

## Limites de las dimensiones extras considerando las leyes termodinámicas de la radiación de cuerpo negro

O. Pedraza, A. Criollo, L.A. López and V.E. Ceron

Área Académica de Matemáticas y Física,

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo,

Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, 42184, Pachuca, México.

e-mail: [omarp@uaeh.edu.mx](mailto:omarp@uaeh.edu.mx); [arturoc@uaeh.edu.mx](mailto:arturoc@uaeh.edu.mx); [lalopez@uaeh.edu.mx](mailto:lalopez@uaeh.edu.mx); [vceron@uaeh.edu.mx](mailto:vceron@uaeh.edu.mx)

Received 7 February 2018; accepted 13 February 2018

En este trabajo se analiza el problema de radiación de cuerpo negro en un escenario efectivo en cuatro dimensiones proveniente de un campo de norma libre en cinco dimensiones, donde la quinta dimensión está compactificada a un círculo. El punto de partida es la descomposición de Kaluza-Klein de la acción del campo de norma en 5 dimensiones en dos sectores en cuatro dimensiones: el primer sector contiene un campo de norma sin masa, mientras el segundo sector produce un conjunto infinito de campos de norma con masa. Ambos sectores contribuyen a la ley de Stefan-Boltzmann. Contrastando los datos experimentales con los obtenidos teóricamente se obtiene una cota para el parámetro asociado al escenario.

*Descriptores:* Dimensiones extras; cuerpo negro.

In this paper we will analyze the problem of blackbody radiation in an effective 4D scenario that arises from the 5D free gauge field, where the fifth dimension is compactified to a circle. The starting point is the Kaluza-Klein decomposition of the 5D gauge field action into two sectors in four dimensions: the first sector contains a massless gauge field, while the second sector yields an infinite set of massive gauge fields. Both sectors contribute to Stefan-Boltzmann's law. By contrasting the experimental data with those obtained theoretically, a bound is obtained for the parameter associated with the scenario.

*Keywords:* Extra dimensions; blackbody.

PACS: 05.70.Ce; 51.30.+i; 04.50.+h; 04.50.Gh

### 1. Introducción

El estudio del problema de la radiación electromagnética emitida por un cuerpo negro, jugó un papel importante a finales del siglo XIX, debido a que el trabajo de Planck sobre la radiación de cuerpo negro en 1901 condujo a los fundamentos de la mecánica cuántica. En este trabajo, Planck postuló que el intercambio de energía entre los osciladores de la cavidad y el campo electromagnético en equilibrio térmico está cuantizado. Bajo esta suposición, Planck fue capaz de derivar la distribución de frecuencias de la radiación de cuerpo negro y además fue capaz de deducir la ley de Stefan-Boltzmann, la cual establece que la potencia por unidad de área de la radiación de cuerpo negro crece con la cuarta potencia de la temperatura. Hoy en día es un tema que resulta interesante debido al descubrimiento de la radiación cósmica de fondo (debido a que es la huella más antigua sobre el origen del universo), la cual puede ser citada como un ejemplo de la distribución de Planck de cuerpo negro.

Por otra parte, el aspecto termodinámico de la radiación electromagnética emitida por un cuerpo negro es un tema que se estudia y discute en los cursos de termodinámica o mecánica estadística.

Dada la importancia del tema de radiación de cuerpo negro en el contexto del proceso de aprendizaje-enseñanza, en este trabajo se aborda un ejemplo del problema de radiación de cuerpo negro en un escenario de dimensiones extras. El cual puede servir como material de apoyo en algún curso de

termodinámica o física estadística. Además, sirve como punto de partida o motivación para que los alumnos que así lo deseen se introduzcan a teorías de dimensiones extras.

Es bien sabido que postular la existencia de posibles dimensiones espaciales extras, han sido una propuesta interesante en física teórica que intentan resolver problemas abiertos en física de partículas y en cosmología, como el problema de jerarquía [5,8], materia oscura y energía oscura entre otros.

Particularmente, en este trabajo se considera un escenario de cinco dimensiones, en donde la quinta coordenada posee una topología  $S^1$ . Aquí se obtiene una teoría efectiva en cuatro dimensiones proveniente de la acción de campo electromagnético en 5 dimensiones, a través de un proceso de compactificación. Cabe mencionar que el problema de radiación de cuerpo negro ha sido considerado en escenarios de dimensiones extras, compactas [13] y no compactas [1]. En ambos casos el problema de radiación de cuerpo negro es tratado como un gas de fotones sin masa a temperatura finita. En el caso de dimensiones compactas, la potencia radiada toma la forma  $R(T) = \sigma_B T^4 + \sigma_D T^D$  con  $D - 4$  dimensiones compactas, donde  $\sigma_B$  es la constante de Stefan-Boltzmann y  $\sigma_D$  es una constante, mientras que si las dimensiones extras son no compactas la potencia radiada se expresa como  $R(T) = cT^D$ , con  $c$  una constante.

La estructura de este artículo, se organiza de la siguiente forma: en la Sec. 2 se muestra las características básicas de la geometría del espacio tiempo de cinco dimensiones y en-

tonces se usa la compactificación de Kaluza-Klein para descomponer la acción de Maxwell en 5D en un modo cero de Kaluza-Klein y una torre masiva de Kaluza-Klein, los cuales son tratados como un campo de norma sin masa en 4D y un conjunto de campos de norma masivos también en 4D, respectivamente.

En la Sec. 3 se presenta el análisis de la radiación de cuerpo negro para un campo de norma con y sin masa, específicamente se calcula la ley efectiva de Stefan-Boltzmann para un escenario de cinco dimensiones. Para el sector masivo, el análisis emplea el resultado de [16], en la radiación de cuerpo negro para fotones masivos. Al final de la sección se presenta un análisis gráfico y numérico de los resultados obtenidos. Finalmente, en la Sec. 4 se presenta la discusión de los resultados obtenidos.

## 2. Descomposición de Kaluza-Klein de la acción de Maxwell en 5D

La métrica del espacio tiempo en cinco dimensiones es dado por

$$ds^2 = G_{MN} dx^M dx^N = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + R^2 d\phi^2. \quad (1)$$

Los índices  $M, N$  corren desde 0 hasta 4, los cuales representan un espacio tiempo con componentes  $(x^\mu, x^4)$ . Aquí los índices griegos  $\mu, \nu$  corren de 0 a 3 y la última coordenada espacial es compactificada a un círculo de radio  $R$ , con  $\phi$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

El punto de partida es la acción de Maxwell en cinco dimensiones

$$S = \int d^4x \int dx^4 \left[ -\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} \right], \quad (2)$$

donde el tensor de campo electromagnético en 5 dimensiones se define de la siguiente forma

$$F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M. \quad (3)$$

Pasando a una notación cuatro-dimensional es fácil ver que la Ec. (2) se puede escribir como

$$S = \int d^4x \int dx^4 \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{\mu 4} F^{\mu 4} \right]. \quad (4)$$

Integrando por partes la Ec. (4) en la coordenada  $x^4$ , se tiene

$$S = \int d^4x \int dx^4 \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_4)^2 + \frac{1}{2} (\partial_4 A_\mu)^2 - \partial_4 (A_\mu \partial^\mu A^4) + A_\mu \partial^\mu \partial_4 A^4 \right], \quad (5)$$

aquí el cuarto término de la expresión anterior no contribuye por ser un término de frontera.

Usando la libertad de norma que se tiene, se elige para este caso la norma semiaxial, la cual está inspirada en la norma axial (ver [6] para más detalle). En la norma semiaxial la

componente  $A_4$  del campo de norma no depende de  $x^4$ , es decir,  $A_4(x, \phi) = A_4^{(0)}(x)$ .

Usando la norma semiaxial, la acción (5) puede ser reescrita como

$$S = \int d^4x \int dx^4 \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_4^{(0)})^2 + \frac{1}{2} (\partial_4 A_\mu)^2 \right]. \quad (6)$$

Dado que la dimensión extra  $x^4$  esta compactificada en un círculo de radio  $R$ , entonces podemos considerar un desarrollo de Fourier en esta coordenada para el campo de norma de la siguiente forma

$$A_M(x^\mu, \phi) = A_M^{(0)}(x^\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_M^{(n)}(x^\mu, \phi) e^{in\phi} + A_M^{(n)*}(x^\mu, \phi) e^{-in\phi} \right],$$

con  $A_4^{(n)} = A_4^{(n)*} = 0$ . (7)

Sustituyendo la Ec. (7) en la acción (6) e integrando por partes respecto de la coordenada extra, se tiene

$$S = 2\pi R \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(0)} F^{\mu\nu(0)} + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_4^{(0)})^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{2} |\partial_\mu A_\nu^{(n)} - \partial_\nu A_\mu^{(n)}|^2 + \frac{n^2}{R^2} |A_\mu^{(n)}|^2 \right) \right]. \quad (8)$$

Se puede ver entonces que la acción 5D de Maxwell se descompone en un sector 4D sin masa, que contiene la acción 4D de Maxwell más un campo escalar  $A_4^{(0)}$  y en un sector 4D masivo definido por un conjunto infinito de campos de norma 4D  $A_\mu^{(n)}$  y  $A_\mu^{(n)*}$  de masa  $m_n = n/R$ , con  $R$  el radio de compactificación de la dimensión compacta y  $n$  un entero positivo. Esta reescritura de la Acción 5D se le llama la descomposición de Kaluza-Klein.

## 3. Ley de Estefan-Boltzmann modificada

En esta sección se estudia el problema de radiación de cuerpo negro, en la teoría electromagnética efectiva de cuatro dimensiones considerada en la sección anterior. Como se mencionó anteriormente, este escenario efectivo cuatro dimensional contiene dos sectores: un sector sin masa y un sector masivo. El sector sin masa contiene un campo de norma sin masa  $A_\mu^{(0)}$  y un campo escalar no masivo  $A_4^{(0)}$ , aquí campo de norma posee dos modos de libertad transversales más un grado de libertad debido al campo escalar, por lo que en total se tiene tres grados de libertad. Para el sector masivo, el campo de norma  $A_\mu^{(n)}$  con masa  $m^2 = n^2/R^2$  posee dos grados de libertad transversales y un grado de libertad longitudinal.

Para un campo de norma masivo, Bass y Schrödinger [3] argumentaron que la interacción del modo longitudinal del

fotón con la materia sería tan débil que prácticamente son irrelevantes para el equilibrio térmico de la radiación en la cavidad. La razón es la tremenda contracción de Lorentz de los campos longitudinales cuando pasan del marco de referencia del fotón masivo al marco de referencia de la cavidad.

Para el estudio de la radiación de cuerpo negro, se considera un ensamble de fotones con masa  $m$  en una cavidad de volumen  $V$  con paredes reflectantes ideales a una temperatura  $T$ , este sistema se vincula con el exterior a través de un pequeño orificio. Por tanto las ondas electromagnéticas en el interior pueden ser tratadas como ondas estacionarias. Por simplicidad se considera que la cavidad sea una caja cúbica de lados  $L$  con el origen del sistema coordenado en uno de los vértices de la cavidad.

Los dos modos transversales de  $A_\mu^{(n)}$  son modos discretos que satisfacen las mismas condiciones de frontera que  $A_\mu^{(0)}$  (las componentes del campo eléctrico deben anularse en las paredes de la cavidad). Así las componentes del vector de onda son

$$k_i = \frac{\pi n_i}{L}, \quad (9)$$

donde las  $n_i$  son enteros y representan los posibles modos de vibración. Luego, el número de modos con  $k$  en el intervalo  $[k, k + dk]$  es dado por

$$N(k, m)dk = \frac{V}{\pi^2} k \sqrt{k^2 - m^2} dk, \quad m^2 = \frac{n^2}{R^2}, \quad (10)$$

la ecuación anterior considera las dos direcciones de polarización y aquí  $m$  es la masa efectiva de los fotones. Ahora, expresando la ecuación de arriba en el espacio  $\nu$ , podemos escribir entonces

$$N(k, m)d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 \sqrt{1 - \frac{c^2 m^2}{4\pi^2 \nu^2}} d\nu. \quad (11)$$

Por tanto la densidad de energía es

$$U(T, m) = \frac{8\pi h}{c^3} \int_u^\infty \frac{\nu^3 \sqrt{1 - \frac{u^2}{\nu^2}}}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu, \quad u = \frac{cm}{2\pi}. \quad (12)$$

Como es bien sabido en mecánica cuántica, la relación entre la energía emitida por un cuerpo negro por unidad de área por unidad de tiempo  $R(T, m)$  y la densidad de energía  $U(T)$  es solo un factor geométrico, así tenemos que

$$R(T, m) = \frac{c}{4} U(T, m) = \frac{2\pi h}{c^2} \int_u^\infty \frac{\nu^3 \sqrt{1 - \frac{u^2}{\nu^2}}}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu. \quad (13)$$

Para poder evaluar esta integral, se emplea siguiente expresión

$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{q=1}^\infty e^{-qx}, \quad (14)$$

usando esta identidad, la Ec. (13) toma la forma

$$R(T, m) = \sum_{q=1}^\infty \frac{2\pi h}{c^2} \int_u^\infty \nu^2 e^{-h\nu q/k_B T} \sqrt{\nu^2 - u^2} d\nu. \quad (15)$$

El siguiente paso en el cálculo, es notar que la integral puede ser reescrita en términos de la derivada de la variable  $\beta = 1/k_B T$ , así se tiene

$$R(T, m) = - \sum_{q=1}^\infty \frac{2\pi}{c^2 q} \frac{d}{d\beta} \int_u^\infty \nu e^{-h\nu q\beta} \sqrt{\nu^2 - u^2} d\nu. \quad (16)$$

Esta integral se puede realizar usando la siguiente identidad

$$\begin{aligned} & \int_u^\infty x (x^2 - u^2)^{\eta-1} e^{-\mu x} dx \\ &= \frac{2^{\eta-\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}-\eta} u^{\eta+\frac{1}{2}} \Gamma(\eta)}{\sqrt{\pi}} K_{\eta+\frac{1}{2}}(u\mu), \end{aligned} \quad (17)$$

aquí  $K_\nu(z)$  es la función de Bessel modificada de orden  $\nu$  y  $\Gamma(z)$  es la función Gamma. Por tanto (16) toma la siguiente forma

$$R(T, m) = - \sum_{q=1}^\infty \frac{m^2}{2\pi h q^2} \frac{d}{d\beta} \left[ \frac{1}{\beta} K_2 \left( \frac{\beta q h c m}{2\pi} \right) \right]. \quad (18)$$

Empleando la identidad  $z \partial_z K_\nu(z) = -z K_{\nu-1}(z) - \nu K_\nu(z)$ , se tiene finalmente

$$\begin{aligned} R(T, m) &= \sum_{q=1}^\infty \frac{m^2}{2\pi} \left[ \frac{3k_B^2 T^2}{h q^2} K_2 \left( \frac{q h c m}{2\pi k_B T} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_B T c m}{2\pi q} K_1 \left( \frac{q h c m}{2\pi k_B T} \right) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

considerando que  $m = n/R$ , entonces (19) se puede escribir como

$$\begin{aligned} R(T, R) &= \sum_{q=1}^\infty \frac{n^2}{2\pi R^2} \left[ \frac{3k_B^2 T^2}{h q^2} K_2 \left( \frac{q h c n}{2\pi k_B T R} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_B T c n}{2\pi q R} K_1 \left( \frac{q h c n}{2\pi k_B T R} \right) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Esta expresión es la contribución del sector masivo de la teoría electromagnética efectiva al problema de radiación cuerpo negro.

Tomando el limite cuando  $m \rightarrow 0$  en (19), se tiene

$$\begin{aligned} R(T) &= \sigma_B T^4, \\ \sigma_B &= \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} = 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}. \end{aligned} \quad (21)$$

A este resultado se le conoce como la ley de Stefan-Boltzmann y  $\sigma_B$  como la constante de Stefan-Boltzmann. La Ec. (21) es la contribución del sector sin masa al problema de radiación de cuerpo negro.

Por lo tanto la ley de Stefan-Boltzmann en este escenario, deriva de las contribuciones de ambos sectores  $R(T)$  y  $R(T, R)$ , lo cual produce

$$R_T(T, R) = \sigma_B T^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{n^2}{2\pi R^2} \left[ \frac{3k_B^2 T^2}{h^2 q^2} K_2 \times \left( \frac{qhc n}{2\pi k_B T R} \right) + \frac{k_B T cn}{2\pi q R} K_1 \left( \frac{qhc n}{2\pi k_B T R} \right) \right]. \quad (22)$$

Esta expresión es la ley modificada de Stefan-Boltzmann, donde el primer término de esta expresión proviene de la contribución del modo cero, mientras que el segundo término viene de la torre de Kaluza-Klein.

Rescribiendo la expresión (22) se tiene

$$R_T(T, R) = \left\{ \sigma_B + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{n^2}{2\pi R^2} \left[ \frac{3k_B^2}{h^2 q^2 T^2} K_2 \times \left( \frac{qhc n}{2\pi k_B T R} \right) + \frac{k_B cn}{2\pi q R T^3} K_1 \left( \frac{qhc n}{2\pi k_B T R} \right) \right] \right\} T^4. \quad (23)$$

Ahora, definiendo a  $\sigma_M$  como el parámetro efectivo de Stefan-Boltzmann, la cual codifica los efectos de la dimensión extra compacta, se tiene

$$\sigma_M(T, R) = \sigma_B + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{n^2}{2\pi R^2} \left[ \frac{3k_B^2}{h^2 q^2 T^2} K_2 \times \left( \frac{qhc n}{2\pi k_B T R} \right) + \frac{k_B cn}{2\pi q R T^3} K_1 \left( \frac{qhc n}{2\pi k_B T R} \right) \right]. \quad (24)$$

Se puede ver directamente, que el parámetro efectivo de Stefan-Boltzmann en esta teoría efectiva de cuatro dimensiones no es contante como tal, debido a que tiene una dependencia en la temperatura y también del radio de compactificación  $R$ .

La Ec. (24) puede ser usada para fijar algún límite a posibles valores del parámetro libre asociado al escenario de dimensiones extras, es decir, el radio de compactificación de la quinta coordenada. El análisis consiste en comparar el parámetro efectivo de Stefan-Boltzmann con el valor experimental para la constante de Stefan-Boltzmann, el cual es  $\sigma_B = (5.670277968 \times 10^{-8} \pm 4 \times 10^{-13}) \text{ W/m}^2 \text{K}^4$  [11], sin embargo es necesario fijar el valor de la temperatura  $T$ . Para ello consideramos a la radiación cósmica de fondo, debido a que está muestra un espectro de cuerpo negro muy preciso. La temperatura de la radiación cósmica de fondo es de  $T = 2.725 \text{ K}$ .

De acuerdo a los datos experimentales y usando la Ec. (24) como una función del radio de compactificación se tiene una cota superior para  $R$  alrededor de  $47.7 \mu\text{m}$ , como se ve de la Fig. 1.

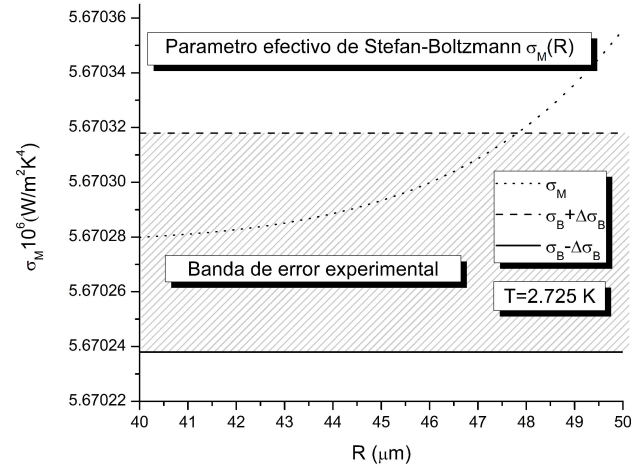


FIGURA 1. Comparación entre los datos experimentales para  $\sigma_B$  y el parámetro efectivo de Stefan-Boltzmann  $\sigma_M$ . La región sombreada corresponde a la banda de error experimental de  $\sigma_B$ .

#### 4. Conclusiones

En este trabajo se estudió el problema de radiación de cuerpo negro en un escenario de cinco dimensiones, en donde la quinta dimensión esta compactificada. Se analizó primero el campo de norma en cinco dimensiones y entonces se derivó el espectro de Kaluza-Klein del campo electromagnético en la teoría efectiva de cuatro dimensiones. Dicho espectro es discreto y en donde el modo cero ( $n = 0$ ) reproduce la física usual en cuatro dimensiones.

Desde el punto de vista de la teoría efectiva en cuatro dimensiones, el espectro de Kaluza-Klein se puede ver como una como una masa efectiva  $m^2 = n^2/R^2$  de un conjunto de campos de norma  $A_\mu^{(n)}$ . Este término de masa contribuye a la densidad de energía emitida por el cuerpo negro y por lo tanto, la ley de Stefan-Boltzmann es modificada en este escenario, específicamente, la ley modificada de Stefan-Boltzmann es función de la temperatura y además del radio de compactificación  $R$ . El efecto de la dimensión extra es incluido en los términos que contiene la función de Bessel.

Cuando se impone la condición de que el resultado teórico reproduzca las mediciones experimentales, dentro de la incertidumbre  $4 \times 10^{-13} \text{ W/m}^2 \text{K}^4$  a una temperatura de  $2.725 \text{ K}$ , se encuentra que  $R \leq 47.7 \mu\text{m}$ .

Cabe mencionar que a pesar de que la constante de Stefan-Boltzmann no es una de las mejores cantidades medidas en física, esta puede proveer un límite superior para  $R$ .

Para finalizar, esperamos que este ejemplo del problema de radiación de cuerpo negro pueda servir como material de apoyo en algunos cursos básicos de termodinámica o mecánica estadística.

1. H. Alnes, F. Ravndal, and I. K. Wehus, *J. Phys. A* **40** (2007) 14309.
2. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, *Phys. Lett. B* **429** (1998) 263-272.
3. L. Bass and E. Schrodinger, *Physical and Engineering Sciences*, **232** (1955) 1-6.
4. K. Becker, M. Becker, and J. Schwarz, *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction* (Cambridge University Press, 2006).
5. G. Burdman and A. G. Dias, *Journal of High Energy Physics* **2007** (2007) 041.
6. A. Edery and V. Marachevsky, *JHEP* **12** (2008) 035.
7. M. Frank, N. Saad, and I. Turan, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 055014.
8. Z.-Q. Guo and B.-Q. Ma, *Journal of High Energy Physics*, **2009** (2009) 091.
9. T. Kaluza, *Berlin Math. Phys.*, **1921** (1921) 966-972.
10. O. Klein, *Z. Phys.*, **37** (1926) 895-906. [*Surveys High Energ. Phys.* **5** (1986) 241].
11. P. J. Mohr and B. N. Taylor. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2002. *Rev. Mod. Phys.* **77** (2005) 1-107.
12. K. Poppenhaeager, S. Hossenfelder, S. Hofmann, and M. Bleicher, *Phys. Lett. B* **582** (2004) 1-5.
13. R. Ramos and H. Boschi-Filho, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **393** (2014) 261-267.
14. L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370-3373.
15. L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.*, **83** (1999) 4690-4693,.