero no me hacen caso.

A pesar de la insistencia de Roberto, el reporte escrito del equipo H no contiene sus opiniones; es decir, no logró convencer a sus compañeros. Sin embargo, más adelante, en el siguiente diálogo que corresponde a la discusión que genera la presentación de los equipos, se muestra cómo las ideas aportadas por Roberto están reflejadas en las argumentaciones que utiliza Andrés para convencer a los demás. Con base en los razonamientos dados por Rubí durante la presentación del equipo D, el profesor sistematizó las ideas y dibujó desde un punto de la mediatriz segmentos a P y a R; entonces se originó el siguiente diálogo [Profesor (P), Héctor (H) del equipo A, Alejandra (Aa) del equipo E, Andrés (A)]:

9. P: Miren, parece que este punto de la mediatriz está más cercano a R que este otro punto de la mediatriz a P, entonces, ¿cómo le hago para determinar a partir de dónde es más cercano?
10. Aa: Si ponemos P y R de un punto que esté a una misma distancia de R que de P, entonces de ese punto hacia arriba va a estar más cerca de P, y hacia abajo de R.
11. A: Sí. Hay un punto en la recta que está a la misma distancia de P, de Q y de R [se refiere al circuncentro del triángulo PQR, el cual se propone como referente importante].
12. P: A ver, tomo P y R ¿qué hago con P y R? …Pásale [el profesor se dirige a Alejandra, quien pasa al pizarrón].
13. Aa: Si trazo un punto [señala un punto de la mediatriz de PQ] que esté a la misma distancia de R que de P...
14. P: ¿Cómo lo localizas? [Alejandra se queda pensando].
15. A: Trazas PR, localizas su mediatriz y con la otra mediatriz ya puedes saber a partir de dónde.
16. P: Trázala, trázala [Alejandra dibuja la mediatriz de PR (con color rojo) que interseca a la mediatriz de PQ en un punto, el cual es remarcado].
17. Aa: Entonces es a partir de aquí [Alejandra señala el punto de intersección].
18. A: Sí porque P, Q y R están en el mismo radio [argumento que Roberto (equipo H) había dado antes, durante el trabajo en equipos].
19. P: Ahí, ¿qué pasa?

20. Aa: De aquí para arriba va a estar más cerca de P [señala el punto de intersección de las mediatrices y recorre con el dedo la mediatriz de PQ]; y de aquí para abajo va a estar más cerca de R [se está refiriendo al dibujo del pizarrón, que es similar a la figura 3 hecha por Andrés].

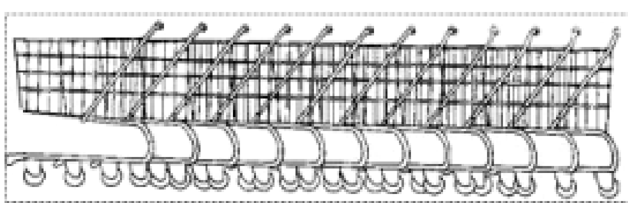
Como producto de la interacción, Andrés cambió de punto de vista: de contradecir y refutar las ideas de Roberto pasó a aceptarlas y apoyarse en ellas para resolver el problema (ver figura 3). En general, los estudiantes se empeñaron en exponer y justificar sus afirmaciones, así como aclarar sus dudas. El resultado de esta interacción fue que algunos defendieron y confirmaron sus ideas, como los integrantes de los equipos D y E en torno a la pregunta 3c; otros las modificaron como Andrés y Karla del equipo H.

Contexto y enunciado de la tarea Carros de supermercado

Es un problema que involucra a una pila de 12 carros de supermercado, dibujados en la escala 1/24 (figura 4), sobre los que se pregunta la longitud del espacio que ocuparán *n* carros acomodados. Se pide a los estudiantes que respondan lo siguiente:

1) Establece una regla para obtener la longitud del espacio de almacenamiento *s*, cuando se conoce el número de carros.
2) Encuentra una regla que permita obtener el número de carros que pueden colocarse en un espacio *s*.

FIGURA 4
Ilustración que aparece en la tarea



Resolver esta tarea implica utilizar recursos relacionados directamente con las nociones de proporcionalidad y variación lineal. Los estudiantes están habituados a los contenidos asociados con estas nociones, pues están presentes en el currículum del bachillerato dentro de los cursos de álgebra y geometría analítica; además, el problema y las preguntas están planteados de una forma usual en el contexto escolar. En las respuestas aparecieron tres tipos de acercamiento: *a)* utilizar literales y datos sugeridos en el enunciado y en la figura del problema, para luego escribir una fórmula; *b)* aquellos que se quedaron adheridos en el contexto particular de la figura; y *c)* los que ignoran los datos y literales sugeridas.

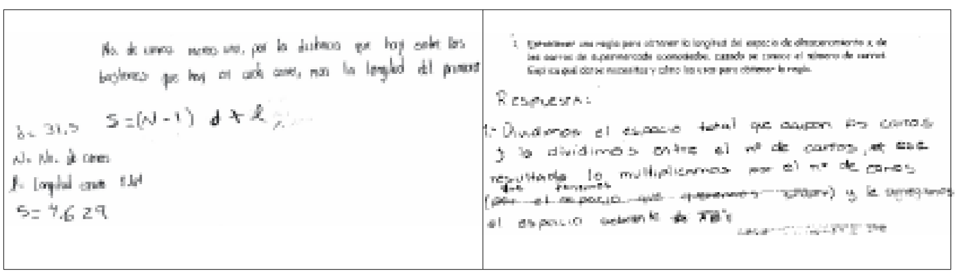
Los reportes escritos, correspondientes al trabajo en pequeños grupos, muestran que los estudiantes lograron identificar un problema de variación; por ejemplo, Salvador (del equipo C), después de escribir la fórmula de la primera pregunta (figura 5), comentó: "sí está bien porque si n aumenta, s aumenta, ya lo comprobé". Los trabajos de los equipos F y A se ubican en el acercamiento c; F da una respuesta verbal (figura 5) y A da una expresión que no tiene que ver con el enunciado del problema:

$$(\Sigma 1/2)x + 1/2x = \mathrm{L}.$$

En el reporte individual de Erick (equipo F), después de la discusión colectiva, se aprecia un avance significativo.

FIGURA 5

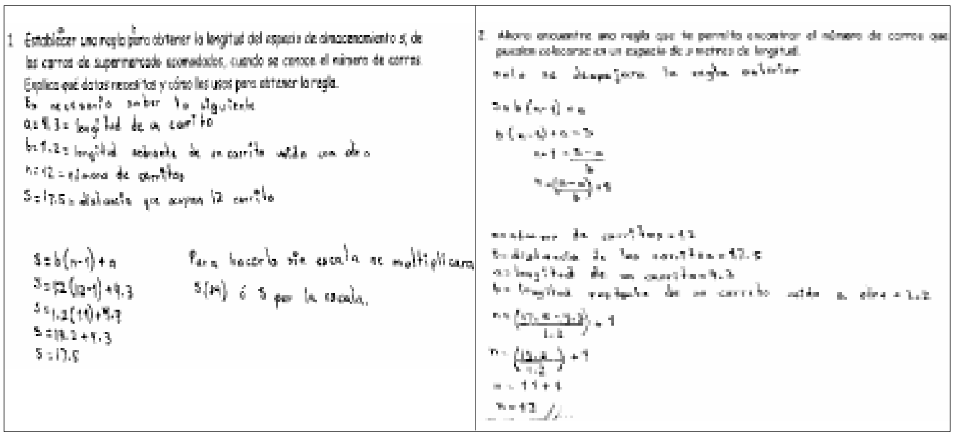
Acercamientos tipo a y c en la pregunta 1



Reporte escrito del equipo C. Respuesta verbal del equipo F.

Es posible que la figura dada en el enunciado haya inducido u orientado la respuesta $S= a + 11b$, que corresponde al caso particular de la ilustración (acercamiento b); sin embargo, puede adherir a los estudiantes en la situación concreta e impedir la generalización a un número de n carros; o bien, puede conducir a errores cuando se pasa a la segunda pregunta, como ocurrió con los equipo B y D. Por otra parte, un aspecto que resultó problemático al principio fue el asunto de la escala, algunos resolvieron el problema con escala y otros sin ella; después de la interacción en la clase completa las dudas fueron aclaradas, como se muestra en el trabajo de Paola (equipo B) en la figura 6.

FIGURA 6
Trabajo individual de Paola (equipo b) en Carros de supermercado



El video muestra que mientras los estudiantes trabajaban en equipos, algunos de los pupilos que proporcionaron una respuesta correcta, frecuentemente monitoreaban el desarrollo de su trabajo; por ejemplo, comprobaban en las fórmulas obtenidas: decían “si $n = 12$, sustituimos lo que vale a y b, nos queda $S = 17.5$ centímetros, que es igual a lo que mide la figura”. Por su parte, el equipo H expresó que la solución podía ser dada con escala o sin ella. Durante las presentaciones de los equipos en la clase completa, Victoria, del equipo E, expuso su acercamiento a la pregunta 1, entonces se originó el siguiente diálogo relacionado con la escala [Victoria (V), Profesor (P), Grupo (G), Andrés (A)]:

1. V: Si y es lo que sobresale de cada carrito, a es el número de carritos y x es lo que mide un carrito… tenemos $y(a-1) + x = S$;… y lo comprobamos con los carritos del dibujo…
2. P: ¿Por qué no encierras en un recuadro la fórmula que obtuvieron? [...], ¿qué opinan los demás equipos?

3. G: Está bien,… sí, está bien [destaca la voz de Andrés (integrante del equipo H)].
4. A: Pero eso es sin escala.
5. V: Bueno, al final se aplica la escala. Lo que nosotros hicimos fue resolverlo para éste [señala el dibujo].
[Después de varias opiniones, Andrés explica desde su butaca a toda la clase].
6. A: […] las distancias en la figura son sin escala, pero esas distancias en los carritos necesitas pasarla a la escala de 1 a 24. O sea, esa distancia que obtuvieron ellos [se refiere a 17.5 cm] necesitan aplicarle la escala real.
7. V. Sí, eso es lo que decimos.
8. P: Bueno… esa es la regla que obtuvo su compañera ¿están de acuerdo? [...], nada más dicen sus compañeros del equipo E que es sin escala, ¿cómo debe ser?
9. A: por 24 [varios estudiantes hablan al mismo tiempo].

Contexto y enunciado de la tarea Sombras

En este problema se involucra a Alicia, de quien se pregunta la longitud de su sombra cuando se encuentra parada a ciertas distancias de un poste con lámpara (figura 7); y lo que ocurre cuando, en lugar de ella, se trata de un joven de mayor estatura. A los estudiantes se les plantean las preguntas siguientes:

1) Alicia mide 1.5 m y se encuentra de pie a 3 m de la base de un poste que tiene una lámpara a 4.5 m de altura. ¿Cuánto mide la sombra de Alicia?
2) ¿Cómo varía la longitud de la sombra de Alicia cuando se acerca o se aleja del poste? Traza una gráfica en un sistema de ejes perpendiculares, ¿puedes encontrar una fórmula para esta gráfica?
3) La altura de Simón es de 2 m, ¿cómo es la gráfica que representa su sombra? Compara esta gráfica con la trazada para Alicia.

En esta tarea, el hecho de que los datos aparezcan en la figura 7 y se pregunte por el tamaño de la sombra, puede originar respuestas incorrectas de los estudiantes al establecer igualdades de razones con los números tal y como aparecen en la figura, debido a un débil manejo del tema de semejanza de triángulos, y argumenten que se trata de una relación válida. Las preguntas 2 y 3 involucran una proporción derivada de la semejanza de triángulos junto con la noción de variación, situación que puede ser no habitual para los estudiantes de este nivel educativo.

FIGURA 7
Ilustración que acompaña a la tarea Sombras

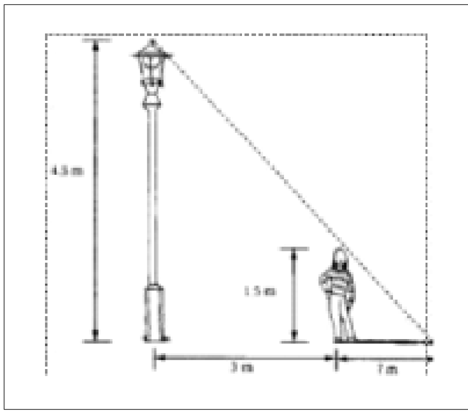
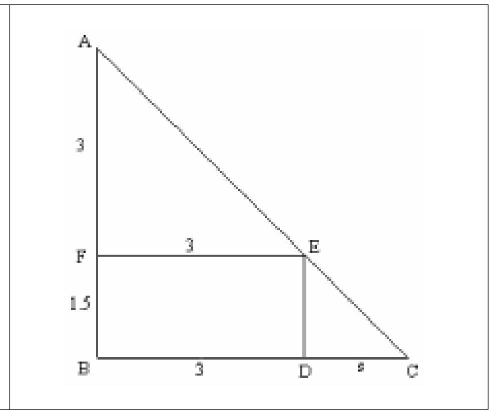


FIGURA 8
Dibujo que puede ser asociado con la ilustración de Sombras



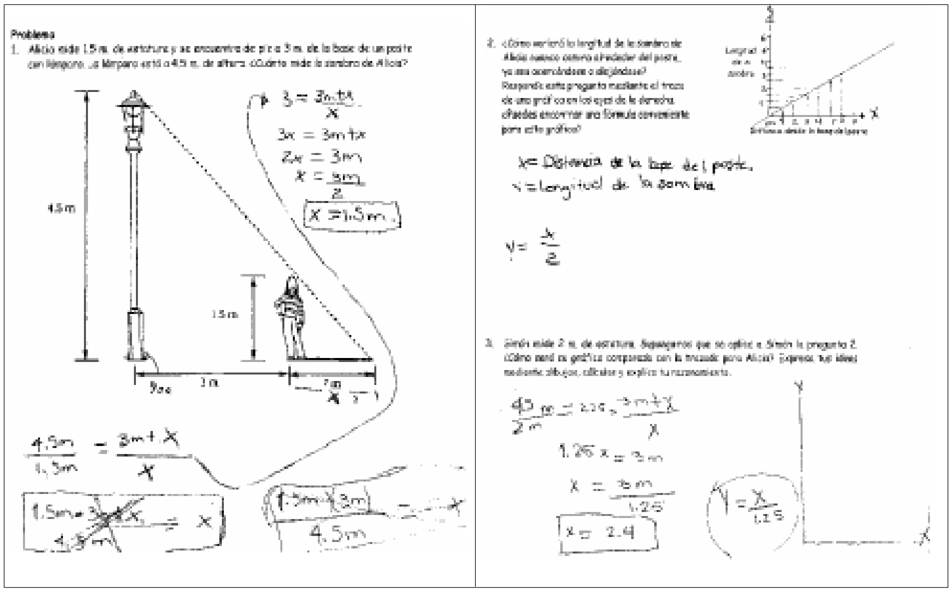
Un aspecto importante en el entendimiento y solución del problema es que los estudiantes construyan una representación de la situación que les ayude a buscar relaciones entre los datos del problema. Por ejemplo, la altura a la que se encuentra la lámpara, la estatura de Alicia y su sombra se pueden representar mediante segmentos como en la figura 8. Este dibujo podría evocar o sugerir la idea de una figura compuesta por tres triángulos rectángulos semejantes: el que forma el poste, el que forma Alicia y el que forma la distancia de Alicia al poste si se traza el segmento horizontal sobre su cabeza. Las relaciones involucradas en la semejanza de triángulos permiten, esencialmente, resolver el problema; para ello, debe considerarse el segmento que representa la sombra, primero como una cantidad fija y luego como una variable.

Los reportes escritos entregados por los equipos muestran acercamientos distintos en los intentos de solución por parte de los estudiantes. ¿Qué ideas, conceptos, estrategias y representaciones contienen estos acercamientos? En los reportes y el video del trabajo en pequeños grupos se observan los siguientes acercamientos asociados con la pregunta 1:

a) Los integrantes de los equipos D y G asumieron que hay dos triángulos semejantes, sin justificar plenamente el porqué se cumple esta relación, establecieron una proporción y con base en ella operaron para obtener la respuesta como muestra la figura 9.

FIGURA 9

Reporte del equipo D*,*
se observa que distinguieron un problema de variación



b) El equipo E tuvo un acercamiento trigonométrico, construyó un triángulo en el vértice de la sombra de Alicia, prolongó la sombra, la hipotenusa y trazó una línea (figura 10), calcularon θ mediante la tangente y obtuvieron que la sombra de Alicia:

$$x = \frac{1.5}{Tan45^{o}} = 1.5$$

c) El equipo C trazó una línea horizontal sobre la cabeza de Alicia, formando un triángulo con el poste (figura 10) y expresaron semejanza con el triángulo que forma Alicia (hay letras repetidas, usaron símbolo de congruencia para denotar esta semejanza), encontrando que la razón de sus catetos es de 1; con ello obtuvieron la respuesta correcta.

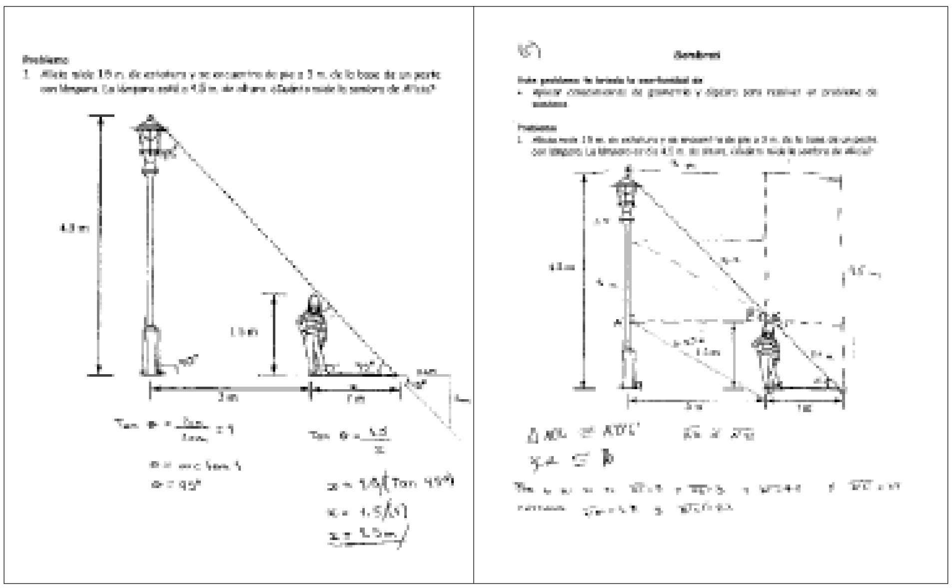
d) Los equipos B, F y H asumen y usan la validez de la igualdad

$$\frac{4.5m}{3m} = \frac{1.5m}{x}$$

sin dar argumentos que la justifiquen, que los conduce al resultado erróneo $x = 1$. Este error se aclaró en la discusión grupal, cuando Andrés (del equipo H) presentó su solución y no tuvo argumentos para defenderla.

FIGURA 10

Acercamientos tipo b y c de los equipos E y C



Trazos hechos por el equipo E sobre la figura dada en el problema.

Trabajo del equipo C, obsérvese la cantidad de trazos y las incoherencias de notación.

La intervención de Rubí durante la presentación del equipo D fue definitiva para avanzar en la discusión y convencer a la mayoría de los estudiantes. La importancia de que tengan oportunidad de presentar y discutir sus ideas con todo el grupo se ilustra en la interacción que se manifiesta durante la presentación de un equipo en toda la clase.

Durante la presentación del equipo H, Andrés hizo un dibujo en el pizarrón y expuso verbalmente que la sombra de Alicia mide 1 m, sin ofrecer argumentos para aclarar los cuestionamientos del profesor y otros estudiantes; entonces se da el siguiente diálogo, donde se observa la falta de argumentos [Andrés (A), Profesor (P), Julio (J)]:

1. A: Como esto es 4.5 [señala el poste] y esto es 1.5 [Alicia], entonces, si de aquí a aquí son 3 metros, entonces… [se queda pensando].
2 P: ¿Entonces, cuánto mide la sombra?
3. A: uno… un metro [varios estudiantes hablan, destaca la voz de Julio (D)].
4. J: ¿Cómo va a ser uno?…

Como varios estudiantes no estuvieron de acuerdo con Andrés, Victoria (equipo E) pasó al pizarrón, hizo la figura del enunciado, abordó y resolvió la pregunta 1 del problema con su acercamiento trigonométrico como el de la figura 9. Sin embargo, los integrantes de los equipos H y B no estaban convencidos. Los del equipo H, inseguros, dijeron que estaba mal porque se confundieron y no consideraron completa la distancia de Alicia al poste junto con la sombra. A sugerencia del profesor, la alumna Core (del equipo F) pasó al frente, hizo un dibujo en el pizarrón hablando en voz baja [Profesor (P), Core (C), Grupo (G), Rubí (R)]:

5. P: Explícanos qué estas haciendo.
6. C: Bueno, tengo estos triángulos con este ángulo [marca el ángulo donde termina la sombra], estas líneas paralelas y estos ángulos [marca los ángulos rectos en el poste y en los pies de Alicia], entonces […] 4.5 m es a 1.5 m [habla y escribe en forma esquemática la regla de tres] 4.5 m es a 1.5 m como 3 m es a x; entonces… $x = 1$m.
7. P: ¿Cómo la ven?
8. G: Maaal [destacan voces de Andrés (H) y Rubí (D)].
9. P: ¿Por qué?, pásenle [dice al equipo D]. Miren jóvenes, están divididas las opiniones, unos dicen que la sombra de Alicia mide 1 m y otros dicen que la sombra mide 1.5 m [Rubí pasa al pizarrón]. ¿Por qué está mal la solución del equipo F?
10. R: Ah, bueno [explica sin escribir] porque ellos pusieron que 3 m era a x… pero no puede ser 3 metros porque les faltó este pedacito [señala la sombra en el dibujo de Core].
11. P: Entonces explícanos tu solución aquí, en esta parte.
12. R: [Habla y escribe] 4.5 m es a 1.5 m como 3 m más x es a x, porque debe incluirse toda esta parte, porque no es aquí donde termina la sombra de Alicia sino hasta aquí. Entonces despejamos la x, pero primero hicimos la división, y nos da 3 es igual a 3 m más x sobre x…, tenemos x igual a 3 metros entre 2, da 1.5 metros.

13. P: ¿Cómo la ven?
14. G: ¡Bien, muy bien! [Aplauden].

En ese momento los equipos B y H se convencieron de que su solución era incorrecta porque no habían considerado completo un lado del triángulo que forma el poste en la figura; en particular, Andrés y Karla expresan que la sombra de Alicia no es de 1 m sino que mide 1.5 m, "te dije que no era uno" comentó Julio (equipo D).

Cuando el equipo D presentó su acercamiento a la pregunta 2, la discusión fluyó más rápidamente y hubo menos cuestionamientos; incluso Rubí introdujo variaciones en la distancia de Alicia al poste e hizo notar que la sombra de Alicia siempre es la mitad de su distancia al poste, luego trazó la recta que pasa por los puntos (1, 0.5), (4, 2), etcétera, los cuales se obtuvieron al sustituir en la proporción:

$$\frac{4.5m}{1.5m} = \frac{3m + x}{x}$$

en lugar de 3 m, anotó x ("ya que varía"), ahora le llamó y a la sombra en lugar de x, obteniendo $3y = x + y; \Rightarrow 2y = x$; finalmente escribió su fórmula:

$$y = \frac{x}{2}$$

En ese momento Joel (equipo D) pidió pasar a explicar la solución a la pregunta 3: sobre la proporción que estaba escrita en el pizarrón (de la pregunta 1), cambió 1.5 m por 2 m, escribió:

$$\frac{4.5m}{2m} = 2.25 = \frac{3m + x}{x}$$

y llegó a que la sombra de Simón es $x = 2.4$m. Después graficó una recta para Simón y escribió la ecuación:

$$y = \frac{x}{1.\ 25}$$

(procedió igual que Rubí en la pregunta 2).

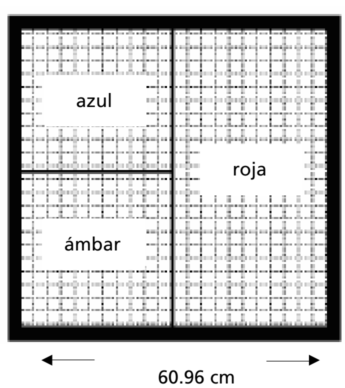
Contexto y enunciado de la tarea Evaluar un dibujo

Es un problema que involucra a un constructor que debe explicar cómo cubrir con un plafón el claro de un edificio que tiene forma cuadrada, a partir de un dibujo cuyo lado es conocido. La figura 11 muestra un plafón cuadriculado similar al que debe ser colocado en un edificio. El interior está cubierto por tres secciones con 144 vidrios rectangulares de color azul, 144 ámbar y 288 rojos. La medida no incluye el borde que esta formado por 40 vidrios rectangulares de color negro. Se quiere ver si los estudiantes pueden reconocer que un incremento en una dimensión lineal no produce un incremento similar en una de área. Se pide a los estudiantes que respondan lo siguiente:

1) ¿Cuántos vidrios de cada color se necesitan para cubrir un claro de un edificio de 121.92 cm x 121.92 cm? (no olvidar que el borde es negro).
2) Escribe un enunciado que explique cómo puede obtenerse el número de vidrios necesarios de cada color, para cubrir un dibujo similar de cualquier tamaño.
3) Supongamos que se tienen únicamente 6000 vidrios rojos y que de los otros colores hay de sobra, ¿cuál es el tamaño del mayor dibujo, como el de la figura, que puede hacerse?

Como parte de la actividad previa en esta tarea, el profesor planteó situaciones donde se debe cuantificar, por ejemplo, la cantidad de árboles necesarios para cubrir uniformemente una huerta rectangular si varía el largo o el ancho de la misma.

FIGURA 11
Ilustración que aparece en el enunciado del problema



La primera de las preguntas corresponde a un problema familiar para los estudiantes, donde una posible estrategia es aplicar proporcionalidad entre área o perímetro con el número dado de vidrios; después se agregan dos situaciones no rutinarias: expresar la generalización de la pregunta inicial y resolver un problema con condiciones iniciales.

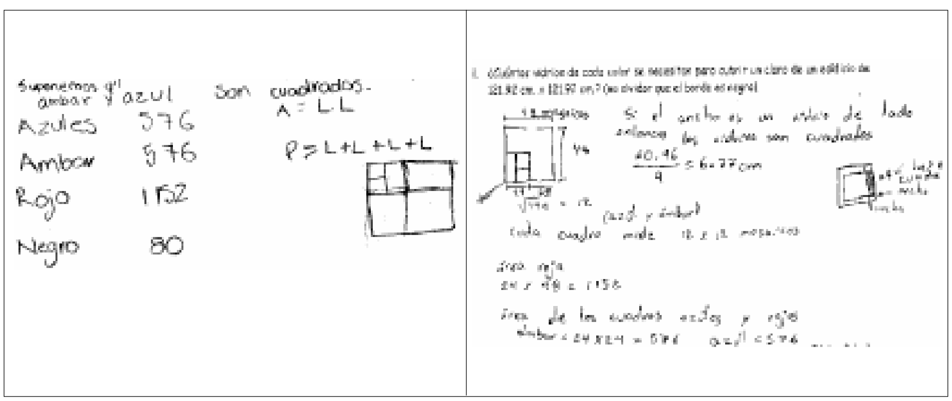
Esta tarea presentó mayores dificultades que las anteriores. Los equipos B, C, D, E, F y G abordaron la primera pregunta e intentaron, vagamente, responder la segunda; sólo C y E abordaron la tercera. En la primera pregunta se observan tres acercamientos distintos:

a) Los equipos B, C y G calcularon las áreas de las secciones que serían rellenados con vidrios de cada color; al parecer, usaron proporciones sin escribirlas. Para los vidrios negros multiplicaron por dos el número de vidrios del dibujo dado. El equipo C tuvo problemas para entender la forma de los vidrios negros y cómo deberían acomodarse, lo cual afloró más adelante, durante las presentaciones de los equipos.

b) Los equipos D y F tuvieron un acercamiento geométrico, dibujaron el cuadrado que se va a construir y hacen notar que el dibujo original cabe cuatro veces, como se muestra en la figura 12.

FIGURA 12

Acercamientos geométricos en la pregunta 1 de Evaluar un dibujo



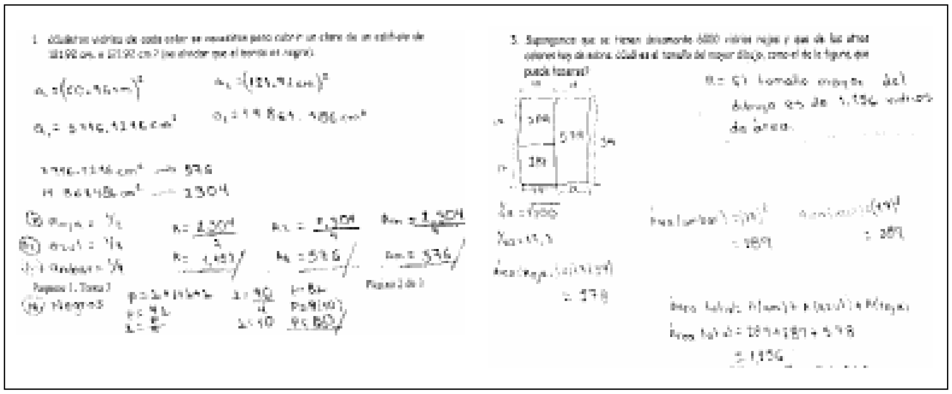
El equipo D en la pregunta 1, con base en la reproducción del cuadrado original, obtiene sus respuestas.

Acercamiento geométrico del equipo F. Se observa que supone que los vidrios negros son cuadrados.

c) El equipo E calculó áreas del cuadrado original y del que se va a construir, estableció correspondencias de estas áreas con el número de vidrios y obtuvo la razón de proporcionalidad que le corresponde a los vidrios de cada color; para los negros multiplicó por 8 el número de vidrios de cada lado, como se muestra en la figura 13. Además, aunque incorrectamente, este equipo fue el único que dio una respuesta completa a la pregunta 3.

FIGURA 13

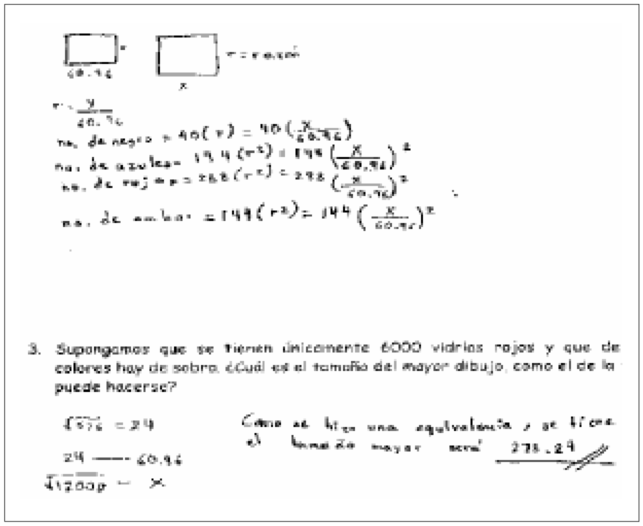
Trabajo del equipo E en las preguntas 1 y 3



Debido a contingencias que se presentaron durante la aplicación de esta tarea, las dificultades implícitas de las preguntas 2 y 3, y dado el poco avance en la discusión colectiva, fue necesaria la participación del profesor en forma más amplia que en las tareas anteriores. El maestro usó los argumentos dados durante la presentación del equipo E, en la clase completa, para guiar a los estudiantes hacia la solución e hizo énfasis en que se debía utilizar la noción de proporción para dar la solución general en la pregunta 2; además, señaló que, necesariamente, los seis mil vidrios rojos deben ser utilizados en la pregunta 3.

Sólo 10 de los estudiantes lograron incorporar algunas de las ideas expuestas por el profesor; de éstos, Rubí, Paola y Victoria, fueron las únicas que reportaron una respuesta satisfactoria. La figura 14 contiene el trabajo individual de una de ellas.

FIGURA 14
Trabajo de Paola en las preguntas 2 y 3



Durante las presentaciones, mientras Victoria exponía el trabajo del equipo E, Salvador (del equipo C) intervino para cuestionar sobre la forma y el número de vidrios del interior y del borde. Se dio una discusión en toda la clase que lo llevó a entender que los vidrios del interior podrían no ser cuadrados. Además, Salvador cuestionó:

> ¿Si hay 40 vidrios negros en el perímetro del dibujo, a cada lado le tocan 10, cómo los acomodo?, si coloco 10 arriba y 10 abajo, entonces en cada uno de los lados ya no caben los otros 20, a lo más caben 8 y 8, o sea 16, lo que da un total de 36; a menos que se empalmen 2 en cada esquina.

El profesor citó a Salvador para una entrevista posterior; mediante preguntas e instrucciones, logró que recapacitara sobre la forma de los vidrios negros. En un momento dado de la entrevista, el profesor propuso que supusiera que los vidrios son cuadrados y que colocara los de las esquinas, "¿cuántos te faltan por colocar?", Salvador respondió:

> Oh sí, si son cuadrados, quedan exactamente en la esquina, su ancho y largo son iguales, y donde termina el primero o inicia el último coincide con la deli-

> mitación de los vidrios del interior; [...] si coloco cuatro en las esquinas me quedan por acomodar 36, nueve en cada lado.

Este episodio de la entrevista concluyó con la instrucción del profesor, "ahora repite el dibujo sin que los vidrios sean cuadrados".

Discusión de resultados

Existe evidencia de que los estudiantes, al trabajar con los problemas o tareas, inicialmente exhiben recursos y estrategias limitadas en la búsqueda de soluciones o respuestas concretas (muchas veces cuantitativas); sin embargo, cuando se les demanda presentar explicaciones y justificaciones, ellos mismos se dan cuenta de las limitaciones de sus primeros acercamientos. Además, la participación en equipos y las presentaciones ante todo el grupo son escenarios donde tienen oportunidad de conocer y contrastar otros acercamientos a los problemas; como consecuencia, esto les ayuda a refinar y robustecer sus propios acercamientos, así como a ampliar su repertorio de métodos de solución.

La forma de trabajo en pequeños grupos plantea retos y dificultades. Por un lado, la importancia de esta modalidad, con tareas atractivas, radica en la posibilidad de que los estudiantes construyan o utilicen sus conocimientos en un ambiente que hace viable el aprendizaje, donde la autoridad reside en una pequeña comunidad de "iguales" y donde las negociaciones ocurren de manera natural cambiando puntos de vista y convenciendo, desde los aspectos más simples de la tarea a otros más elaborados. Por otro lado, el funcionar como una comunidad rompe los esquemas a los que estamos habituados por la tradición escolar, donde regularmente se aplica el principio de autoridad por parte del profesor y los estudiantes adoptan un papel receptivo; es decir, no hay negociación de significados y hay resistencia a reconocer las posibles contribuciones de los integrantes de cada equipo, sobre todo cuando alguno de ellos no goza de un cierto "estatus" en el grupo.

Las presentaciones de los equipos en la clase completa sirvieron de plataforma para discutir aspectos relacionados con: *a)* el entendimiento del problema: para la mayoría de los estudiantes quedó claro qué es lo que se pregunta y cuáles son los datos; *b)* el empleo de distintas representaciones: ellos representaron los elementos del problema mediante puntos, segmentos, rectas, arcos, dibujos, usando letras para denotarlos e identificarlos;

c) las relaciones matemáticas: regularmente, los estudiantes identificaron las nociones fundamentales involucradas en las tareas y les asignaron un referente importante (a veces de manera imprecisa) en la solución de la misma: distancia, proporcionalidad, mediatriz, circunferencia, semejanza, variación lineal y no lineal; *d)* el análisis de relaciones particulares: los alumnos identificaron equidistancias, variación lineal, proporcionalidad; *e)* la resolución del problema: proporcionaron argumentos para sustentar sus procesos de solución, y la interacción generada entre ellos y el profesor los llevó a respaldar sus respuestas; *f)* verificación de la solución: los alumnos hicieron comprobaciones y expresaron que los resultados coincidían con sus experiencias; y *g)* extensiones del problema: en Relámpagos (pregunta 4b) y en Carros de supermercado (el asunto de la escala) los estudiantes argumentaron respuestas que iban más allá de lo que se cuestionaba.

Durante la ejecución de cada una de las tareas encontramos que las ideas fundamentales del trabajo de los estudiantes emergieron del uso de distintas formas de representación, ya sea verbal, gráfica o algebraica. En este contexto, los problemas resultan relevantes para que el estudiante exhiba sus recursos, estrategias y formas de pensar sobre el problema. Hay evidencia de que en sus primeros acercamientos, cuando trabajaron en pequeños grupos, exhibieron conocimientos fragmentados, incorrectos o ideas incompletas. Sin embargo, cuando tuvieron oportunidad de discutir y explorar sus ideas con otros estudiantes refinaron sus acercamientos iniciales para proponer maneras más "robustas y sofisticadas" de resolver los problemas; ello implica consecuencias para la instrucción tradicional (Doerr y English, 2003).

Fue notable que en el trabajo en pequeños grupos o durante las presentaciones varios estudiantes cambiaran las ideas iniciales que tenían respecto de los elementos de los problemas o de las demandas esenciales de cada una de las tareas; esto se debe, desde luego, a que se está desarrollando un proceso de enseñanza y refleja avances en el entendimiento de los problemas; es decir, tuvieron sus efectos las cualidades de las tareas y la forma de instrucción, donde el profesor es un promotor que orienta y conduce el proceso. La estructura de la instrucción donde los estudiantes tenían oportunidad de presentar y discutir sus ideas y donde el maestro monitoreaba y orientaba el desarrollo de las presentaciones y discusiones entre los alumnos, resultó clave durante las sesiones.

En este contexto, la manera en que trabajaron los estudiantes en el aula y el sentido de los argumentos derivados de esa interacción se ubican en un plano completamente distinto del tradicional. Por un lado, los argumentos de validación de un resultado pueden provenir de uno o varios estudiantes en el momento preciso en que se exponen, ya sea durante el trabajo en pequeños grupos o en las presentaciones por equipo y discusión colectiva, tal y como ocurrió en varios asuntos que resultaron inicialmente problemáticos en algunas de las tareas. Por otro lado, esta dinámica permite aproximarse a la posibilidad de que los estudiantes construyan su conocimiento, en la medida en que su entendimiento evoluciona a través de ciclos (Lesh *et al.*, 2000) que se manifiestan por un manejo más efectivo de los recursos matemáticos y de la aplicación de estrategias heurísticas y de reflexión (Polya, 1945; Schoenfeld, 1985). Existe evidencia de que cuando los estudiantes participan en las distintas fases de la resolución de los problemas, eventualmente reconocen la necesidad de contrastar y refinar sus ideas continuamente. Además, valoran la importancia de pensar siempre en formas distintas de resolver un problema.

a) En Relámpagos, cuando Andrés (equipo H) se apropió de la argumentación de Roberto (equipo H), determinación del punto de intersección de las mediatrices de los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ en la pregunta 3c, y que utilizó para convencer a los demás.

b) En Carros de supermercado, cuando Paola (equipo B) aceptó los argumentos de los equipos H y E, en el sentido de que la fórmula obtenida para el espacio ocupado por n carros puede ser escrita con o sin escala; al final Paola argumentó "lo que se debe hacer es indicar esto a un lado de la fórmula".

c) En Sombras, cuando los integrantes del equipo H reconocieron que estaba mal su relación porque no consideraron completo el triángulo del poste; o cuando Rubí (equipo D) clarificó las ideas de sus compañeros durante su presentación y que después Joel, su compañero de equipo, exigió pasar al pizarrón para exponer la solución a la pregunta 3.

d) En Evaluar un dibujo, cuando el equipo F utilizó un dibujo para facilitar la solución del primer problema, o cuando Victoria (E) respaldó las ideas vertidas por el equipo B y las reforzó con la noción de proporcionalidad.

Así, las tareas y la forma de instrucción se convirtieron en una estrategia que transformó a la tarea misma en una herramienta de aprendizaje. Resultó útil para que estudiantes con distinto nivel de desempeño escolar avanzaran en el entendimiento y la comprensión matemática de los problemas, como Victoria (equipo E), Rubí (D), Andrés (H), Paola (B), alumnos destacados del grupo; o Joel y Julio (D), Alonso (A), Salvador (C) y Erick (F), estudiantes con regular desempeño escolar que superar algunas dificultades de aprendizaje. Erick mostró notables avances en casi todas las tareas. Las expectativas trazadas fueron alcanzadas, con ciertas reservas en Evaluar un dibujo.

La operación de las tareas resultó benéfica para que los estudiantes mostraran buena disposición hacia el entendimiento y solución de los problemas. Los equipos E, H y D se mostraron como los más analíticos y comunicativos, regularmente estuvieron haciendo aportaciones, aclaraciones y correcciones; quizá la forma de trabajo les atrajo y facilitó expresar sus ideas, incluso Julio y Joel (equipo D), los más inquietos en el grupo, participaron en la dinámica, escuchando y proponiendo. También estuvieron interesados los equipos B, C y F, pero tuvieron más reservas en comunicar sus ideas. Sin embargo, al parecer la composición del equipo F favoreció a Erick (estudiante de regular desempeño), pero no a Core (estudiante sobresaliente) quien se vio frenada en su progreso. El avance de los equipos A y G fue más limitado.

Es prudente decir que también hubo dificultades como: mantener el interés de los integrantes de los equipos; deficiencias en el manejo de lenguaje por parte de los estudiantes, dificultad intrínseca en el proceso de aprendizaje; y la forma de trabajo que involucra varios escenarios de aprendizaje puede inhibir la participación de los estudiantes, pues rompe con las creencias que tienen sobre lo que es la matemática y los papeles que deben jugar ellos y el profesor.

Reflexiones finales

El estudio que aquí presentamos, se sustenta en la visión del NCTM (2000) de promover el aprendizaje de las matemáticas mediante el uso de tareas diseñadas bajo ciertos principios: que sean atractivas y fáciles de entender para los estudiantes; que contengan contenidos fundamentales del currículo; y que su diseño permita recuperar los procesos de pensamiento utilizados por los estudiantes en sus intentos de solución. Además, el NCTM también resalta la importancia de considerar en la instrucción diferentes escenarios de aprendizaje, donde los estudiantes tengan la oportunidad de combinar el trabajo colectivo, ya sea en pequeños grupos o en la clase completa, con el individual, donde aprendan a exponer y defender públicamente las ideas que utilizaron en sus intentos por resolver los problemas; así como a comunicar sus resultados.

Para lograr lo anterior, se requiere la participación del profesor en momentos precisos que contribuyan a destrabar posibles controversias, de manera que se avance en el aprendizaje; sus intervenciones van en el sentido de alentar cambios en la forma de pensar de los estudiantes sobre determinados aspectos de los problemas, sin que ello quiera decir eliminar el reto principal de la tarea. Esto, definitivamente, rompe con el punto de vista tradicional de la estructura rígida de las asignaturas. En este caso particular se tuvo la ventaja de que la Universidad Michoacana propone en su plan de estudios del bachillerato, una materia en la que es posible incorporar una propuesta de programa del curso *ad hoc* para realizar investigaciones en educación matemática.

Es interesante notar que en la misma sesión, cuando los estudiantes trabajaron en equipos, fue posible identificar contribuciones que muestran distintas cualidades matemáticas y, cuando hicieron sus presentaciones, compartieron y criticaron las fortalezas y limitaciones de los métodos de solución de los demás. El desarrollo del aprendizaje se entiende como una evolución en sus ciclos de entendimiento (episodios de comprensión), que se traduce en un mejor manejo de las estrategias y recursos para resolver problemas; lo cual se logra cuando se realizan prácticas que son consistentes con el quehacer de las matemáticas: tomar casos particulares; descubrir patrones y relaciones; plantear conjeturas; justificar resultados; y hacer generalizaciones.

Las tareas seleccionadas y la forma de trabajo utilizada en su aplicación, parecen favorecer el aprendizaje:

1) En la mayoría de los casos, las tareas mantuvieron la atención y participación de los estudiantes durante el trabajo en pequeños grupos, las presentaciones por equipo, la discusión colectiva y en el trabajo individual, siendo factible llevar a cabo el análisis de los procesos utilizados por ellos en sus intentos de solución. Esto significa que las tareas resultaron atractivas, motivaron su participación y recuperaron sus procesos de pensamiento.

2) La forma de instrucción permitió que en cada una de las tareas los estudiantes expusieran y defendieran sus ideas, utilizando diversos argumentos para ello; también propició que algunos modificaran sus formas de pensar sobre todos o algunos de los aspectos de la tarea. Asimismo, se pudo observar la facilidad con la que algunos cambian sus puntos de vista.
3) Se generó un ambiente en el aula que motivó el aprendizaje en estudiantes que habían mostrado distintos niveles de desempeño escolar (quizás a diferente grado). Esto se manifestó por el hecho de que la mayoría realizó intentos y se esforzaron por hacer afirmaciones con sentido por atacar los problemas planteados.
4) En todos los casos hay respuestas más completas en el reporte del trabajo individual que el correspondiente a los equipos; desde luego, esto no significa que todos los estudiantes hayan respondido correctamente en el reporte individual.
5) Todo ello ilustra la evolución en los niveles de entendimiento de los estudiantes acerca de cada una de las tareas, en asuntos que al principio, en el trabajo por equipos, les resultaban problemáticos, lo cual se refleja en el manejo de recursos matemáticos y en el uso de estrategias propias del pensamiento matemático para resolver problemas.

Implicaciones didácticas

La utilización de problemas o tareas que gocen de algunas cualidades para promover un aprendizaje significativo conlleva algunas implicaciones de carácter didáctico:

1) Cambia la forma de concebir el currículum y la manera en que serán cubiertos los contenidos matemáticos.
2) La instrucción también cambia, el profesor y los estudiantes toman un papel distinto del tradicional.
3) Los argumentos de validación (autoridad) pueden provenir de la comunidad que representa la clase.
4) Respecto del aprendizaje, los estudiantes tienen la posibilidad de construir su conocimiento en la medida en que su entendimiento evoluciona a través de ciclos, que se manifiesta por un manejo más efectivo de los recursos matemáticos y de la aplicación de estrategias heurísticas y de reflexión.

Finalmente, la incorporación de la computadora con un *software* educativo abre nuevas formas de abordar los problemas, pero aún falta documentar sus resultados en el aprendizaje; por ejemplo, la tarea denominada Sombras puede tener un acercamiento dinámico mediante el uso del *software* Cabri-Géometrè (Santos y Sepúlveda, 2003).

Referencias bibliográficas

Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum. High School Assessment Package 1 & 2 (1999, 2000). White Plains, Nueva York: Dale Seymours Publications.

Doerr, H. M. y English, L. D. (2003). "A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data", en E. A. Silver (ed.) *Journal for Research in Mathematics Education* 2 (Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics), pp 110-136.

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). "Learning and eaching with understanding", en D. A. Grouwns (ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning*, Nueva York: Macmillan Publishing Co, pp. 65-97.

Lesh, R. *et al*. (2000). "Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers", en A.Kelly y Richard Lesh (eds.) *Handbook of research desing in mathematics education,* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp. 591-645.

Lesh, R. y Kelly, A. (2000). "Multitiered teaching experiments", en A.Kelly y Richard Lesh (eds.) *Handbook of Research Desing in Mathematics Education*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp. 197-230.

Lesh, R. y Doerr, H., M. (2003). "Foundation of a models and modeling perspective on mathematics teaching learning, and problem solving", en R. Lesh y H. M. Doerr (eds.), *Beyond constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp. 3-33.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*, Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Polya, G. (1945). *How to solve it,* Princeton: Princeton University Press.

Postman, N. y Weingartner (1969). Teaching as a subversive activity, Nueva York: A Delta Book.

Santos, M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*, 2ª ed., México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Santos, L. M. y Sepúlveda, A. (2003). "Hacia la construcción de un ambiente de instrucción basado en resolución de problemas", en M. M., Socas; M., Camacho y A., Morales (eds.) *Formación del profesorado e investigación en educación matemática V*, col. Didáctica de las Matemáticas, Departamento de Análisis Matemático: La Laguna, España, pp. 323-341.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). "Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics", en D. A. Grows (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Nueva York: Macmillan, pp. 334-370.

Schoenfeld, A. H. (1994). "Reflection on doing and teaching mathematics", en A.H. Schoenfeld (ed.), *Mathematical thinking and problem solving*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 53-70.

Schoenfeld, A. H. (1998). "Reflections on a course in mathematical problem solving", *Research in Collegiate Mathematics Education III*, pp. 81-113.

Sepúlveda, A., Santos, M. (2004). "Developing understanding in mathematical problem-solving. A study with high school students", en D. E McDougall. y J. A. Ross (eds.) *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Toronto: OISE/UT, pp. 499-506.

Trabajo recibido: 3 de enero de 2006
Dictamen: 3 de abril de 2006
Segunda versión: 17 de abril de 2006
Aceptado: 15 de mayo de 2006