

## Modos electromagnéticos en esferas metálicas; plasmones en micro y nanopartículas

R. Rodríguez-Mijangos y R. García-Llamas

Departamento de Investigación en Física, Universidad de Sonora  
Apartado Postal 5-88, Hermosillo, Sonora, México.  
e-mail: mijangos@cifus.uson.mx, ragal@cifus.uson.mx

Received 26 October 2016; accepted 11 January 2018

Estudiamos teóricamente la excitación de plasmones de superficie en esferas metálicas. Se supone que la esfera metálica es de tipo Drude. La excitación de modos, para esferas metálicas, de igual forma que las dieléctricas, es observada como picos en la sección eficaz de esparcimiento total. Bajo condiciones de excitación, el modo se comporta como una onda que se propaga a lo largo de la circunferencia pero en la esfera, su intensidad es prominentemente confinada a la superficie. El número de modos observados depende del radio de la esfera.

*Descriptores:* Superficies; esferas metálicas; plasmones; propiedades ópticas.

The excitation of surface plasmons in metallic spheres is studied theoretically. The metallic sphere is supposed to be of the Drude type. The modes excitations for metallic spheres, like the dielectric spheres are observed as peaks in the total scattering cross section. Under excitation condition, the modes are behaved as waves that propagates along the circumference, but in the sphere, its intensity is highly confined to the surface. The number of modes observed depends on the radius of the sphere.

*Keywords:* Surfaces; metallic spheres; plasmons; optical properties.

PACS: 78.67 Bf; 73.20 Mf; 63.2.Pw; 78.67.-n; 42.25.Bs

### 1. Introducción

La nanoplasmónica se define como el estudio de las excitaciones en superficies metálicas localizadas en nanoestructuras. Es un campo de investigación que ha tomado fuerza desde la primera década del presente siglo [1], es de interés su existencia en coloides cuya componente sólida posee simetría esférica. El estudio de las propiedades ópticas de una partícula de forma esférica y estructuras esféricas más complejas comienza en el principio del siglo XX. En esta época, G. Mie [2] estudia la difracción de una onda plana electromagnética monocromática por una esfera y encuentra una solución exacta a este problema, también aplica la solución al estudio óptico de coloides formados por partículas metálicas. Al mismo tiempo P. Debye resuelve un problema semejante e innova introduciendo los llamados potenciales de Debye [3]. Poco antes J.C. Maxwell-Garnett [4] explicó los colores de coloides metálicos.

Recientemente publicamos un trabajo asociado a la difracción de luz por esferas dieléctricas [5] y excitaciones producidas en estas. La teoría general de la difracción de luz en esferas es válida tanto para esferas dieléctricas como metálicas, por lo cual la teoría básica que aparece en ese trabajo será utilizada aquí, referenciándonos a las ecuaciones que allí se presentan. También gran número de referencias bibliográficas que allí se muestran son de nuestro interés. Dos magníficos libros en el tema de agregados metálicos son el de Kreibig and Vollmer [6] en 1995 y otro editado por Mishchenko *et al.* [7] en el 2000. Un amplio resumen de resultados para partículas metálicas se puede encontrar en el trabajo de Mulvaney [8] y en el crecimiento de nano-partículas de plata en los trabajos de Slistan-Grijalva *et al.*, [9-10]. En 2007

Derkachova y Kolwas [11] obtienen las frecuencias complejas de plasmones de Superficie (SP) en función del radio de la esfera metálica. Ancey *et al.*, en 2009 calculan la sección eficaz de esparcimiento y de absorción respecto a la energía de excitación [12]. Es conocido que las frecuencias asociadas a los modos SP dependen del tamaño, la forma, y composición de la partícula, así como del medio en que se encuentra. Además, no es necesario usar algún medio de acoplamiento para excitarlos [13].

Para el desarrollo de este estudio se utilizan los resultados del trabajo [5] que introducen los armónicos esféricos para resolver la ecuación de la onda esférica escalar con los cuales se resuelven las ecuaciones de Maxwell mediante un desarrollo multipolar donde se usan los vectores armónicos esféricos, comenzando con el desarrollo de una onda plana, para posteriormente estudiar el problema del esparcimiento de la esfera. Se utiliza la notación del libro Classical Electrodynamics por D. Jackson [14], En el capítulo 10 trata de forma breve el problema de Mie. Los vectores armónicos esféricos son la parte medular de la expansión multipolar de un campo electromagnético.

En la siguiente sección se presentan los resultados numéricos, criterio de convergencia, el campo cercano, la sección de extinción de una esfera metálica. En detalle se estudia el caso de esferas metálicas y el plasmón de superficie. En la última sección vertemos nuestras conclusiones.

### 2. Difracción de Ondas Electromagnéticas por Esferas Metálicas

Se dan las ecuaciones de partida para calcular el campo electromagnético de una onda plana difractada por una esfera,

metálica de radio  $a$ , suspendida dentro de un medio no absorbente. Para resolver las ecuaciones de Maxwell se utiliza un desarrollo multipolar para representar a los campos, y se divide el espacio en dos regiones, externa (medio 1) e interna (medio2) de la esfera. Los medios se consideran lineales, isotrópicos y homogéneos. La esfera puede ser dispersiva y en este trabajo la supondremos tipo Drude.

Si se asume que la dependencia temporal de los campos es armónica, es decir,

$$\vec{H}'(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}) \exp(-i\omega t)$$

y

$$\vec{E}'(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \exp(-i\omega t).$$

La representación multipolar de los campos está dada por una serie infinita de los denominados esféricos armónicos vectoriales,

$$\begin{aligned} \vec{H} = \sum_{l,m}^{\infty} & \left\{ b_{lm} f_l(qr) \vec{X}_{lm}(\theta, \varphi) - \frac{ia_{lm}}{qr} \frac{d[r f_l(qr)]}{dr} \hat{r} \right. \\ & \left. \times \vec{X}_{lm}(\theta, \varphi) + \frac{a_{lm}}{q} \sqrt{l(l+1)} Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{f_l(qr)}{r} \hat{r} \right\} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{E}}{Z} = \sum_{l,m}^{\infty} & \left\{ a_{lm} f_l(qr) \vec{X}_{lm}(\theta, \varphi) + \frac{ib_{lm}}{qr} \frac{d[r f_l(qr)]}{dr} \hat{r} \right. \\ & \left. \times \vec{X}_{lm}(\theta, \varphi) - \frac{b_{lm}}{q} \sqrt{l(l+1)} Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{f_l(qr)}{r} \hat{r} \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

donde  $l = 1, 2, \dots, \infty$ ,  $m = -l, \dots, -1, 0, +1, \dots, +l$ ,  $\epsilon$  es la constante dieléctrica y  $\mu$  es la susceptibilidad magnética,  $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$  es la impedancia,  $q = \sqrt{\mu\epsilon}\omega$  es el número de onda del medio,  $\omega$  es la frecuencia angular,  $f_l(qr)$  es la función Bessel esférica de primera, segunda o tercera clase de orden  $l$ . Se ha introducido el armónico esférico vectorial normalizado de orden  $(l, m)$

$$\vec{X}_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \frac{1}{i} \vec{r} \times \nabla Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3)$$

Donde  $\vec{L}$  es el operador de momento angular y los  $Y_{lm}$  son los armónicos esféricos. Se utiliza la teoría de Mie, el desarrollo detallado valido tanto para esferas metálicas como dieléctricas como se puede seguir en la Ref. 5. A continuación se reproducen las expresiones de las secciones eficaces esparcida, de absorción y total.

La sección eficaz de esparcimiento (SES) total de la esfera [15,16], es:

$$\sigma_s = \frac{2\pi}{q_1^2} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \left[ |a_{l,1}^{(s)}|^2 + |b_{l,1}^{(s)}|^2 \right] \quad (4)$$

La sección eficaz de absorción es

$$\begin{aligned} \sigma_{abs} = \frac{2\pi}{q_1^2} \sum_{l=1}^{\infty} & (2l+1) \\ & \times \left[ Re[a_{l,1}^{(s)} + b_{l,1}^{(s)}] - |a_{l,1}^{(s)}|^2 + |b_{l,1}^{(s)}|^2 \right] \quad (5) \end{aligned}$$

La sección eficaz de extinción (SEE) es la suma de las secciones eficaces de esparcimiento y de la absorción

$$\sigma_{ext} = \frac{2\pi}{q_1^2} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \text{Re} \left[ |a_{l,1}^{(s)}|^2 + |b_{l,1}^{(s)}|^2 \right] \quad (6)$$

Existen modos que pueden ser plasmones de superficie para el caso de la esfera metálica se manifiestan en un máximo o máximos en la sección eficaz de esparcimiento. Cuando no hay absorción en la esfera, la sección eficaz de extinción es igual a la sección eficaz de esparcimiento.

### 3. Cálculos y resultados

Para obtener resultados numéricos de la sección eficaz de esparcimiento (4) o del campo eléctrico (2), las sumatorias infinitas se truncan hasta un valor  $L$ , tal que los datos calculados con  $L-1$  y con  $L$  no difieren en 1 %. Una regla gruesa es que valores pequeños del radio de la esfera requiere  $L$  pequeños, mientras que radios grandes requieren  $L$  grandes. Así que  $l$ , en (1) y (2), tomará valores desde 1 hasta  $L$ .

En esta sección presentamos resultados numéricos de la difracción de las ondas electromagnéticas por esferas metálicas con función dieléctrica tipo Drude. Los radios fueron variados según fuera procedente.

El libro de Bohren y Huffman [16] tiene un apéndice con un código en FORTRAN para el caso de una esfera con el que se puede calcular la sección eficaz de extinción, de esparcimiento, así como la intensidad en la aproximación de campo lejano, pero no se puede calcular el campo cercano, así que este código fue modificado para la incluir el cálculo del campo cercano. Este código modificado fue empleado para obtener los resultados del campo cercano y sección eficaz debido a la difracción por esferas dieléctricas [5]. Es pertinente mencionar que actualmente existen programas orientados a realizar estos cálculos en el rango nanométrico tales como el MieLab o Scantlay, basados en la teoría de Mie.

#### 3.1. Plasmones de Superficie en Esferas Metálicas

En esta sección se estudiará la difracción de luz por esferas metálicas, una referencia útil es [17]. Para poder comparar con algunos resultados mostrados en la Ref. 12, se presenta la constante dieléctrica tipo-Drude, Ec. (2) de la misma referencia, que ellos usaron en su artículo,

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\infty} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega_p\omega} \right). \quad (7)$$

Los parámetros empleados son la constante dieléctrica de fondo  $\epsilon_{\infty} = 1$ , la frecuencia de plasma  $2\pi h\omega_p = 10.0$  eV ( $\lambda_p = 124.0$  nm), donde  $h$  es la constante de Planck y  $(\gamma\omega_p)$  es el inverso del tiempo medio de colisión de los electrones.

Las frecuencias de los modos soportados por esferas metálicas con respuesta tipo Drude en el caso no-retardado están dadas por una sencilla expresión, ver Engelman and Ruppin en Ref. 18,

$$\omega_l = \omega_p \sqrt{l/(2l+1)}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Estas frecuencias son aplicables para radios mucho menores que la longitud de onda. En el caso retardado las frecuencias de los modos son complejas, lo cual refleja el hecho de que los plasmones de superficie tienen una vida media finita debido a su decaimiento radiativo y se calculan haciendo cero el denominador de la Ec. (20) de la Ref. 5. Estas frecuencias fueron calculadas en la Ref. 11.

Si el radio de esfera es muy pequeño comparado con la longitud de onda ( $a \ll \lambda$ ) o ( $q_1 a \ll 1$ ), entonces solo el primer término de la sumatoria ( $l = 1 = L$ ) contribuye a la sección eficaz de esparcimiento. Si usamos las formas asintóticas de las funciones Bessel, la Ec. (23) de la Ref. 5 llega a ser,

$$b_{1,1}^{(s)} = +\frac{2}{3} \left( \frac{2\pi a \sqrt{\varepsilon_1}}{\lambda} \right)^3 \times \frac{+3\varepsilon_1 \varepsilon_{2i} + i(2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_{2r} - \varepsilon_{2r}^2 - \varepsilon_{2i}^2)}{\varepsilon_{2i}^2 + (2\varepsilon_1 + \varepsilon_{2r})^2}. \quad (9)$$

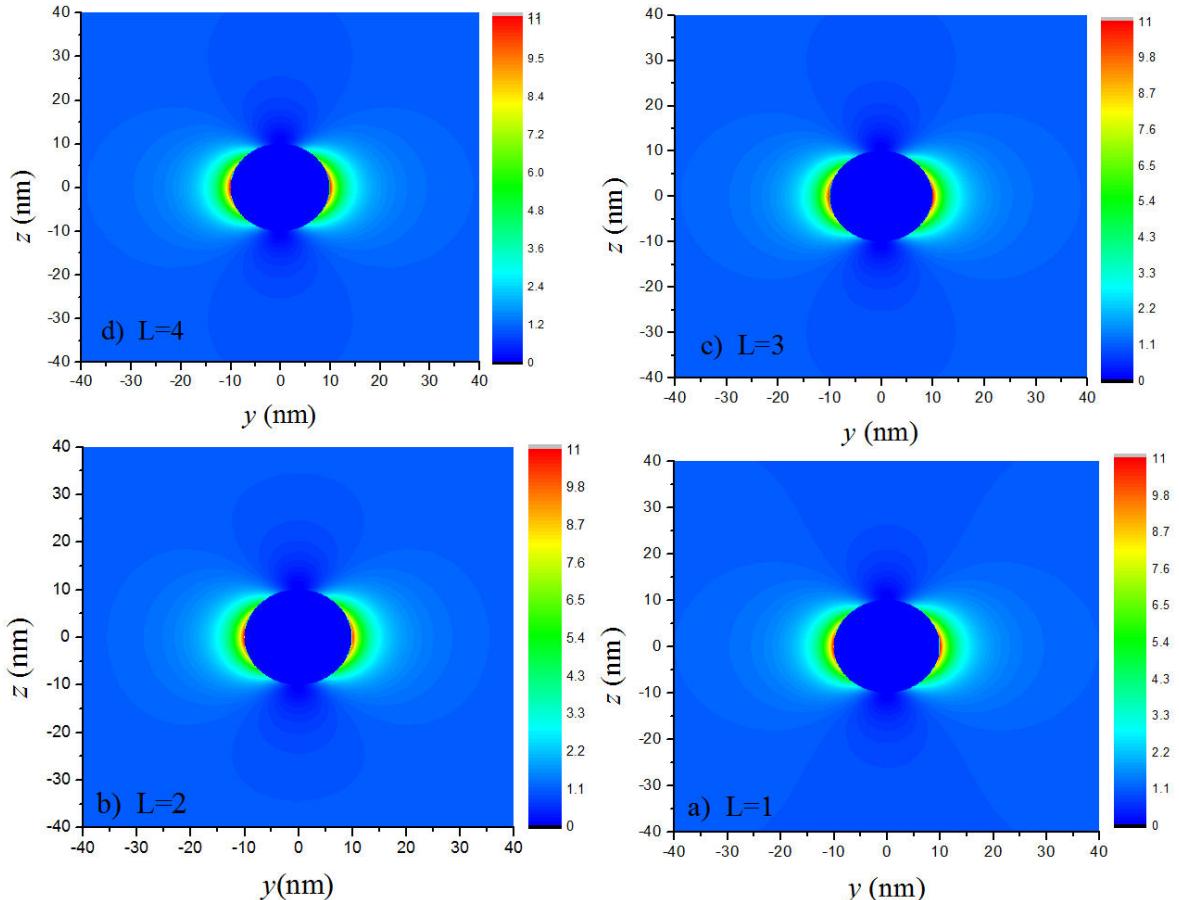


FIGURA 1. La intensidad de campo cercano proyectado en el plano  $z-y$  debido a una esfera metálica de radio 10 nm, para diferentes valores de  $L$ : a)  $L = 1$ , b)  $L = 2$ , c)  $L = 3$  y d)  $L = 4$ . La flecha indica la dirección de la onda incidente,  $\lambda = 633$  nm, y  $\gamma = 0.001$ . Se aprecian ligeras diferencias entre las gráficas calculadas con  $L = 1$  y  $L = 2$ . Mientras que los datos obtenidos con  $L = 3$  y  $L = 4$  son iguales.

Donde  $\varepsilon_{2r}$  y  $\varepsilon_{2i}$  son la parte real e imaginaria de la constante de Drude, respectivamente. Se puede demostrar que la parte imaginaria de (9) es casi cero, así sustituyendo  $b_{1,1}^{(s)}$  en la Ec. (4) la SES es

$$\frac{q_1^2}{2\pi} \sigma_s = 12 \left( \frac{2\pi \sqrt{\varepsilon_1} a}{\lambda} \right)^6 \frac{\varepsilon_1^2 \varepsilon_{2i}^2}{[\varepsilon_{2i}^2 + (2\varepsilon_1 + \varepsilon_{2r})^2]^2} \quad (10)$$

Sustituyendo (10) en la Ec. (6) la SEE es

$$\sigma_{ext} = 12 \left( \frac{2\pi \sqrt{\varepsilon_1} a}{\lambda} \right) (\pi a^2) \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_{2i}}{\varepsilon_{2i}^2 + (2\varepsilon_1 + \varepsilon_{2r})^2} \quad (11)$$

La derivación de (11) fue hecha por Genzel and Martin [19]. De (10) podemos obtener el valor de la frecuencia para la cual (10) tiene un máximo  $\omega = \omega_p / \sqrt{1 + 2\varepsilon_1}$ , el valor máximo  $12(q_1 a)^6 \varepsilon_1^2 / \varepsilon_{2i}^2$ , así como su anchura  $(8/10)^2 \varepsilon_2 i / (1 + 2\varepsilon_1)^{3/2}$ .

Primero pasaremos a estudiar las convergencias de las soluciones, para esto en la Fig. 1 se muestra la intensidad del campo cercano, el módulo cuadrado del campo eléctrico, calculado en el plano  $z-y$  para a)  $L = 1$ , b)  $L = 2$ , c)  $L = 3$  y d)  $L = 4$ . La esfera metálica tiene un radio de 10 nm. La on-

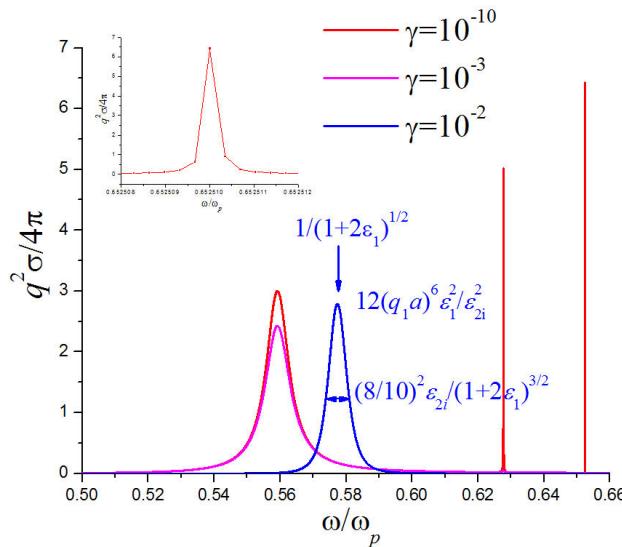


FIGURE 2. La sección eficaz de esparcimiento total como función de la frecuencia adimensional  $\omega/\omega_p$ , para una esfera metálica de radio  $a = 10$  nm rodeada de aire  $\epsilon_1 = n_1 = 1.0$ , la curva de color rojo corresponde a  $\gamma = 0.00$ , la negra a  $\gamma = 0.01$ , la curva mostrada en color azul fue calculada usando la forma aproximada (10). Junto a esta última curva se muestra la expresión para la frecuencia de resonancia, el máximo y el ancho de las SES.

da electromagnética incidente está linealmente polarizada y se propaga en la dirección  $z$ . La longitud de onda es de 633 nm, la cual corresponde a una frecuencia de  $2\pi\hbar\omega = 1.96$  eV. Para esta longitud de onda, la constante dieléctrica de la esfera tiene el siguiente valor  $\epsilon(\omega) = -25.0 + i1.33$ .

De las figuras se puede apreciar que la convergencia se alcanzó para  $L = 4$ , esto se verificó numéricamente de acuerdo al criterio establecido en la sección anterior.

En las imágenes se puede observar que la esfera presenta un comportamiento tipo dipolar con orientación en el eje- $y$ , que coincide con la dirección de oscilación del campo eléctrico incidente. Este es un comportamiento típico de la difracción de luz por nano-esferas metálicas. También se observa que los dos máximos de intensidad del campo se localizan muy cerca de la superficie, típicamente del orden de  $a/10$ .

En la Fig. 2 se muestra la sección eficaz de esparcimiento (SES) como función de la frecuencia dividida entre la frecuencia de plasma para una esfera metálica de 10 nm de radio. La función dieléctrica de la esfera metálica se supone tipo Drude. La curva de color rojo corresponde a  $\gamma = 0$ , la de color negro a  $\gamma = 0.001$  y la de color azul a la aproximación dada por (10), calculada para este último valor de  $\gamma$ , en la Fig. 2. La SES despliega tres máximos, en el caso exacto. Para poder resolver uno de los picos la resolución espectral fue de  $\Delta\lambda = 0.001$  nm. Para el caso de la solución aproximada (10) se muestra en la gráfica la frecuencia de resonancia, que corresponde al primer valor de la fórmula de Rupin, el máximo valor de SES y su anchura. El máximo de menor frecuencia muestra un comportamiento tipo Lorentziana y está localizado a una frecuencia de  $\omega_{1,1} = 0.55918\omega_p$ , ( $\lambda = 221.7533$ ), el cual corresponde a la excitación del

plasmón de superficie y se le asocia la onda parcial  $b_{1,1}$  (modo tipo TM). El segundo máximo a una frecuencia intermedia muestra un comportamiento tipo delta de Dirac a una frecuencia de  $\omega_{2,1} = 0.62773$ ,  $\omega_p(\lambda = 197.5372)$  y se le asocia la onda parcial  $b_{2,1}$  (modo tipo TM), este máximo casi desaparece en el caso que  $\gamma = 0.01$ . Por último el máximo localizado a una frecuencia de  $\omega_{3,1} = 0.65251$ ,  $\omega_p(\lambda = 190.0354)$  que corresponde a la excitación del plasmón de superficie y se le asocia la onda parcial  $b_{3,1}$  (modo tipo TM). Este máximo desaparece completamente cuando  $\gamma = 0.001$ .

El valor asintótico de la frecuencia cuando  $l$  tiende a infinito en la fórmula de Ruppin es la frecuencia del plasmón de superficie en una interfaz plana meta-aire o sea  $\omega/\omega_p = 1/\sqrt{2}$ .

La SEE total cuando  $\gamma = 0$  tiene un valor máximo más grande que cuando  $\gamma = 0.001$ , pero una anchura menor, esto se debe a la absorción del medio.

Una consecuencia de la excitación de un plasmón de superficie es el incremento del campo eléctrico muy cerca de la superficie. Para observar este efecto se estudia el campo cercano de la esfera metálica a la frecuencia de resonancia.

En la Fig. 3 se muestra los resultados para SEE, enfatizando la variación del radio de la esfera metálica: a) 10 – 30 nm, b) 40 – 60 nm, c) 70 – 90 nm, d) 100 – 120 nm. Se observa la tendencia a obtener varias excitaciones de SP, conforme el radio aumenta.

En la Fig. 4 se muestra la intensidad del campo cercano calculada en el plano a)  $z - y$  y a)  $z - y$  para  $L = 4$ ,  $a = 10$  nm,  $\gamma = 0.01$  y a la frecuencia de resonancia  $\omega_{1,1} = 0.55918\omega_p$ . Se puede observar de nuevo el comportamiento dipolar anteriormente descrito. Los máximos de intensidad del campo eléctrico están muy cerca de la superficie, pero son aproximadamente 1000 veces mayor que los máximos mostrado en la Fig. 1, además la intensidad es notable a distancias del orden del radio, al menos a lo largo del eje- $y$ .

En la Fig. 5 se muestra el módulo cuadrado de la componente  $\varphi$  del campo eléctrico como función del ángulo de esparcimiento, para  $a = 10$  nm y  $\gamma = 0.01$ , la curva de color rojo corresponde al caso resonante y la negra al caso no resonante.

Observamos que la magnitud del campo cuando hay resonancia es mayor que cuando no la hay, la distribución angular es la misma. Sólo hay un mínimo alrededor de  $90^\circ$ .

La intensidad muestra un comportamiento cuasi-lambertiano sin ninguna otra característica importante.

En el caso retardado, varios autores como Ruppin [18], Martins [17], Ancey *et al.* [12] reportaron varias resonancias, así que para observarlas escogemos un radio mayor con el objetivo de reproducir los resultados de la Fig. 1 a 1a mostrada en [12].

En la Fig. 6 se muestra la sección eficaz de esparcimiento total como función de  $\omega a/c$ , de una esfera con un radio  $a = 2\pi c/\omega_p$ ,  $L = 9$ . La curva de color rojo fue calculada con  $\gamma = 0.0$ , mientras que la curva negra con  $\gamma = 0.001$ . Los datos mostrados en la Fig. 5 están en máximos relacionados

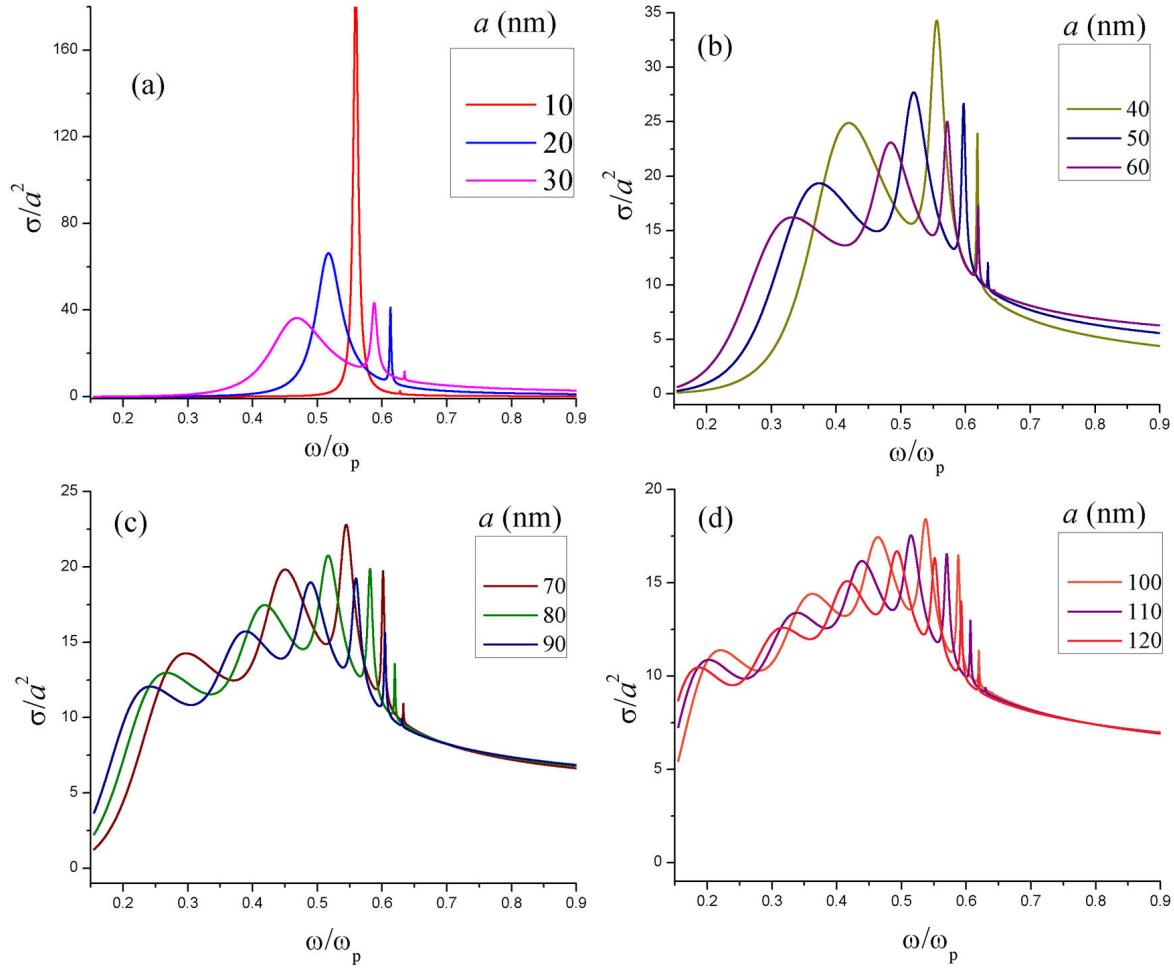


FIGURA 3. Se muestran los resultados graficados para SEE, al variar el radio de la esfera metálica desde 10 nm a 120 nm: a) 10-30 nm, b) 40-60 nm, c) 70-90 nm, d) 100-120 nm. Las imágenes ilustran claramente la tendencia a una correlación entre el número de excitaciones de SP y el incremento del radio de la esfera bajo estudio.

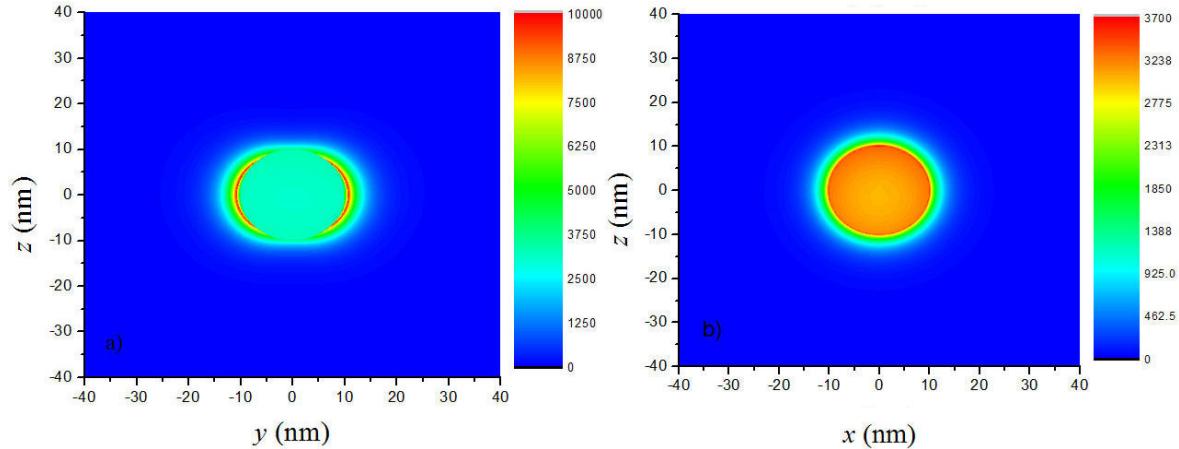


FIGURA 4. La intensidad del campo cercano calculada en el plano a)  $z - y$  y b)  $z - x$  producida por una esfera metálica con valores de radio  $a = 10$  nm,  $\gamma = 0.01$ ,  $L = 4$  y a la frecuencia de resonancia  $\omega_{1,1} = 0.55918\omega_p$ , la cual corresponde a una longitud de onda  $\lambda = 221.7660$  nm.

con resonancia y a seis de ellos se les pueden asociar las ondas parciales  $b_{31}$ ,  $b_{41}$ ,  $b_{51}$ ,  $b_{61}$ ,  $b_{71}$ ,  $b_{81}$  y  $b_{91}$ . Para el caso  $\gamma = 0.001$ , la SEE total disminuye en intensidad y dos de las

resonancias,  $b_{81}$ , y  $b_{91}$ , desaparecen por completo.

En la Fig. 7 se incluye el símbolo del coeficiente de la onda parcial relacionado con cada resonancia. Para lograr aso-

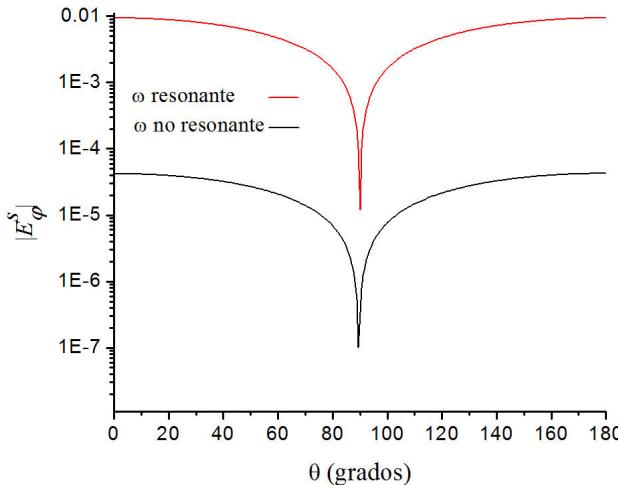


FIGURA 5. La intensidad del campo cercano calculada en el plano a)  $z - y$  y b)  $z - x$  producida por una esfera metálica con valores de radio  $a = 10$  nm,  $\gamma = 0.01$ ,  $L = 4$  y a la frecuencia de resonancia  $\omega_{1,1} = 0.55918\omega_p$ , la cual corresponde a una longitud de onda  $\lambda = 221.7660$  nm.

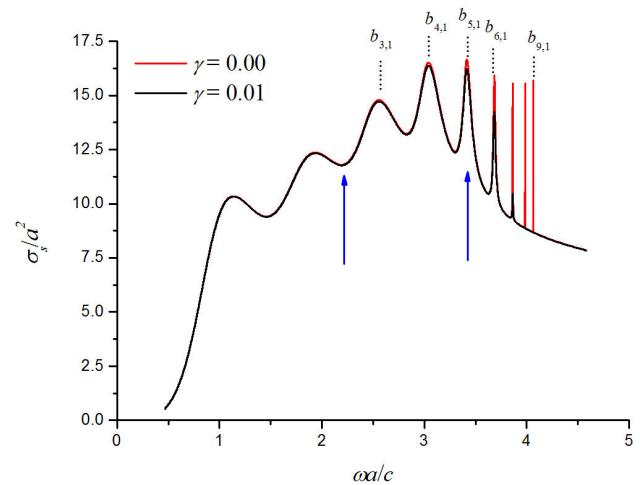


FIGURA 6. Sección eficaz de esparcimiento total como función de la frecuencia  $\omega a/c$ . El radio de la esfera es  $a = 2\pi c/\omega_p$ . La curva sólida de color negro se calculó con  $\gamma = 0.00$  y la curva en color rojo con  $\gamma = 0.01$ . La SEE despliega 9 picos asociados con la excitación de plasmones de superficie esféricos.

TABLA I. Valores de la frecuencia reducida obtenida de la SEE y los valores dados por la fórmula de Ruppin.

$l$	$\omega_{l,1}/\omega_p$	$\omega_l/\omega_p = \sqrt{l/(2l+1)}$
1	0.55918	0.57735
2	0.62773	0.63246
3	0.65251	0.65465

ciar a cada resonancia una onda parcial se encontró el mínimo del denominador, que debe ser aproximadamente cero, asociado con cada una de ellas. Los modos excitados son del tipo TM solamente.

En la Tabla I se muestra el valor de la frecuencia reducida obtenida de la SES y los valores dados por la fórmula de Ruppin. Los valores de las frecuencias, son aproximadamente iguales, lo cual establece que la aproximación no-retardada es válida para radio de esferas mucho menores que la longitud de onda.

TABLA II. Se muestran valores de la frecuencia reducida obtenida de la SES total y los valores dados por la fórmula de Ruppin.

$L$	$\omega_{l,1}a/c$	$\omega_l a/c = 2\pi\sqrt{l/(2l+1)}$
1	1.13969	3.62759
2	1.93870	3.97383
3	2.55968	4.11331
4	3.04265	4.18879
5	3.41612	4.23610
6	3.68358	4.26850
7	3.86358	4.29223
8	3.98219	4.31002
9	4.06520	4.32438

En la Tabla II se muestra el valor de la frecuencia reducida obtenida de la SEE total y los valores dados por la fórmula de Ruppin.

En este caso no hay coincidencia alguna entre las frecuencias de los modos, obtenida de la SEE de la Fig. 6, con aquellas dadas por la fórmula cuasi-estática de Ruppin.

Ahora pasaremos a estudiar la luz esparcida y el campo cercano producidas por la esfera metálica a dos frecuencias distintas, una resonante  $\omega a/c = 3.416$  y la otra no resonante  $\omega a/c = 2.180$ , ambas marcadas con flechas de color azul en la figura anterior.

En la Fig. 7 se muestra  $|E^s \varphi|$  como función del ángulo de esparcimiento para una esfera metálica de radio  $a = 2\pi c/\omega_p$ ,  $L = 9$ , a)  $\gamma = 0.0$  y b)  $\gamma = 0.01$ . La curva en color rojo es para el caso de resonancia 228 nm ( $\omega a/c = 3.416$ ) y la curva en color negro es para el caso no resonante 356 nm ( $\omega a/c = 2.18$ ). De nuevo es posible apreciar que el campo eléctrico en resonancia es mayor que fuera de ella al menos para ángulos grandes.

La intensidad del campo lejano presenta máximos y mínimos relacionados con el radio de la esfera. A mayor tamaño mayor número de máximos. De estas curvas no es posible determinar si la luz ha excitado a uno de los modos del sistema.

La intensidad del campo lejano presenta máximos y mínimos relacionados con el radio de la esfera. A mayor tamaño mayor número de máximos. De estas curvas no es posible determinar si la luz ha excitado a uno de los modos del sistema.

En la Fig. 8 se muestra el campo cercano proyectado en el plano  $z - y$  para  $L = 9$ , radio  $a = 2\pi c/\omega_p$ , y a la frecuencia de resonancia  $\omega a/c = 3.416$ , para a) casos  $\gamma = 0$  y b) caso  $\gamma = 0.01$ .

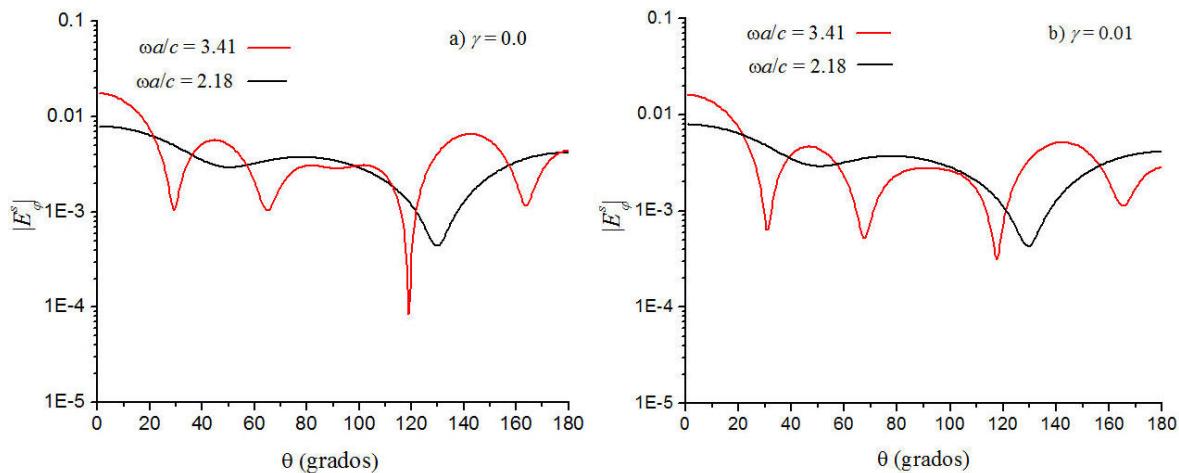


FIGURA 7. El módulo de la componente  $\varphi$  del campo eléctrico esparcido  $|E_\varphi^s|$  como función del ángulo de esparcimiento, para una esfera de radio  $a = 10$  nm. La curva de color rojo corresponde al caso resonante y la negra al caso no resonante.

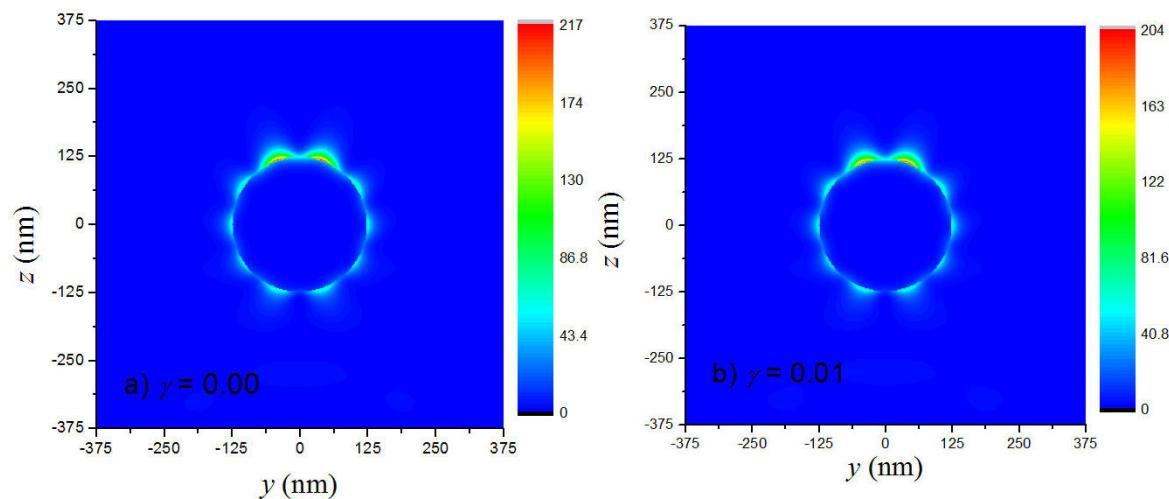


FIGURA 8. La intensidad del campo cercano proyectada en plano  $z - y$  por una esfera de radio  $a = 2\pi c/\omega_p$ , para  $\gamma = 0.00$  y  $\gamma = 0.01$  calculado a la frecuencia de resonancia  $\omega a/c = 3.416$ .

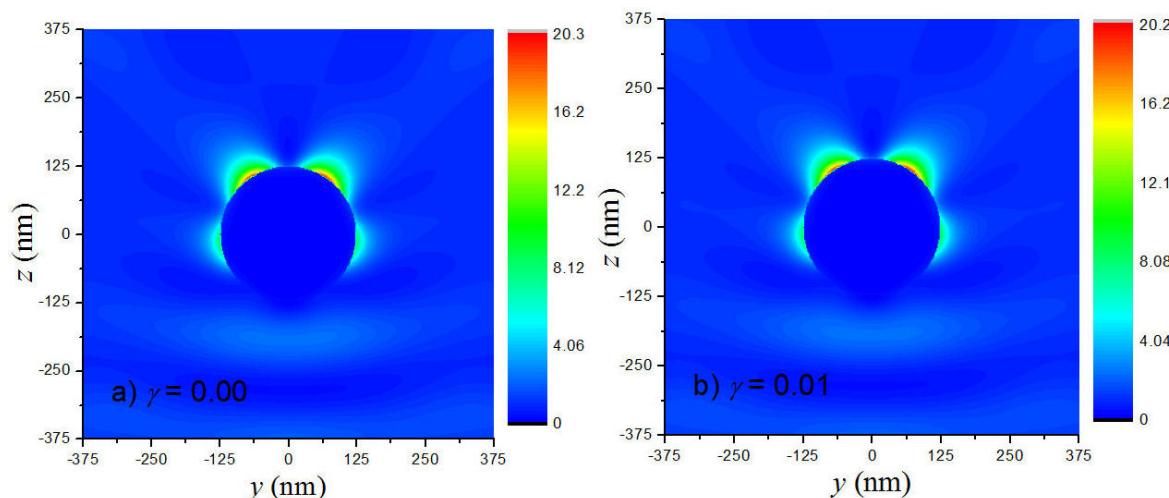


FIGURA 9. Se gráfica lo mismo que en la Fig. 8 pero a una frecuencia no resonante  $\omega a/c = 2.180$ .

El plasmón de superficie excitado despliega diez lóbulos que rodean a la esfera. El número de estos corresponde adecuadamente al orden multipolar asociado con la onda parcial  $b_{5,1}$ .

La extensión del campo fuera de la superficie de la esfera metálica es aproximadamente de  $a/10$ , por otro lado se observa que el campo cercano es ligeramente más intenso cuando  $\gamma = 0$ , debido a que no hay absorción.

En las Figs. 8 aparecen dos máximos de intensidad que no hemos podido explicar su naturaleza, solo un análisis detallado de la onda parcial asociada podrá tal vez dar la respuesta al punto. Aunque se intentó encontrar una relación entre el número de oscilaciones o lóbulos dentro de esfera con los parámetros involucrados, como por ejemplo el radio, la longitud de onda, etc., no encontramos alguna relación.

En la Fig. 9 se muestra el campo cercano proyectado en el plano  $z - y$  con  $L = 9$ , radio  $a = 2\pi c/\omega_p$ , para los casos a)  $\gamma = 0.00$  y b)  $\gamma = 0.01$  para una frecuencia no resonante. El comportamiento del campo es completamente diferente comparado con el caso de la excitación del PS.

Al igual que en la Fig. 8, en la Fig. 9 se puede observar dos máximos de intensidad, por lo que se puede decir que es un fenómeno que no depende de la resonancia.

#### 4. Conclusiones

Estudiamos teóricamente la excitación de modos electromagnéticos en esferas metálicas. Se asume que tiene un com-

portamiento tipo Drude [20, 21], modelo representativo de los metales, que ha resistido la auscultación por más de un siglo, todavía muy utilizado para el estudio de propiedades ópticas de metales [21]. La sección eficaz de esparcimiento total está en excelente acuerdo con el resultado mostrado en la Ref. 12.

La SEE tiene asociado mayor número de excitaciones PS según varía el radio de la esfera metálica.

Se excitó un plasmón de superficie y se observa que los máximos de intensidad del campo eléctrico están muy cerca de la superficie, y son aproximadamente 1000 veces mayores que los que los encontrados cuando no hay excitación. Este comportamiento se observa también en el campo lejano.

Cuando el parámetro  $\gamma$  aumenta, las resonancias en la sección eficaz de esparcimiento total disminuyen su amplitud, e incluso desaparecen y el campo cercano es menos intenso; lo anterior se debe a que la esfera metálica absorbe energía en tales condiciones. Los modos asociados a una esfera metálica son TM únicamente.

Las perspectivas a futuro es el estudio de una esfera cerca de una interfaz plana que divide a dos medios semi-infinitos.

El tema aquí tratado puede ser útil en programas de materias avanzadas de licenciaturas en Física e Ingenierías o postgrados en estos mismos campos.

- 
1. A. Guerrero-Martínez, R.A. Alvarez-Puebla, y L.M. Liz-Marzán, *An. Quim.* **107** (2011) 221-223.
  2. G. Mie, *Ann. Phys.* **330** (1908) 377-445.
  3. P. Debye, *Der Lichterug auf kugeln von Beliebigem* Thesis (1908); *ibid. Ann. Phys.* **30** (1909) 57-136.
  4. J.C. Maxwell-Garnett, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* **205** (1906) 237-288. *Ibid. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* **203** (1904) 385-420.
  5. R. Rodríguez-Mijangos, R. García-Llamas, *Rev. Mex. de Fis.* **62** (2016) 51-59.
  6. U. Kreibig and M. Vollmer, Optical Properties of Metal Clusters, Springer Series in Materials Science **Vol. 25** (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1995).
  7. M.I. Mishchenko, J.W. Hovenier, and L.D. Travis, Eds. Light scattering by non-spherical particles: Theory, measurements and applications. Academic Press (2000).
  8. P. Mulvaney, *Langmuir* **12** (1996) 788-800.
  9. A. Slistan-Grijalva *et al.*, *Physica E* **25** (2005) 438-448.
  10. A. Slistan-Grijalva, *et al.*, *Physica E* **27** (2005) 104-112.
  11. A. Derkachova and K. Kolwas, *Eur. Phys. J. Special Topics* **144** (2007) 93-99.
  12. S. Ancey, I. Décanini, A. Folacci, and P. Gabrielli, *J. Opt. Soc. Am. B* **26** (2009) 1176-1187.
  13. L.K. Ausman, and G.C. Schatz, *J. Chem. Phys.* (2008) 129 054704-1-054704-10.
  14. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* 3th ed. (Wiley 1999).
  15. H.C. van de Hulst, *Light scattering by small particles*, (Dover, New York, 1957).
  16. C.F. Bohren and D.R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light by small particles*, (Wiley, 1983).
  17. S. Martinos, *Phys. Rev. B* **31** (1985) 2029-2032.
  18. R. Englman, and R. Ruppin, *J. Phys. C* **1** (1968) 614-629.
  19. L. Genzel, and T.P. Martin, *Phy. Stat. Sol. (b)* **51** (1972) 91-99.
  20. P. Drude, *Physikalische Zeitschrift* **1** (1900) 161.
  21. M. Dressel, M. Schefflef, *Ann. Phys.* **15** (2006) 535-544.