EDUCATION Revista Mexicana de Física E **64** (2018) 108–126 JULY–DECEMBER 2018

El formalismo 3+1 en relatividad general y la descomposición tensorial completa

T. Miramontes* y D. Sudarsky
Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México,
Apartado Postal 70-543, Ciudad Universitaria, 04511 México, D.F., México.
**e-mail: tonatiuh.miramontes@correo.nucleares.unam.mx*

Received 29 August 2017; accepted 14 December 2017

Se presenta una breve revisión del formalismo $3+1$ en Relatividad General, y se introducen algunas novedosas convenciones así como elementos de notación que permiten facilitar el tratamiento de las expresiones de todas las proyecciones tensoriales involucradas en este formalismo. También se obtienen expresiones $3+1$ útiles para la manipulación de índices (contracción, simetrización, antisimetrización), productos tensoriales y derivación covariante de tensores arbitrarios.

Descriptores: Relatividad general; formalismo en relatividad general; geometría de subvariedades.

A brief review of $3+1$ formalism in General Relativity is presented, introducing innovative conventions and notation elements which make it easier to deal with all of the tensorial projections involved in this formalism. Also, useful $3+1$ expressions for manipulation of indexes (contraction, symmetrization, anti-symmetrization), tensorial producs and the covariant derivative of arbitrary tensors are obtained.

Keywords: General relativity; formalism in general relativity; geometry of submanifolds.

PACS: 04.20.-q; 02.40.-k

1. Introducción

La *separación* o *formalismo* $3+1$ es la descripción de un espaciotiempo cuadridimensional $(\mathcal{M}, g_{ab})$, en términos de una foliación dada por hipersuperficies tridimensionales tipo espacio, de modo que la métrica inducida sobre éstas sea Riemanniana [1]. Esta separación es el punto de partida de la formulación hamiltoniana de la Relatividad General de Arnowitt, Deser y Misner [2], [3], así como de la Relatividad Numérica.

Aunque en la literatura existen referencias más detalladas y extensas sobre este formalismo, como [1] y [4] por citar algunas, en este trabajo se enfatiza su utilidad como herramienta analítica, obteniendo las expresiones $3+1$ más generales para operaciones como productos, trazas y derivadas de tensores arbitrarios. Con este fin, se introduce una notación especial para las proyecciones tensoriales, que permite sistematizar la manipulación de las expresiones típicamente engorrosas que aparecen en esta separación. Por lo demás, la notación y convenciones son consistentes con Wald [5], en particular la métrica del espaciotiempo g_{ab} con signatura $(-,+,+,+)$, y el signo de la curvatura extrínseca.

2. Nociones generales

La idea intuitiva detrás de la descripción $3+1$ es la de *interpretar* el espaciotiempo como un objeto 3 dimensional que *evoluciona* de acuerdo con una noción particular de tiempo global. Al separar un espaciotiempo cuadridimensional tomando el tiempo como parámetro, se busca que el objeto que evolucione sea la métrica Riemanniana que define la *distancia* sobre una subvariedad tridimensional apropiada.

De manera mas precisa, se tratará únicamente con espaciotimepos globalmente hiperbólicos, que son aquellos que se pueden foliar por hipesuperficies de Cauchy Σ_t. Esto quiere decir que se cuenta con una familia de hipersuperficies homeomorfas entre sí, parametrizadas por una función tiempo global t, y éstas cubren toda la variedad $\mathcal{M}$. A su vez ésto implica que la topología de la variedad es la de $\Sigma \times \mathbb{R}$. Es claro que un mismo espaciotiempo se puede foliar de mútiples maneras y que en particular la función tiempo global no es única. Esta libertad de elegir la foliacion esta asociada íntimamente con la noción de invarianica de norma de la teoría.

En el presente tratamiento se supondrá que la foliación y la función tiempo están dadas *a priori*, y se limitará a espaciotiempos globalmente hiperbólicos, para los cuales es posible tener una buena formulación de valores iniciales, que en pocas palabras[i], se refiere a que el espaciotiempo está determinado unívocamente por los datos sobre una hipersuperficie de Cauchy, que son el equivalente relativista de datos a un *tiempo inicial*.

La métrica del espaciotiempo g_{ab} determina el tamaño de vectores, y para el caso de vectores tangentes a curvas definidas sobre hipersuperficies de Cauchy Σ_t, ésta es una cantidad positiva. Esta noción de longitud determina entonces una métrica Riemanniana sobre cada Σ_t.

Para completar el punto de vista dinámico para el espaciotiempo, es necesario definir una noción apropiada de evolución, es decir, establecer una manera de identificar no sólo puntos en una hipersuperficie de la foliación con puntos en otra hipersuperficie de la misma foliación, sino una manera de comparar campos tensoriales entre ambos puntos de la variedad.

El procedimiento general para hacer esto es el siguiente: dado un difeomorfismo $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, es posible *transportar* tensores de un punto a otro, a través de los mapeos denominados *push-forward* $\phi_* : \mathcal{T}_p\mathcal{M} \to \mathcal{T}_{\phi(p)}\mathcal{M}$ y *pullback* $\phi^* : \mathcal{T}^*_{\phi(p)}\mathcal{M} \to \mathcal{T}^*_p\mathcal{M}$, lo cual permite comparar el valor de un campo tensorial en un punto con su valor en otro punto cercano. A continuación, se define el *cambio* de estos objetos sobre el flujo de ϕ como la derivada de Lie de ese objeto. En el Apéndice 7 se detallan los aspectos formales de esta construcción.

En el caso particular en cuestión, se desea que el flujo de ϕ represente una forma específica de avanzar en el tiempo dado por la función global t. Para ello se considera el hecho de que un campo vectorial suave t^a que no se anula en ningún punto del espaciotiempo permite definir, a través de sus curvas integrales, un grupo uniparamétrico de difeomorfismos $\phi_\tau : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ del siguiente modo: para cada valor τ del parámetro de las curvas integrales de t^a, se asigna a cada punto $p \in \mathcal{M}$, el punto dado por la curva integral del campo t^a que pasa por p, $\gamma_p : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$, evaluada en el parámetro τ, es decir, $\phi_\tau(p) = \gamma_p(\tau)$. El parámetro de la curva se toma de modo que $\gamma_p(0) = p$.

Para que el parámetro de las curvas $\gamma_p(\tau)$ coincida con t (salvo una constante correspondiente a la elección del origen), basta con que el campo t^a sea de tipo tiempo y que cumpla con la relación

$$t^a \nabla_a t = 1. \tag{1}$$

Luego, para todo $p \in \mathcal{M}$,

$$t(\gamma_p(\tau)) = t(p) + \tau. \tag{2}$$

Por lo tanto, el grupo uniparamétrico de difeomorfismos ϕ_τ generado por el campo t^a permite definir mapeos que *transportan* campos tensoriales sobre una hipersuperficie Σ_t a otra hipersuperficie $\Sigma_{t+\tau}$. Con esto, se provee de una noción de evolución a la descripción $3 + 1$.

Es importante destacar que:

- El campo vectorial t^a no es necesariamente unitario, por lo que el parámetro τ no puede interpretarse en general como el *tiempo propio* medido por un observador.
- No se impone ninguna condición de ortogonalidad del campo t^a respecto a las hipersuperficies de t constante.
- La condición (1) no determina al campo t^a, lo cual es un hecho íntimamente relacionado con la libertad de norma de la teoría.

Respecto a este último punto, nótese que lo único que la condición (1) requiere es que existan coordenadas que tomen el valor de t en cada punto como coordenada *tiempo*, y que la base del espacio tangente en cada punto inducida por dichas coordenadas tenga a t^a como el dual a $(dt)_a$. Es decir, la libertad en la elección de t^a se identifica con la libertad para escoger coordenadas que cumplan estas condiciones.

En este trabajo se adoptará el denominado *punto de vista cuadridimensional* [1], en el que los campos tensoriales del formalismo siempre son *cuadridimensionales* y están definidos sobre $\mathcal{M}$. Alternativamente, en su lugar se podrían considerar *versiones tridimensionales* de estos campos tensoriales, parametrizados por t, y que estarían definidos sobre cada subvariedad $\Sigma_t \subset \mathcal{M}$.

El *punto de vista tridimensional* requiere definir mapeos de proyección o encajes entre $\mathcal{M}$ y una hipersuperficie tridimensional $\hat{\Sigma}$, lo cual no es esencial para presentar el formalismo $3 + 1$. A los lectores interesados en esta perspectiva se les invita a revisar el Apéndice 7 donde se elabora esta conexión, en la que además se pone de manifiesto el papel del campo t^a, caracterizado, como se verá en la siguiente sección, por la elección de un campo vectorial tridimensional denominado *shift*.

Habiendo establecido los elementos básicos de esta perspectiva, a continuación se procede a desarrollar el formalismo para campos tensoriales de acuerdo con esta *separación*, empezando por la descomposición de vectores y campos vectoriales en partes tangente y normal a la hipersuperficie.

2.1. Vectores y covectores tangentes a la hipersuperficie

Los vectores tangentes a la hipersuperficie Σ_t se definen como aquellos vectores cuyas curvas integrales están completamente contenidas en Σ_t. Como las hipersuperficies Σ_t son de Cauchy, éstos vectores son tipo espacio.

De aquí en adelante, se indicará con una *tilde* ($\tilde{\ }$) que un vector es tangente a la hipersuperficie Σ_t. Asimismo, se denotará por $\widetilde{\mathcal{T}_p}\Sigma_t \subset \mathcal{T}_p\mathcal{M}$ al subespacio de vectores tangentes a Σ_t, en el punto $p \in \Sigma_t$.

Como la función t es constante sobre toda la hipersuperficie Σ_t, la derivada de t en la dirección de cualquier vector tangente a Σ_t se anula. Por lo tanto, cualquier vector tangente $\tilde{v}^a$ cumple con la ecuación

$$\tilde{v}^a \nabla_a t = 0. \tag{3}$$

Asímismo, un vector *ortogonal* a la superficie se define como un vector ortogonal a todo vector tangente a la hipersuperficie. Dado que la hipersuperficie Σ_t es homeomorfa a una variedad tridimensional, el subespacio de vectores ortogonales a ella es unidimensional.

De la Ec. (3), tenemos que el campo vectorial tipo tiempo $\nabla^a t$ es ortogonal a Σ_t, por lo que el vector normal en cada punto p de Σ_t se expresa como

$$n^a(p) \equiv - \left. \frac{g^{ab}\nabla_b t}{\sqrt{-g^{ab}\nabla_a t \nabla_b t}} \right|_{p\in\Sigma_t}. \tag{4}$$

El signo se ha escogido de modo que el campo n^a sea tipo tiempo dirigido al futuro. Entonces, dado un punto $p \in \Sigma_t$, se denota por $\mathcal{N}_p$ al subespacio de $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$ generado por los vectores proporcionales a $n^a(p)$, el cual es justamente el subespacio de vectores ortogonales a la hipersuperficie en el punto p,

$$\mathcal{N}_p = \{\lambda n^a(p) : \lambda \in \mathbb{R}\}. \tag{5}$$

Considerando esta separación punto a punto sobre Σ_t, se tiene que un campo vectorial ortogonal a Σ_t siempre se puede expresar como

$$v^a = v_\perp n^a,$$

donde $v_\perp$ es una función real sobre Σ_t.

Por lo tanto, todo vector tangente a un punto p de Σ_t se puede expresar como la suma de un vector tangente a la hipersuperficie y un vector ortogonal a ella,

$$v^a = \widetilde{v}^a + n^a(p)v_\perp, \tag{6}$$

es decir, el espacio tangente a $p \in \Sigma_t$ se puede separar como

$$\mathcal{T}_p\mathcal{M} = \widetilde{\mathcal{T}}_p\Sigma_t \oplus \mathcal{N}_p, \tag{7}$$

donde $\oplus$ denota la suma directa de subespacios. Tomando esta definición punto a punto sobre Σ_t, quedan definidos los campos vectoriales tangentes a Σ_t.

La extensión de esta separación para campos de covectores o $1-$formas es directa. Un campo de covectores $\tilde{\omega}_a$ es tangente a Σ_t si para todo punto en Σ_t se cumple que

$$\tilde{\omega}_a n^a = 0. \tag{8}$$

De aquí en adelante la tilde también se utilizará para indicar que un campo de covectores es tangente a Σ_t.

Análogamente, un campo ω_a es ortogonal a Σ_t si para todo campo vectorial tangente $\tilde{v}^a$ se cumple

$$\omega_a \tilde{v}^a = 0. \tag{9}$$

Considerando

$$n_a \equiv g_{ab} n^b, \tag{10}$$

y la Ec. (3), se tiene que todo campo de covectores ortogonales a Σ_t se puede expresar como

$$\omega_a = \omega_\perp n_a, \tag{11}$$

siguiendo un razonamiento análogo al caso de campos vectoriales.

Tal como ocurre para el espacio tangente al punto $p \in \Sigma_t$, el espacio cotangente a p se separa como

$$\mathcal{T}_p^*\mathcal{M} = \widetilde{\mathcal{T}}_p^*\Sigma_t \oplus \mathcal{N}_p^*, \tag{12}$$

donde $\widetilde{\mathcal{T}}_p^*\Sigma_t$ es el subespacio de $\mathcal{T}_p^*\mathcal{M}$ formado por todos los covectores tangentes a Σ_t en el punto p, y se ha denotado al espacio de covectores ortogonales a Σ_t en p como

$$\mathcal{N}_p^* \equiv \{\lambda n_a(p) : \lambda \in \mathbb{R}\}, \tag{13}$$

de modo que todo covector en $p \in \Sigma_t$ se expresa como

$$\omega_a = \widetilde{\omega}_a + n_a(p)\omega_\perp. \tag{14}$$

Nuevamente, esta separación se extiende al caso de campos aplicando estas reglas punto a punto sobre Σ_t.

Gracias a que se está trabajando en un espaciotiempo foliado por hipersuperficies Σ_t, cada punto $q \in \mathcal{M}$ está contenido en una y sólo una hipersuperficie $\Sigma_{t(q)}$, lo que permite extender esta descomposición, punto a punto, para campos vectoriales o de covectores sobre $\mathcal{M}$, considerando en cada punto q la separación con respecto a la hipersuperficie $\Sigma_{t(q)}$.

A los campos que resultan de esta separación, $\widetilde{v}^a$ y $v_\perp n^a$ para vectores, y $\widetilde{\omega}_a$ y $\omega_\perp n_a$ para covectores, se les denomina proyecciones tangente y normal, respectivamente.

La componente normal de un campo vectorial y respectivamente de un campo de covectores están dadas por

$$v_\perp = -n_a v^a, \tag{15}$$

$$\omega_\perp = -n^a \omega_a, \tag{16}$$

lo cual se puede verificar contrayendo (6) con n_a y (14) con n^a.

Las proyecciones tangentes se obtienen sustituyendo (15) y (16) en (6) y (14), respectivamente, quedando

$$\widetilde{v}^a = (\delta^a{}_b + n^a n_b)v^b, \tag{17}$$

$$\widetilde{\omega}_a = (\delta_a{}^b + n_a n^b)\omega_b, \tag{18}$$

donde $\delta^a{}_b \equiv g^{ac}g_{cb}$ y $\delta_a{}^b \equiv g_{ac}g^{cb}$.

De (17) y (18) se tiene que los proyectores de vectores en el subespacio tangente $\widetilde{\mathcal{T}}\Sigma$, y respectivamente el de covectores en el subespacio cotangente $\widetilde{\mathcal{T}}^*\Sigma$ están dados por

$$h^a{}_{a'} \equiv \delta^a{}_{a'} + n^a n_{a'}, \tag{19}$$

$$h_a{}^{a'} \equiv \delta_a{}^{a'} + n_a n^{a'}, \tag{20}$$

respectivamente. Nótese que estos tensores actúan como la identidad para vectores y covectores tangentes.

A partir de (15) y (16) se tiene que los proyectores de vectores en el subespacio tangente $\mathcal{N}$ y de covectores en el subespacio cotangente $\mathcal{N}^*$ son

$$P_\perp{}^a{}_{a'} \equiv -n^a n_{a'}, \tag{21}$$

$$P_\perp{}_a{}^{a'} \equiv -n_a n^{a'}, \tag{22}$$

respectivamente.

En términos de estos proyectores, se pueden reescribir (19) y (20) como las descomposiciones de la *identidad* para vectores $\delta^a{}_{a'}$ y para covectores $\delta_a{}^{a'}$, es decir

$$\delta^a{}_{a'} = h^a{}_{a'} + P_\perp{}^a{}_{a'} = h^a{}_{a'} - n^a n_{a'}, \tag{23}$$

$$\delta_a{}^{a'} = h_a{}^{a'} + P_\perp{}_a{}^{a'} = h_a{}^{a'} - n_a n^{a'}. \tag{24}$$

Las expresiones (6) y (14) indican cómo reconstruir vectores y covectores del espaciotiempo a partir de su proyección tangente (algebráicamente tridimensional) y su *componente* ortogonal (una función real), lo que justifica la denominación $3+1$ de este formalismo. Asimismo, las expresiones (23) y (24) serán útiles para realizar la descomposición $3+1$ de tensores de rango arbitrario.

Respecto al campo t^a, es convencional denominar *shift* a su proyección tangente y representarla por N^a, mientras que a su componente normal se le denomina función *lapse* y se le representa por N. Entonces, la descomposición $3+1$ de t^a es

$$t^a = N^a + n^a N. \tag{25}$$

De (1) se sigue que la función *lapse* también se puede expresar como

$$N = \frac{1}{n^a \nabla_a t} \ , \tag{26}$$

y de (25) que N sea el factor de normalización en la expresión (4), es decir,

$$N = \frac{1}{\sqrt{-g^{ab}\nabla_a t \nabla_b t}}. \tag{27}$$

Por lo tanto, n_a y N están determinados por la función t y la métrica del espaciotiempo, mientras que el *shift* N^a depende de la elección particular del campo t^a. En el Apéndice 7 se hace explícita la dependencia de estos campos en la expresión de un vector desde el punto de vista tridimensional.

2.2. Tensores de rango arbitrario.

La separación de los espacios de vectores o covectores en una parte tangente y una parte ortogonal expresada en (7) y (12), se puede generalizar para tensores de rango arbitrario a partir de su descomposición como producto tensorial de espacios de vectores y covectores. Por ejemplo, para el espacio de tensores $(0,2)$ definidos sobre un punto p de la hipersuperficie Σ_t, se tiene

$$\begin{aligned} T_p^*\mathcal{M} \otimes T_p^*\mathcal{M} &= (\widetilde{T}_p^*\Sigma_t \oplus \mathcal{N}_p^*) \otimes (\widetilde{T}_p^*\Sigma_t \oplus \mathcal{N}_p^*) \\ &= (\widetilde{T}_p^*\Sigma_t \otimes \widetilde{T}_p^*\Sigma_t) \oplus (\widetilde{T}_p^*\Sigma_t \otimes \mathcal{N}_p^*) \\ &\oplus (\mathcal{N}_p^* \otimes \widetilde{T}_p^*\Sigma_t) \oplus (\mathcal{N}_p^* \otimes \mathcal{N}_p^*). \end{aligned} \tag{28}$$

Esta descomposición indica que todo tensor $(0,2)$, T_{ab}, se puede separar como la suma de los siguientes términos:

- Un tensor $(0,2)$ completamente tangente a la hipersuperficie, es decir, que se anula al contraerlo con el vector normal n^a en cualquiera de sus índices. A este término se le denotará colocando una *tilde* sobre el símbolo del tensor original, $\widetilde{T}_{ab}$.
- El producto tensorial de n_a con un covector tangente, $\widetilde{\acute{\tau}}_b$.
- El producto tensorial de un covector tangente, $\widetilde{\grave{\tau}}_a$, con n_b.
- Un escalar $T_\perp$ multiplicando a $n_a n_b$, correspondiente a su *componente* ortogonal.

Es decir, la separación $3+1$ de un tensor $(0,2)$ es de la forma

$$T_{ab} = \widetilde{T}_{ab} + \widetilde{\grave{\tau}}_a n_b + n_a \widetilde{\acute{\tau}}_b + n_a n_b T_\perp. \tag{29}$$

Utilizando la descomposición de la identidad (24) para cada índice de T_{ab}, es decir, escribiendo

$$T_{ab} = \delta_a{}^{a'} \delta_b{}^{b'} T_{a'b'}, \tag{30}$$

y desarrollando cada identidad como en (24), se obtienen expresiones para cada uno de los tensores presentes en (29),

$$\widetilde{T}_{ab} = h_a{}^{a'} h_b{}^{b'} T_{a'b'}, \tag{31}$$

$$\widetilde{\grave{\tau}}_a = h_a{}^{a'} (-n^{b'}) T_{a'b'}, \tag{32}$$

$$\widetilde{\acute{\tau}}_b = (-n^{a'}) h_b{}^{b'} T_{a'b'}, \tag{33}$$

$$T_\perp = n^{a'} n^{b'} T_{a'b'}. \tag{34}$$

En este trabajo, a cada uno de los términos de (29) se les denominará proyecciones, y a los tensores tangentes de cada proyección, (31)-(34), se les denominará *componentes de proyección*.

La métrica inducida es un tensor $(0,2)$ tangente a la hipersuperficie que, actuando sobre dos vectores tangentes a la hipersuperficie, tiene la misma acción que la métrica del espaciotiempo. Es inmediato verificar que la proyección totalmente tangente de la métrica,

$$\begin{aligned} h_{ab} &\equiv h_a{}^{a'} h_b{}^{b'} g_{a'b'} \\ &= g_{ab} + n_a n_b, \end{aligned} \tag{35}$$

es el único tensor tangente a la hipersuperficie que cumple con estas condiciones.

Denotar la métrica inducida como h_{ab} es consistente con la notación que se ha introducido para los proyectores tangentes, en el sentido de que "g_{ab} baja índices", pues

$$h_{ab} = g_{aa'} h^{a'}{}_b = h_a{}^{b'} g_{b'b}.$$

Nótese también que la métrica inducida permite *subir* y *bajar* índices de tensores tangentes a Σ_t, y

$$h^{ab} \equiv g^{ac} g^{bd} h_{cd} \tag{36}$$

funge como operador métrica inversa, puesto que

$$h^{ab} h_{bc} = h^a{}_c. \tag{37}$$

Cuando se realiza la separación del espacio (co)tangente a $\mathcal{M}$ (en cada punto p), en un subespacio (co)tangente a $\Sigma_{t(p)}$ y el subespacio de (co)vectores paralelos a n^a (o n_a) en p, y se aplica esta separación al producto tensorial con el que se definen los espacios de tensores de rango superior, se obtiene que el número de maneras en que se puede proyectar un tensor $(k,0)$ es 2^k, puesto que se tendrá una descomposición de la forma

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_p\mathcal{M})^k &\equiv \bigotimes_{i=1}^{k} \mathcal{T}_p\mathcal{M} = (\mathcal{T}_p\Sigma_{t(p)} \oplus \mathcal{N})^k \\ &= \bigoplus_{j=0}^{k} \mathscr{P}[(\mathcal{T}_p\Sigma_{t(p)})^{k-j} (\mathcal{N})^j], \end{aligned} \tag{38}$$

donde $\mathscr{P}$ indica las permutaciones sobre los k índices de todas las posibles proyecciones j veces contraídas con n, es decir, todas las posibles combinaciones donde j índices de la proyección son normales y el resto tangentes. El número de permutaciones para cada j es $\binom{k}{j}$, por lo que el número total de proyecciones es

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} = 2^k. \tag{39}$$

Siguiendo esta lógica, en general para tensores tipo (k,l), se tendrá

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}_p\mathcal{M})^k &\otimes (\mathcal{T}_p^*\mathcal{M})^l \\ &= \bigoplus_{i=0}^{k}\bigoplus_{j=0}^{l} \mathscr{P}[(\mathcal{T}_p\Sigma_{t(p)})^{k-i}(\mathcal{N})^i \\ &\qquad \otimes(\mathcal{T}_p^*\Sigma_{t(p)})^{l-j}(\mathcal{N}^*)^j],\end{aligned} \tag{40}$$

donde el número total de proyecciones es 2^{k+l}.

Aunque en la mayoría de aplicaciones comunes para el formalismo $3+1$ basta con la descomposición de vectores, covectores y tensores de rango 2, en situaciones menos estándar, como en el estudio del acoplamiento de campos cuánticos con gravedad, así como en el estudio de acciones efectivas para gravedad cuántica, donde además de términos como $R^{abcd}R_{abcd}$ y $R^{ab}R_{ab}$, se requiere el cálculo de derivadas superiores como $\Box R$, o los desarrollos en series de Taylor covariantes[ii], que en principio involucran derivadas del tensor de Riemann de todo orden, es deseable contar con un formalismo que permita realizar estos cálculos de manera totalmente general y para un número de índices arbitrario.

El crecimiento exponencial del número de proyecciones, al incrementarse el rango de los tensores, implica que, si se desea tratar con total generalidad la descomposición $3+1$, es necesario primero sistematizar la nomenclatura de estas componentes de proyección.

Por ejemplo, para el caso $(0,2)$, las cuatro proyecciones previstas son justamente cada uno de los términos de (29), y se puede utilizar una notación en la que a cada componente de proyección se le asigna un símbolo diferente, como los símbolos del lado izquierdo de las Ecs. (31)-(34). Sin embargo, para tensores de rango $(0,l)$ con $l>2$, deja de ser práctico denotar cada componente de proyección con un símbolo distinto, por lo que en su lugar, se asignará a cada proyección una etiqueta numérica entre 0 y 2^l-1.

El primer paso para establecer una notación apropiada para este formalismo general será fijar reglas para la notación de los índices de todo tensor T del tipo $(0,l)$. Sus índices se etiquetarán de modo que indiquen su posición respecto al índice más a la derecha, por lo que un tensor $(0,2)$ se expresará como

$$T_{a_1a_0},$$

y en general, el conjunto de etiquetas de índices para un tensor $(0,l)$ será

$$I_l \equiv \{l-1,\ldots,1,0\}, \tag{41}$$

por lo que bajo esta convención, este tipo de tensor se expresará como

$$T_{a_{l-1}a_{l-2}\ldots a_1a_0}. \tag{42}$$

A continuación establecemos cómo se asigna una etiqueta m a una proyección dada. Sea ζ_m el conjunto que codifica la expansión binaria del número entero $m\in[0,2^{l-1}]$ en la forma

$$m = \sum_{j\in\zeta_m} 2^j. \tag{43}$$

Ésto no es más que la notación desarrollada en base dos de m, por lo que los conjuntos ζ_m para los primeros cinco enteros son:

$$\begin{aligned} 0&=0 &&\Rightarrow \zeta_0=\emptyset,\\ 1&=2^0 &&\Rightarrow \zeta_1=\{0\},\\ 2&=2^1 &&\Rightarrow \zeta_2=\{1\},\\ 3&=2^1+2^0 &&\Rightarrow \zeta_3=\{0,1\},\\ 4&=2^2 &&\Rightarrow \zeta_4=\{2\},\\ 5&=2^2+2^0 &&\Rightarrow \zeta_5=\{0,2\},\end{aligned}$$

y así sucesivamente. Recíprocamente, a partir de un conjunto ζ_m de números enteros, se puede construir un número m mediante la fórmula (43).

La receta para asignar etiquetas a una proyección $3+1$ de un tensor será la siguiente: Etiquete los índices del tensor como en (42) y construya el conjunto ζ_m como el conjunto de etiquetas de los índices que en la proyección son normales, es decir, las etiquetas de los índices de los covectores n, y luego, asigne a la proyección la etiqueta m dada por (43).

Esta convención no resulta intuitiva, pero es una manera simple de etiquetar proyecciones directamente, si se considera la siguiente *regla visual*: Sustituya cada índice de n por un número "1", y asigne al resto de los índices, que pertenecerán a la componente de proyección tangente, dígitos "0". Escriba los dígitos en el orden original de los índices correspondientes en el tensor no desarrollado, (42). Lo que se obtiene es la notación binaria del número m que le corresponde a la proyección en cuestión.

Por ejemplo, denotando por un subíndice B a un número en notación binaria, se tendría en (29),

$$\begin{aligned}T_{a_1a_0} &= \underbrace{\widetilde{T}_{a_1a_0}}_{00_B=0} + \underbrace{\underbrace{\widetilde{\tau}_{a_1}}_{0}\underbrace{n_{a_0}}_{1}}_{01_B=1} \\ &\quad + \underbrace{\underbrace{n_{a_1}}_{1}\underbrace{\widetilde{\tau}_{a_0}}_{0}}_{10_B=2} + \underbrace{\underbrace{n_{a_1}}_{1}\underbrace{n_{a_0}}_{1}}_{11_B=3} T_\perp.\end{aligned}$$

Al conjunto[iii] que contiene las etiquetas de los índices proyectados de manera tangente se le denota por

$$Y_m^l \equiv I_l - \zeta_m. \tag{44}$$

Finalmente, la proyección m de un tensor T de tipo $(0,l)$ se denotará como

$$
{}^{m}P(T_{a_{l-1}\ldots a_0}) \equiv \bigotimes_{i\in Y_m^l} h_{a_i}{}^{a'_i} \bigotimes_{j\in\zeta_m} n_{a_j}(-n^{a'_j}) T_{a'_{l-1}\ldots a'_0}. \quad (45)
$$

Se puede simplificar aún más esta expresión si se considera la siguiente *notación multiplicativa* por conjunto de índices, exclusivamente para proyectores,

$$
n_{a_A} \equiv \bigotimes_{i\in A} n_{a_i},
$$

$$
h_{a_A}{}^{a'_A} \equiv \bigotimes_{i\in A} h_{a_i}{}^{a'_i},
$$

donde A es un conjunto de etiquetas de índices. Para el resto de los tensores, se define una notación abreviada para conjuntos de índices:

$$
T_{a_A} \equiv T_{a_{A_1}\ldots a_{A_s}},
$$

es decir, T_{a_A} es un tensor cuyos índices están etiquetados por los elementos del conjunto *ordenado* $A=\{A_1,\ldots,A_s\}$, donde en general $A_i < A_{i+1}$.

Haciendo uso de esta notación, la proyección m de un tensor $(0,l)$ se expresa como

$$
{}^{m}P(T_{a_{I_l}}) = h_{a_{Y_m^l}}{}^{a'_{Y_m^l}}\, n_{a_{\zeta_m}}(-n)^{a'_{\zeta_m}} T_{a'_{I_l}}, \quad (46)
$$

las componentes de proyección se expresan como

$$
{}^{m}T_{a_{Y_m^l}} = h_{a_{Y_m^l}}{}^{a'_{Y_m^l}}(-n)^{a'_{\zeta_m}} T_{a'_{I_l}}, \quad (47)
$$

y en general, la descomposición $3+1$ de un tensor $(0,l)$ se expresa como

$$
T_{a_{I_l}} = \sum_{m=0}^{2^l-1} {}^{m}P(T_{a_{I_l}}) = \sum_{m=0}^{2^l-1} n_{a_{\zeta_m}}\, {}^{m}T_{a_{Y_m^l}}. \quad (48)
$$

Nótese que la $m-$ésima componente de proyección es un tensor tangente $(0,l-z)$, con z el número de elementos en ζ_m.

Esta convención de notación se generaliza directamente para tensores de tipo (k,l), tomando el valor posicional de los índices como etiqueta, independientemente de si son índices “covariantes” o “contravariantes”.

Se conservará la convención de denotar por una tilde a la proyección completamente tangente de un tensor, correspondiente a la proyección identificada por el número 0 (por ejemplo $\widetilde{T}_{a_{I_l}}$) así como el empleo del subíndice $\perp$ para referirse a la proyección completamente ortogonal de un tensor, correspondiente a la proyección identificada por el número $2^{(k+l)}-1$ (por ejemplo, $T_\perp$).

2.2.1. *Simetrización y antisimetrización de índices*

Se ha establecido una convención donde la posición de los índices juega un papel importante, por lo que hay que tener cuidado de realizar cualquier intercambio de etiquetas de índices **después** de que se hayan etiquetado las componentes. Por ejemplo, el tensor $T_{a_1a_0}$ se desarrolla en esta notación como

$$
T_{a_1a_0} = \tilde{T}_{a_1a_0} + n_{a_0}\,{}^{1}T_{a_1} + n_{a_1}\,{}^{2}T_{a_0} + n_{a_1}n_{a_0}T_\perp, \quad (49)
$$

y para expresar su simetrización,

$$
T_{(a_1a_0)} \equiv \frac{1}{2!}\left(T_{a_1a_0} + T_{a_0a_1}\right),
$$

se deber tomar en cuenta primero el etiquetado de componentes dado en (49) y después el intercambio $a_1 \leftrightarrow a_0$ para el segundo término, obteniendo

$$
\begin{aligned}
T_{(a_1a_0)} = \frac{1}{2!}\Big(&\tilde{T}_{a_1a_0} + n_{a_0}\,{}^{1}T_{a_1} \\
&+ n_{a_1}\,{}^{2}T_{a_0} + n_{a_1}n_{a_0}T_\perp \\
&+ \tilde{T}_{a_0a_1} + n_{a_1}\,{}^{1}T_{a_0} \\
&+ n_{a_0}\,{}^{2}T_{a_1} + n_{a_0}n_{a_1}T_\perp\Big),
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
\begin{aligned}
T_{(a_1a_0)} = \frac{1}{2!}\Bigg(&\underbrace{\tilde{T}_{a_1a_0} + \tilde{T}_{a_0a_1}}_{{}^{0}P(T_{(a_1a_0)})} + \underbrace{n_{a_0}\left[{}^{1}T_{a_1} + {}^{2}T_{a_1}\right]}_{{}^{1}P(T_{(a_1a_0)})} \\
&+ \underbrace{n_{a_1}\left[{}^{2}T_{a_0} + {}^{1}T_{a_0}\right]}_{{}^{2}P(T_{(a_1a_0)})} + \underbrace{n_{a_1}n_{a_0}2T_\perp}_{{}^{3}P(T_{(a_1a_0)})}\Bigg). \quad (50)
\end{aligned}
$$

De manera análoga, la antisimetrización de los índices de este tensor en forma $3+1$ será

$$
\begin{aligned}
T_{[a_1a_0]} = \frac{1}{2!}\Bigg(&\underbrace{\tilde{T}_{a_1a_0} - \tilde{T}_{a_0a_1}}_{{}^{0}P(T_{[a_1a_0]})} + \underbrace{n_{a_0}\left[{}^{1}T_{a_1} - {}^{2}T_{a_1}\right]}_{{}^{1}P(T_{[a_1a_0]})} \\
&+ \underbrace{n_{a_1}\left[{}^{2}T_{a_0} - {}^{1}T_{a_0}\right]}_{{}^{2}P(T_{[a_1a_0]})}\Bigg). \quad (51)
\end{aligned}
$$

Nótese que en este caso la proyección con etiqueta $m=3$ se ha cancelado idénticamente porque involucra antisimetrizar el producto simétrico $n_{a_1}n_{a_0}$.

Si se tiene un tensor $(0,l)$ arbitrario, y se desea simetrizar o antisimetrizar el conjunto de sus índices etiquetados por los elementos del conjunto ordenado S (en el caso anterior, $S=\{1,0\}$), entonces es necesario primero establecer una convención para expresar las permutaciones involucradas.

Una permutación p sobre un conjunto ordenado S es una regla que intercambia k elementos del conjunto entre sí. Si

s es el número de elementos en S, entonces el número total de permutaciones de sus elementos es $s!$. Estas posibles permutaciones pueden ordenarse de diversas maneras, pero el ordenamiento concreto no es relevante, y basta con utilizar una regla consistente para enumerar las permutaciones. A la $i-$ésima permutación del conjunto S se le denotará por $S_i \equiv p_i(S)$. La permutación inversa de p_i es la permutación p_i^{-1} tal que $p_i^{-1}(p_i(S)) = S$. El signo de la $i-$ésima permutación, σ_i, es positivo si la permutación se obtiene de un número par de intercambios binarios de elementos, y negativo si se obtiene de un número impar de intercambios binarios de elementos. Sea m_{p_i} el número de componente definido como

$$m_{p_i} \equiv \sum_{k\in p_i(\zeta_m)} 2^k. \tag{52}$$

Considerando estas convenciones, la expresión general para la $m-$ésima proyección de un tensor $T\,(0,l)$ simetrizado en los índices con etiquetas S estará dada por

$$^{m}P(\mathrm{Sim}_S(T_{a_{I_l}})) = \frac{n_{a_{\zeta_m}}}{s!}\sum_{i=1}^{s!} {}^{m_{p_i^{-1}}}T_{a_{p_i(Y_m^l)}}, \tag{53}$$

mientras que la antisimetrización correspondiente será

$$^{m}P(\mathrm{Asim}_S(T_{a_{I_l}})) = \frac{n_{a_{\zeta_m}}}{s!}\sum_{i=1}^{s!} \sigma_i\, {}^{m_{p_i^{-1}}}T_{a_{p_i(Y_m^l)}}. \tag{54}$$

2.2.2. *Productos y contracciones*

Si se tienen dos tensores, A de tipo $(0,l_A)$, y B de tipo $(0,l_B)$, el producto tensorial de éstos estará dado por

$$(A\otimes B)_{a_{l_A+l_B-1}\ldots a_0} \equiv A_{a_{l_A+l_B-1}\ldots a_{l_B}} \otimes B_{a_{l_B-1}\ldots a_0}. \tag{55}$$

Entonces, la $m-$éstima componente de proyección estará dada por

$$^{m}(A\otimes B)_{a_{Y_m^{l_A+l_B}}} = {}^{m_A}A_{a_{Y_{m_A}^{l_A}+2^{l_B}}}\ {}^{m_B}B_{a_{Y_{m_B}^{l_B}}}, \tag{56}$$

donde

$$m_B \equiv \sum_{k\in\zeta_m\cap I_{l_B}} 2^k,$$
$$m_A \equiv 2^{-l_B}(m-m_B).$$

La contracción de los índices con etiquetas j y k de un tensor $T_{a_{I_l}}$, donde $i,j\in I_l$, está dada por

$$\begin{aligned} g^{a_j a_k}T_{a_{I_l}} &= (h^{a_j a_k} - n^{a_j}n^{a_k})T_{a_{I_l}} \\ &= \sum_{m=0}^{2^l-1}\Bigg[n_{a_{\zeta_m}} h^{a_j a_k}\,{}^{m}T_{a_{Y_m^l}} \\ &\quad - n^{a_j}n^{a_k}n_{a_{\zeta_m}}\,{}^{m}T_{a_{Y_m^l}}\Bigg] \end{aligned} \tag{57}$$

y para preservar la consistencia de la notación, los índices se deberán volver a etiquetar en el orden estándar (42) tras omitir los índices que se han contraído, es decir, aquellos con las etiquetas i y j. A esta transformación le denominaremos transformación de traza para los fines de esta sección.

Entonces, la $m-$ésima componente de proyección de una contracción será

$$\begin{aligned} {}^{m}(g^{a_j a_k}T_{a_{I_l}}) &= h^{b_j b_k}\,{}^{m_0}T_{a_{l-3}\ldots b_j\ldots b_k\ldots a_0} \\ &\quad - {}^{m_0+2^j+2^k}T_{Y_m^{l-2}}, \end{aligned} \tag{58}$$

donde $m_0 = \sum_{\kappa\in\zeta_{m_0}} 2^\kappa$, y ζ_{m_0} es el conjunto de índices que no incluye a los índices i o j, y que bajo la transformación de traza resulta en el conjunto ζ_m.

Por ejemplo, si se contraen los índices 0 y 2 de un tensor $(0,4)$, la transformación de traza corresponde al siguiente mapeo:

$$1\to 0, \qquad 3\to 1.$$

Así, los conjuntos ζ_m que no incluyen ni a 0 ni a 2 (revisando la Tabla I del Apéndice 6.1) se transforman como

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= \emptyset & &\to & \zeta_0 &= \emptyset, \\ \zeta_2 &= \{1\} & &\to & \zeta_1 &= \{0\}, \\ \zeta_8 &= \{3\} & &\to & \zeta_2 &= \{1\}, \\ \zeta_{10} &= \{3,1\} & &\to & \zeta_3 &= \{1,0\}. \end{aligned}$$

Entonces, la expresión (58) en este caso produce

$$\begin{aligned} T_{a_1 b a_0}{}^{b} &= h^{b_2 b_0}\,{}^{0}T_{a_1 b_2 a_0 b_0} - {}^{5}T_{a_1 a_0} \\ &\quad + n_{a_0}\left(h^{b_2 b_0}\,{}^{2}T_{a_1 b_2 b_0} - {}^{7}T_{a_1}\right) \\ &\quad + n_{a_1}\left(h^{b_2 b_0}\,{}^{8}T_{b_2 a_0 b_0} - {}^{13}T_{a_0}\right) \\ &\quad + n_{a_1}n_{a_0}\left(h^{b_2 b_0}\,{}^{10}T_{b_2 b_0} - {}^{15}T_{\perp}\right). \end{aligned} \tag{59}$$

Para un tensor $T_{a_1 a_0}$, la transformación de traza es trivial y se obtiene de manera inmediata la expresión

$$T_b{}^{b} = \widetilde{T}_b{}^{b} - T_{\perp}. \tag{60}$$

Para construir la contracción de dos tensores, primero se calcula el producto tensorial de ambos, y después la contracción sobre los correspondientes índices. Sin embargo, una fórmula explícita en este caso no resulta de gran utilidad, ya que es más eficiente calcular esta contracción de manera directa.

Una aplicación que motiva expresiones como (56) y (58), y en general la introducción de una notación especial para todas las proyecciones, es que pueden ser implementadas computacionalmente para obtener expresiones $3+1$, en principio, para cualquier tensor covariante, permitiendo manipulaciones de otro modo extenuantes.

Además, estas expresiones permiten obtener fórmulas útiles para aplicaciones típicas de este formalismo, como el cálculo del tensor de Ricci a partir del tensor de Riemann, mediante la expresión (59), obtenida directamente de (58).

3. Geometría Diferencial en el formalismo 3+1

La geometría intrínseca de la hipersuperficie se construye a partir de la métrica inducida h_{ab} sobre la hipersuperficie Σ_t, y su derivada asociada, D_a, que cumple con la condición de compatibilidad con esta métrica,

$$D_a h_{bc} = 0, \tag{61}$$

así como la propiedad de *no-torsión*,

$$D_{[a} D_{b]} f = 0, \tag{62}$$

para toda función escalar f sobre Σ_t.

La curvatura intrínseca de Σ_t está caracterizada por el tensor de Riemann correspondiente a la métrica inducida sobre la hipersuperficie, que está definido por su acción sobre covectores tangentes como

$$^{(3)}R_{abc}{}^{d}\widetilde{\omega}_d \equiv D_a D_b \widetilde{\omega}_c - D_b D_a \widetilde{\omega}_c, \tag{63}$$

y puede mostrarse [5] que consta de combinaciones de derivadas de hasta segundo orden de la métrica h_{ab}. Más adelante se mostrará su relación con el tensor de Riemann del espaciotiempo.

Debe tenerse en cuenta que la geometría intrínseca de sólo una hipersuperficie no contiene la información sobre la geometría de todo el espaciotiempo, ya que, como es de esperarse de un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, se requiere como mínimo, la información del cambio de su geometría al pasar de una hipersuperficie a otra, o en otras palabras, la derivada de la métrica respecto al parámetro t. Esta información está contenida justamente en la *curvatura extrínseca*.

3.1. Curvatura extrínseca

Una forma de caracterizar la geometría del espaciotiempo en una región dada es en términos de una *congruencia geodésica*, que es una familia de geodésicas tipo tiempo tales que en cada punto de esa región pase una y sólo una geodésica de dicha familia. Tomando una geodésica de la congruencia como referencia, se describe el comportamiento de las geodésicas adyacentes al evolucionar de acuerdo al parámetro afín de la curva, es decir, su tiempo propio.

Los vectores tangentes a la congruencia conforman un campo ξ^a, que cumple con la ecuación geodésica,

$$\xi^a \nabla_a \xi^b = 0, \tag{64}$$

y es de norma constante,

$$\xi^a \xi_a = -1, \tag{65}$$

donde esto último implica que

$$\xi_b \nabla_a \xi^b = 0. \tag{66}$$

Considerando (64) y 66, se tiene que

$$B_{ab} \equiv \nabla_a \xi_b \tag{67}$$

es un tensor ortogonal a ξ^a. Este tensor indica cómo cambian las geodésicas ante un desplazamiento *infinitesimal* en una dirección χ^a ortogonal a la congruencia, es decir,

$$\chi^a \nabla_a \xi^b = \chi^a B_a{}^b. \tag{68}$$

El teorema de Frobenius garantiza que si ξ^a es ortogonal a una subvariedad $D-1$ dimensional, como una hipersuperficie de Cauchy, este tensor es también simétrico [5]. Sea entonces una congruencia ortogonal a Σ_t, de modo que sobre ésta (y sólo sobre la hipersuperficie Σ_t), n^a y ξ^a coincidan. ésto implica que las derivadas de ambos campos en cualquier dirección tangente a la hipersuperficie también coinciden.

Por lo tanto,

$$K_{ab} \equiv h_a{}^c \nabla_c n_b = h_a{}^c \nabla_c \xi_b = B_{ab}|_{\Sigma_t}, \tag{69}$$

es un tensor simétrico y tangente a Σ_t al que se denomina curvatura extrínseca. K_{ab} mide qué tanto deja de ser "normal" el vector n^a al transportarlo paralelamente sobre la hipersuperficie de un punto a otro punto cercano.

El tensor K_{ab} contiene la información sobre la evolución de la métrica de una superficie a otra, ya que $2K_{ab}$ es precisamente la derivada de Lie[iv] de la métrica inducida en la dirección de n^a, es decir,

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \pounds_n h_{ab}. \tag{70}$$

4. Operadores derivada

Como se mencionó anteriormente, a la métrica inducida sobre Σ_t está asociada una derivada D_c que cumple con el requisito de compatibilidad métrica con h_{ab}, Ec. (61). Esta derivada está dada por la expresión

$$\begin{aligned} D_c T^{a_{k-1}\ldots a_0}{}_{b_{l-1}\ldots b_0} &\equiv h^{a_{k-1}}{}_{a'_{k-1}} \cdots h^{a_0}{}_{a'_0} \\ &\cdot h_{b_{l-1}}{}^{b'_{l-1}} \cdots h_{b_0}{}^{b'_0} \\ &\cdot h_c{}^{c'} \nabla_{c'} T^{a'_{k-1}\ldots a'_0}{}_{b'_{l-1}\ldots b'_0} \\ &= h^{a_{I_k}}{}_{a'_{I_k}} h_{b_{I_l}}{}^{b'_{I_l}} h_c{}^{c'} \nabla_{c'} T^{a'_{I_k}}{}_{b'_{I_l}} \\ &= {}^{0}\left(\nabla_c T^{a_{k-1}\ldots a_0}{}_{b_{k-1}\ldots b_0}\right). \end{aligned} \tag{71}$$

Nótese que D_a no es una derivada covariante del espaciotiempo, pues sólo se comporta como derivada cuando actúa sobre campos tensoriales tangentes a la hipersuperficie, ya que para campos tensoriales que no son tangentes a Σ_t, en general no cumple con la regla de Leibniz, puesto que el campo tensorial resultante siempre es tangente a Σ_t. Por ejemplo, al actuar sobre $n_a \tilde{\omega}_b$, se tiene

$$\begin{aligned} D_c(n_a \tilde{\omega}_b) &= h_a{}^{a'} h_b{}^{b'} h_c{}^{c'} \nabla_{c'} \left(n_{a'} \tilde{\omega}_{b'}\right) \\ &= K_{ca} \tilde{\omega}_b \neq (D_c n_a) \tilde{\omega}_b + n_a D_c \tilde{\omega}_b. \end{aligned}$$

Esta derivada codifica la componente tangente de la variación de un tensor ante desplazamientos en una dirección tangente a la hipersuperficie, es decir, contiene la información disponible sobre la variación del tensor en términos de datos sobre la hipersuperficie.

Nótese que K_{ab} es justamente la derivada de n^a asociada a la métrica inducida, es decir,

$$K_{ab} = D_a n_b = D_b n_a = D_{(a} n_{b)}. \tag{72}$$

La descomposición 3+1 de la derivada covariante de una función escalar se puede expresar haciendo uso de la derivada recién definida mediante la Ec. (14), quedando

$$\nabla_a f = D_a f + n_a \not{d} f, \tag{73}$$

donde

$$\not{d} \equiv -n^a \nabla_a. \tag{74}$$

El operador $\not{d}$ no es más que un "atajo" definido por conveniencia debido a la frecuencia con que en este formalismo aparece la derivada en la dirección normal $n^a \nabla_a$.

Al aplicar $\not{d}$ a un tensor tangente, este no permanece tangente, por lo que es necesario volver a desarrollar sus proyecciones para recuperar una expresión $3+1$. Se utilizará el símbolo $\widetilde{\not{d}}$ para indicar que después de aplicar $\not{d}$, el tensor resultante se proyecta sobre Σ_t, es decir

$$\widetilde{\not{d}} T_{a_{l-1}\ldots a_0} \equiv h_{a_{l-1}}{}^{a'_{l-1}} \cdots h_{a_0}{}^{a'_0} \not{d} T_{a'_{l-1}\ldots a'_0}. \tag{75}$$

En general, $\not{d} T_{a_{l-1}\ldots a_0}$ se puede separar en 2^l proyecciones con componentes tangentes ${}^m(\not{d} T_{a_{l-1}\ldots a_0})$.

Esta derivada está directamente relacionada con la derivada de Lie bajo el flujo de n^a, $\pounds_n$, cuestión que se aborda en el Apéndice 7.

Finalmente, siempre es posible realizar la sustitución

$$\nabla_a = h_a{}^{a'} \nabla_a + n_a \not{d}, \tag{76}$$

que constituye informalmente la *descomposición* $3+1$ *del índice* de la derivada covariante, pero es importante enfatizar que el segundo término del lado derecho todavía debe desarrollarse en forma $3+1$ sobre sus demás índices cuando se aplica a un tensor para tener una expresión $3+1$, que será el tema de la siguiente sección.

5. Separación 3+1 de las derivadas de tensores.

En esta sección se desarrolla la descomposición $3+1$ de la derivada covariante de un tensor $T_{a_{l-1}\ldots a_0}$. Ya que aparece con frecuencia, es conveniente definir el siguiente campo tangente[v] a Σ_t,

$$u_a \equiv \not{d} n_a = -n^b \nabla_b n_a, \tag{77}$$

de modo que la derivada covariante de n^a queda expresada en forma $3+1$ como

$$\nabla_a n_b = K_{ab} + n_a u_b. \tag{78}$$

El campo vectorial u^a aparece en referencias como [4] y [1], generalmente en términos de la derivada del logaritmo de la función Lapse[vi],

$$u_a = -D_a \ln N, \tag{79}$$

o de la propia derivada de Lie de n, ya que se puede mostrar[vii] que

$$u_a = -\pounds_n n_a. \tag{80}$$

Físicamente, u^a puede interpretarse (salvo por un signo[viii]) como la 4-aceleración de una familia de observadores, como se muestra en el Apéndice 7.

La derivada covariante de un tensor arbitrario incluye información tanto de la variación del tensor como de la curvatura del espaciotiempo, así que su expresión general en el formalismo $3+1$ debe incluir la derivada de la métrica inducida, es decir, la curvatura extrínseca, además de la propia variación del tensor sobre la hipersuperficie. Por este motivo, es necesario primero descomponer en forma $3+1$ la derivada covariante de la métrica inducida,

$$\nabla_a h_{bc} = 2\left[K_{a(b} n_{c)} + n_a n_{(b} u_{c)}\right], \tag{81}$$

así como la del proyector $h_a{}^{a'}$,

$$\begin{aligned}\nabla_b h_a{}^{a'} &= n_a K_b{}^{a'} + n_b n_a u^{a'} \\ &\quad + K_{ba} n^{a'} + n_b u_a n^{a'}.\end{aligned} \tag{82}$$

A partir de la descomposición $3+1$ de un tensor $T_{a_{l-1}\ldots a_0}$, Ec. (48), se hace patente que primero es necesario expresar la derivada covariante de $n_{a_{\zeta_m}} = n_{a_{z_1}} n_{a_{z_2}} \cdots n_{a_{z_s}}$ en forma $3+1$. Aplicando la regla de Leibniz y la expresión (78) se obtiene

$$\nabla_{a_l} n_{a_{\zeta_m}} = \sum_{k\in\zeta_m} n_{a_{\zeta_m - \{k\}}} \Big[\underbrace{K_{a_l a_k}}_{m-2^k} + n_{a_l} \underbrace{u_{a_k}}_{m+2^l-2^k}\Big]. \tag{83}$$

Las etiquetas de las componentes de proyección resultantes indican, para el primer término dentro del paréntesis, que el $k-$ésimo índice, que antes era *normal*, ahora es tangente y por lo tanto corresponde a la componente de proyección con etiqueta $m' = \sum_{\kappa\in\zeta_m - \{k\}} 2^\kappa = m - 2^k$, y para el segundo término ocurre lo mismo, salvo que en este caso, el índice que acompaña a la derivada covariante en la posición l ahora es normal y por ende se agrega 2^l a la etiqueta de la componente.

Como además, cada componente de proyección es tangente, éstas se pueden desarrollar, redundantemente, como

$$\begin{aligned}{}^m T_{a_{Y^l_m}} &= h_{a_{Y^l_m}}{}^{a'_{Y^l_m}}\, {}^m T_{a'_{Y^l_m}} \\ &= h_{a_{y_1}}{}^{a'_{y_1}} \cdots h_{a_{y_s}}{}^{a'_{y_s}}\, {}^m T_{a'_{y_1}\cdots a'_{y_s}}.\end{aligned} \tag{84}$$

El motivo para realizar este desarrollo es que permite obtener automáticamente una expresión $3+1$ al aplicar la derivada covariante a ${}^{m}T_{a_{Y^{l}_{m}}}$, pues a partir de (82), y aplicando la regla de Leibniz, se obtiene

$$\begin{aligned}\nabla_{a_l}{}^{m}T_{a_{Y^l_m}} &= {}^{m}T_{a'_{Y^l_m}}(\nabla_{a_l}h_{a_{Y^l_m}}{}^{a'_{Y^l_m}}) + h_{a_{Y^l_m}}{}^{a'_{Y^l_m}}\nabla_{a_l}{}^{m}T_{a_{Y^l_m}} \\ &= \sum_{k\in Y^l_m} n_{a_k}\Big(\underbrace{K_{a_l}{}^{a_k}\,{}^{m}T_{a_{Y^l_m}}}_{m+2^k} + n_{a_l}\underbrace{u^{a_k}\,{}^{m}T_{a_{Y^l_m}}}_{m+2^k+2^l}\Big) + \underbrace{D_{a_l}{}^{m}T_{a_{Y^l_m}}}_{m} + n_{a_l}\underbrace{\tilde{\not{d}}\,{}^{m}T_{a_{Y^l_m}}}_{m+2^l},\end{aligned} \tag{85}$$

donde los términos de la segunda línea de (82) se han cancelado en cada término puesto que los índices primados van contraídos con el tensor tangente ${}^{m}T_{a'_{Y^l_m}}$, y se ha empleado la sustitución (76).

A continuación se sintetiza el procedimiento de escribir la derivada covariante de un tensor arbitrario en forma $3+1$. Al calcular la derivada covariante de la expansión $3+1$ general, Ec. (48), se tendrá

$$\nabla_{a_l}T_{a_{I_l}} = \nabla_{a_l}\left[\sum_{m=0}^{2^l-1} n_{a_{\zeta_m}}\,{}^{m}T_{a_{Y^l_m}}\right] = \sum_{m=0}^{2^l-1}\Big[(\nabla_{a_l}n_{a_{\zeta_m}})\,{}^{m}T_{a_{Y^l_m}} + n_{a_{\zeta_m}}\nabla_{a_l}{}^{m}T_{a_{Y^l_m}}\Big], \tag{86}$$

y sustituyendo (83) y (85) en (86) se obtiene

$$\begin{aligned}\nabla_{a_l}T_{a_{I_l}} = \sum_{m=0}^{2^l-1}\Bigg\{&\sum_{k\in\zeta_m} n_{a_{\zeta_m-\{k\}}}\Big[\underbrace{K_{a_l a_k}\,{}^{m}T_{a_{Y^l_m}}}_{m-2^k} + n_{a_l}\underbrace{u_{a_k}\,{}^{m}T_{a_{Y^l_m}}}_{m+2^l-2^k}\Big] + n_{a_{\zeta_m}}\Big[\sum_{k\in Y^l_m} n_{a_k}\Big(\underbrace{K_{a_l}{}^{a_k}\,{}^{m}T_{a_{Y^l_m}}}_{m+2^k} + n_{a_l}\underbrace{u^{a_k}\,{}^{m}T_{a_{Y^l_m}}}_{m+2^k+2^l}\Big) \\ &+ \underbrace{D_{a_l}{}^{m}T_{a_{Y^l_m}}}_{m} + n_{a_l}\underbrace{\tilde{\not{d}}\,{}^{m}T_{a_{Y^l_m}}}_{m+2^l}\Big]\Bigg\},\end{aligned}$$

donde al reagrupar los términos por componente queda finalmente la expresión

$$\begin{aligned}\nabla_{a_l}T_{a_{I_l}} = \sum_{m=0}^{2^{l+1}-1} n_{a_{\zeta_m}}\Bigg\{&D_{a_l}{}^{m}T_{a_{Y^l_m}} + \tilde{\not{d}}\,{}^{m-2^l}T_{a_{Y^l_{m-2^l}}} + \sum_{k\in\zeta_m\cap I_l}\Big(K_{a_l}{}^{a_k}\,{}^{m-2^k}T_{a_{Y^l_{m-2^k}}} + u^{a_k}\,{}^{m-2^k-2^l}T_{a_{Y^l_{m-2^k-2^l}}}\Big) \\ &+ \sum_{k\in Y^l_m}\Big(K_{a_l a_k}\,{}^{m+2^k}T_{a_{Y^l_{m+2^k}}} + u_{a_k}\,{}^{m+2^k-2^l}T_{a_{Y^l_{m+2^k-2^l}}}\Big)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{87}$$

La fórmula (87) se puede aplicar, por ejemplo, para calcular la derivada de un covector. Para ello, se calcula cada componente de proyección por separado,

$$\begin{aligned}{}^{0}(\nabla_{a_1}\omega_{a_0}) &= D_{a_1}\underbrace{{}^{0}\omega_{a_{Y^1_0}}}_{{}^{0}\omega_{a_0}=\tilde{\omega}_{a_0}} + \tilde{\not{d}}(\underbrace{{}^{-2^1}\omega_{a_{Y^1_{-2^1}}}}_{0}) + \sum_{k\in\zeta_0\cap I_1=\emptyset}\underbrace{\Big(K_{a_1}{}^{a_k}\,{}^{-2^k}\omega_{a_{Y^1_{-2^k}}} + u^{a_k}\,{}^{-2^k-2^1}\omega_{a_{Y^1_{-2^k-2^1}}}\Big)}_{0} \\ &+ \sum_{k\in Y^1_0=\{0\}}\Big(\underbrace{K_{a_1a_k}}_{K_{a_1a_0}}\underbrace{{}^{2^k}\omega_{a_{Y^1_{2^k}}}}_{{}^{1}\omega_{a_{Y^1_1}}=\omega_\perp} + \underbrace{u_{a_k}}_{u_{a_0}}\underbrace{{}^{2^k-2^1}\omega_{a_{Y^1_{2^k-2^1}}}}_{{}^{-1}\omega_{a_{Y^1_{-1}}}=0}\Big) \\ {}^{0}(\nabla_{a_1}\omega_{a_0}) &= D_{a_1}\tilde{\omega}_{a_0} + K_{a_1a_0}\omega_\perp,\end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned}{}^{1}(\nabla_{a_1}\omega_{\cancel{a_0}}) &= D_{a_1}\underbrace{{}^{1}\omega_{a_{Y^1_1}}}_{\omega_\perp} + \tilde{\not{d}}(\underbrace{{}^{-1}\omega_{a_{Y^1_{-1}}}}_{0}) + \sum_{k\in\zeta_1\cap I_1=\{0\}}\Big(\underbrace{K_{a_1}{}^{a_k}}_{K_{a_1}{}^{a_0}}\underbrace{{}^{1-2^k}\omega_{a_{Y^1_{1-2^k}}}}_{{}^{0}\omega_{a_{Y^1_0}}=\widetilde{\omega}_{a_0}} + \underbrace{u^{a_k}}_{u^{a_0}}\underbrace{{}^{-2^k-1}\omega_{a_{Y^1_{-2^k-1}}}}_{0}\Big) \\ &+ \sum_{k\in Y^1_1=\emptyset}\Big(K_{a_1a_k}\,{}^{1+2^k}\omega_{a_{Y^1_{1+2^k}}}\underbrace{+u_{a_k}\,{}^{2^k-1}\omega_{a_{Y^1_{2^k-1}}}\Big)}_{0} \\ {}^{1}(\nabla_{a_1}\omega_{\cancel{a_0}}) &= D_{a_1}\omega_\perp + K_{a_1}{}^{a'_0}\widetilde{\omega}_{a'_0},\end{aligned} \tag{89}$$

$$
\begin{aligned}
{}^{2}\left(\nabla_{\cancel{a_1}}\omega_{a_0}\right) = {} & D_{a_1}\underbrace{{}^{2}\omega_{a_{Y^1_2}}}_{0} + \tilde{\not{d}}\underbrace{{}^{2-2^1}\omega_{a_{Y^1_{2-2^1}}}}_{\widetilde{\omega}_{a_0}} + \sum_{k\in\zeta_2\cap I_1=\emptyset}\left(K_{a_1}{}^{a_k}\,{}^{2-2^k}\omega_{a_{Y^1_{2-2^k}}}\underbrace{+u^{a_k}\,{}^{-2^k}\omega_{a_{Y^1_{-2^k}}}}_{0}\right)\\
& + \sum_{k\in Y^1_2=\{0\}}\left(\underbrace{K_{a_1a_k}}_{K_{a_1a_0}}\underbrace{{}^{2+2^k}\omega_{a_{Y^1_{2+2^k}}}}_{0} + \underbrace{u_{a_k}}_{u_{a_0}}\underbrace{{}^{2^k}\omega_{a_{Y^1_{2^k}}}}_{\omega_\perp}\right) \; {}^{2}\left(\nabla_{\cancel{a_1}}\omega_{a_0}\right) = \tilde{\not{d}}\widetilde{\omega}_{a_0} + u_{a_0}\omega_\perp,
\end{aligned}
\tag{90}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{3}\left(\nabla_{\cancel{a_1}}\omega_{\cancel{a_0}}\right) = {} & D_{a_1}\underbrace{{}^{3}\omega_{a_{Y^1_3}}}_{0} + \tilde{\not{d}}\underbrace{{}^{1}\omega_{a_{Y^1_1}}}_{\omega_\perp} + \sum_{k\in\zeta_3\cap I_1=\{0\}}\left(\underbrace{K_{a_1}{}^{a_k}}_{K_{a_1}{}^{a_0}}\underbrace{{}^{3-2^k}\omega_{a_{Y^1_{3-2^k}}}}_{0} + \underbrace{u^{a_k}}_{u^{a_0}}\underbrace{{}^{1-2^k}\omega_{a_{Y^1_{1-2^k}}}}_{\widetilde{\omega}_{a_0}}\right)\\
& + \sum_{k\in Y^1_3=\emptyset}\left(K_{a_1a_k}\,{}^{3+2^k}\omega_{a_{Y^1_{3+2^k}}}\underbrace{+u_{a_k}\,{}^{1+2^k}\omega_{a_{Y^1_{1+2^k}}}}_{0}\right) \; {}^{3}\left(\nabla_{\cancel{a_1}}\omega_{\cancel{a_0}}\right) = \tilde{\not{d}}\omega_\perp + u^{a'_0}\widetilde{\omega}_{a'_0}.
\end{aligned}
\tag{91}
$$

En estas expresiones, las componentes de proyección se muestran con los índices normales cancelados en el lado izquierdo para mantener la consistencia de la notación a ambos lados de la igualdad. Finalmente, al realizar la suma de los términos (88)-(91) de acuerdo con la expresión (87), se obtiene la descomposición $3+1$ de la derivada covariante de un covector,

$$
\begin{aligned}
\nabla_{a_1}\omega_{a_0} = {} & {}^{0}\left(\nabla_{a_1}\omega_{a_0}\right) + n_{a_0}\,{}^{1}\left(\nabla_{a_1}\omega_{\cancel{a_0}}\right) + n_{a_1}\,{}^{2}\left(\nabla_{\cancel{a_1}}\omega_{a_0}\right) + n_{a_1}n_{a_0}\,{}^{3}\left(\nabla_{\cancel{a_1}}\omega_{\cancel{a_0}}\right) = D_{a_1}\widetilde{\omega}_{a_0} + K_{a_1a_0}\omega_\perp\\
& + n_{a_0}\left(D_{a_1}\omega_\perp + K_{a_1}{}^{a'_0}\,\widetilde{\omega}_{a'_0}\right) + n_{a_1}\left(\widetilde{\not{d}}\widetilde{\omega}_{a_0} + u_{a_0}\omega_\perp\right) + n_{a_1}n_{a_0}\left(\not{d}\omega_\perp + u^{a'_0}\widetilde{\omega}_{a'_0}\right).
\end{aligned}
\tag{92}
$$

Utilizando este mismo procedimiento para un tensor de rango $(0,2)$, se obtiene la descomposición $3+1$ de $\nabla_{a_2}T_{a_1a_0}$,

$$
\begin{aligned}
\nabla_{a_2}T_{a_1a_0} = {} & {}^{0}(\nabla_{a_2}T_{a_1a_0}) + n_{a_0}\,{}^{1}(\nabla_{a_2}T_{a_1\cancel{a_0}}) + n_{a_1}\,{}^{2}(\nabla_{a_2}T_{\cancel{a_1}a_0}) + n_{a_1}n_{a_0}\,{}^{3}(\nabla_{a_2}T_{\cancel{a_1}\cancel{a_0}}) + n_{a_2}\,{}^{4}(\nabla_{\cancel{a_2}}T_{a_1a_0})\\
& + n_{a_2}n_{a_0}\,{}^{5}(\nabla_{\cancel{a_2}}T_{a_1\cancel{a_0}}) + n_{a_2}n_{a_1}\,{}^{6}(\nabla_{\cancel{a_2}}T_{\cancel{a_1}a_0}) + n_{a_2}n_{a_1}n_{a_0}\,{}^{7}(\nabla_{\cancel{a_2}}T_{\cancel{a_1}\cancel{a_0}}),
\end{aligned}
\tag{93}
$$

donde sus componentes de proyección son

$$
{}^{0}(\nabla_{a_2}T_{a_1a_0}) = D_{a_2}\widetilde{T}_{a_1a_0} + K_{a_2a_0}\grave{\widetilde{\tau}}_{a_1} + K_{a_2a_1}\acute{\widetilde{\tau}}_{a_0},
\tag{94}
$$

$$
{}^{1}(\nabla_{a_2}T_{a_1\cancel{a_0}}) = K_{a_2}{}^{a'_0}\widetilde{T}_{a_1a'_0} + D_{a_2}\grave{\widetilde{\tau}}_{a_1} + K_{a_2a_1}T_\perp,
\tag{95}
$$

$$
{}^{2}(\nabla_{a_2}T_{\cancel{a_1}a_0}) = K_{a_2}{}^{a'_1}\widetilde{T}_{a'_1a_0} + D_{a_2}\acute{\widetilde{\tau}}_{a_0} + K_{a_2a_0}T_\perp,
\tag{96}
$$

$$
{}^{3}(\nabla_{a_2}T_{\cancel{a_1}\cancel{a_0}}) = K_{a_2}{}^{a'_1}\grave{\widetilde{\tau}}_{a'_1} + K_{a_2}{}^{a'_0}\acute{\widetilde{\tau}}_{a'_0} + D_{a_2}T_\perp,
\tag{97}
$$

$$
{}^{4}(\nabla_{\cancel{a_2}}T_{a_1a_0}) = \widetilde{\not{d}}\widetilde{T}_{a_1a_0} + \grave{\widetilde{\tau}}_{a_1}u_{a_0} + u_{a_1}\acute{\widetilde{\tau}}_{a_0},
\tag{98}
$$

$$
{}^{5}(\nabla_{\cancel{a_2}}T_{a_1\cancel{a_0}}) = u^{a'_0}\widetilde{T}_{a_1a'_0} + \widetilde{\not{d}}\grave{\widetilde{\tau}}_{a_1} + u_{a_1}T_\perp,
\tag{99}
$$

$$
{}^{6}(\nabla_{\cancel{a_2}}T_{\cancel{a_1}a_0}) = u^{a'_1}\widetilde{T}_{a'_1a_0} + \widetilde{\not{d}}\acute{\widetilde{\tau}}_{a_0} + u_{a_0}T_\perp,
\tag{100}
$$

$$
{}^{7}(\nabla_{\cancel{a_2}}T_{\cancel{a_1}\cancel{a_0}}) = u^{a'_1}\grave{\widetilde{\tau}}_{a'_1} + u^{a'_0}\acute{\widetilde{\tau}}_{a'_0} + \not{d}T_\perp.
\tag{101}
$$

Aquí se ha empleado la notación de las Ecs. (29)-(34) para las componentes de proyección de T_{a1a_0}.

En la siguiente sección se empleará el formalismo hasta aquí desarrollado para calcular los tensores de Riemann y Ricci del espaciotiempo en términos de los tensores de Riemann y Ricci sobre la hipersuperficie, así como la métrica inducida, el tensor de curvatura extrínseca y el campo de vectores normales y sus derivadas.

6. Tensores de curvatura y ecuación de Einstein

6.1. Tensor de Riemann

El tensor de curvatura de Riemann $R_{abc}{}^{d}$ se define [5] en términos de su acción sobre un campo de covectores ω_d como

$$
R_{abc}{}^{d}\,\omega_d = \nabla_a\nabla_b\,\omega_c - \nabla_b\nabla_a\,\omega_c.
\tag{102}
$$

Este tensor caracteriza la curvatura de una variedad en el sentido de que su anulacion en cualquier región del espacio-tiempo es condición necesaria y suficiente para la existencia de coodenadas en las que la metrica toma la forma minkowskiana (es decir, $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$) en esa región [7], o en otras palabras, que el espaciotiempo en cualquier región es *plano* si y solo si en ella se anula el tensor de Riemann.

Tomando en cuenta que se está empleando la conexión métrica sin torsión, este tensor cumple con las siguientes propiedades,

$$R_{abc}{}^{d} = -R_{bac}{}^{d}, \tag{103}$$

$$R_{[abc]}{}^{d} = 0, \tag{104}$$

$$R_{abcd} = -R_{abdc}, \tag{105}$$

$$\nabla_{[a}\, R_{bc]d}{}^{e} = 0, \tag{106}$$

donde a (106) se le denomina identidad de Bianchi. A partir de estas propiedades, también se puede derivar la siguiente simetría para el tensor de Riemann covariante,

$$R_{abcd} = R_{cdab}. \tag{107}$$

El procedimiento que se empleará para expresar el tensor de Riemann en forma $3+1$ a partir de su definición, será el siguiente:

1. Expresar en forma $3+1$ al tensor $B_{bcd} \equiv \nabla_b \nabla_c \omega_d$, donde ω_d es un covector arbitrario.

2. Antisimetrizar B_{bcd} sobre los índices b y c, de modo que se tiene
$$R_{bcd}{}^{e}\omega_e = 2B_{[bc]d}. \tag{108}$$

3. Considerando los casos en que ω_e es tangente a Σ_t (es decir, cuando $\omega_\perp = 0$) y cuando es ortogonal (es decir, cuando $\widetilde{\omega}_e = 0$), se obtiene de las expresiones de las componentes de proyección de (108), la forma de algunas componentes del tensor de Riemann $R_{bcd}{}^{e}$.

4. El resto de las componentes se obtienen a partir de las propiedades y simetrías del tensor de Riemann (103)-(107).

A continuación se detallan cada uno de estos pasos.

Retornando a la notación de índices usual[ix], la expresión para $\nabla_c\omega_d$ está dada por (92), y sustituyendo la expresión para las componentes de este tensor en (93), se obtienen las componentes de proyección de $B_{bcd} \equiv \nabla_b\nabla_c\omega_d$,

$$\begin{aligned}
{}^{0}(B_{bcd}) &= D_b D_c \widetilde{\omega}_d + (D_b\omega_\perp)K_{cd} \\
&\quad + \omega_\perp D_b K_{cd} + K_{bd}K_c{}^{d'}\widetilde{\omega}_{d'} \\
&\quad + K_{bd}D_c\omega_\perp + K_{bc}\widetilde{\not{d}}\,\widetilde{\omega}_d + K_{bc}u_d\omega_\perp,
\end{aligned} \tag{109}$$

$$\begin{aligned}
{}^{1}(B_{bc}) &= K_b{}^{d'}D_c\widetilde{\omega}_{d'} + K_b{}^{d'}K_{cd'}\omega_\perp \\
&\quad + \widetilde{\omega}_{d'}D_bK_c{}^{d'} + (D_b\widetilde{\omega}_{d'})K_c{}^{d'} \\
&\quad + D_bD_c\omega_\perp + K_{bc}(u^{d'}\widetilde{\omega}_{d'} + \not{d}\,\omega_\perp),
\end{aligned} \tag{110}$$

$$\begin{aligned}
{}^{2}(B_{bd}) &= K_b{}^{c'}D_{c'}\widetilde{\omega}_d + K_b{}^{c'}K_{c'd}\omega_\perp + D_b\widetilde{\not{d}}\,\widetilde{\omega}_d \\
&\quad + (D_b\omega_\perp)u_d + \omega_\perp D_bu_d + K_{bd}\not{d}\,\omega_\perp,
\end{aligned} \tag{111}$$

$$\begin{aligned}
{}^{3}(B_b) &= K_b{}^{c'}K_{c'}{}^{d'}\widetilde{\omega}_{d'} + K_b{}^{c'}D_{c'}\omega_\perp \\
&\quad + K_b{}^{d'}\widetilde{\not{d}}\,\widetilde{\omega}_{d'} + \omega_\perp K_b{}^{d'}u_{d'} \\
&\quad + u^{d'}D_b\widetilde{\omega}_{d'} + \widetilde{\omega}_{d'}D_bu^{d'} + D_b\not{d}\,\omega_\perp,
\end{aligned} \tag{112}$$

$$\begin{aligned}
{}^{4}(B_{cd}) &= \widetilde{\not{d}}\,D_c\widetilde{\omega}_d + K_{cd}\not{d}\,\omega_\perp \\
&\quad + \omega_\perp\widetilde{\not{d}}\,K_{c'd'} + K_c{}^{d'}\widetilde{\omega}_{d'}u_d \\
&\quad + (D_c\omega_\perp)u_d + u_c\widetilde{\not{d}}\,\widetilde{\omega}_d + \omega_\perp u_cu_d,
\end{aligned} \tag{113}$$

$$\begin{aligned}
{}^{5}(B_c) &= u^{d'}D_c\widetilde{\omega}_{d'} + \omega_\perp K_{cd'}u^{d'} \\
&\quad + \widetilde{\omega}_{d'}\widetilde{\not{d}}\,K_c{}^{d'} + K_c{}^{d'}\widetilde{\not{d}}\,\widetilde{\omega}_{d'} \\
&\quad + \widetilde{\not{d}}\,D_{c'}\omega_\perp + u_c(u^{d'}\widetilde{\omega}_{d'} + \not{d}\,\omega_\perp),
\end{aligned} \tag{114}$$

$$\begin{aligned}
{}^{6}(B_d) &= u^{c'}D_{c'}\widetilde{\omega}_d + \omega_\perp K_{c'd}u^{c'} \\
&\quad + \widetilde{\not{d}}^{\,2}\widetilde{\omega}_{d'} + u_d\not{d}\,\omega_\perp \\
&\quad + \omega_\perp\widetilde{\not{d}}\,u_d + u_d(u^{d'}\widetilde{\omega}_{d'} + \not{d}\,\omega_\perp),
\end{aligned} \tag{115}$$

$$\begin{aligned}
{}^{7}(B) &= K_{c'}{}^{d'}u^{c'}\widetilde{\omega}_{d'} + u^{c'}D_{c'}\omega_\perp + u^{d'}\widetilde{\not{d}}\,\widetilde{\omega}_{d'} \\
&\quad + \omega_\perp u^{d'}u_{d'} + u^{d'}\widetilde{\omega}_{d'} + \not{d}\,\omega_\perp.
\end{aligned} \tag{116}$$

El siguiente paso es antisimetrizar los primeros dos índices de B_{bcd}, en donde todas las proyecciones que son simultáneamente normales a Σ_t en los índices b y c se anulan, quedando el desarrollo $3+1$ de $B_{[bc]d}$ como

$$\begin{aligned}
B_{[bc]d} &= \widetilde{B}_{[bc]d} + {}^{1}B_{[bc]}n_d + n_{[b}\,{}^{4}B_{c]d} \\
&\quad - n_{[b}\,{}^{2}B_{c]d} + (n_{[b}\,{}^{5}B_{c]} - n_{[b}\,{}^{3}B_{c]})n_d,
\end{aligned} \tag{117}$$

siendo las componentes de proyección relevantes,

$$\begin{aligned}
{}^{0}B_{[bc]d} &= \frac{1}{2}\,{}^{(3)}R_{bcd}{}^{e}\widetilde{\omega}_e + \omega_\perp D_{[b}K_{c]d} \\
&\quad + K_{d[b}K_{c]}{}^{d'}\widetilde{\omega}_{d'},
\end{aligned} \tag{118}$$

$$\begin{aligned}
{}^{1}B_{[bc]} &= K_{[b}{}^{d'}K_{c]d'}\omega_\perp + \widetilde{\omega}_{d'}D_{[b}K_{c]}{}^{d'} \\
&\quad + D_{[b}D_{c]}\omega_\perp,
\end{aligned} \tag{119}$$

$$\begin{aligned}
{}^4B_{cd} - {}^2B_{cd} &= \widetilde{d}\, D_c\widetilde{\omega}_d - D_c\widetilde{d}\,\widetilde{\omega}_d + u_c\widetilde{d}\,\widetilde{\omega}_d \\
&+ K_c{}^{d'}(\widetilde{\omega}_{d'}u_d - D_{d'}\widetilde{\omega}_d) \\
&+ \omega_\perp(\widetilde{d}\,K_{cd} - D_cu_d) \\
&+ \omega_\perp(u_cu_d - K_c{}^{c'}K_{c'd}), \qquad (120)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^5B_c - {}^3B_c &= \widetilde{\omega}_{d'}(\widetilde{d}\,K_c{}^{d'} - D_cu^{d'}) \\
&+ \widetilde{d}\,D_c\omega_\perp - D_c\widetilde{d}\,\omega_\perp \\
&+ (u_cu^{d'} - K_c{}^{c'}K_{c'}{}^{d'})\widetilde{\omega}_{d'} \\
&+ u_c\widetilde{d}\,\omega_\perp - K_c{}^{c'}D_{c'}\omega_\perp. \qquad (121)
\end{aligned}$$

donde ${}^{(3)}R_{bcd}{}^e$ es el tensor de Riemann correspondiente a la metrica inducida sobre la hipersuperficie, previamente definido en (63). Las demás componentes de proyección se obtienen de intercambiar índices y signos, a partir de estas componentes, de modo que se puede reescribir (108) como

$$\begin{aligned}
R_{bcd}{}^e\omega_e &= \widetilde{B}_{bcd} - \widetilde{B}_{cbd} \\
&+ ({}^1B_{bc} - {}^1B_{cb})n_d \\
&+ n_c({}^2B_{bd} - {}^4B_{bd}) \\
&+ ({}^3B_b - {}^5B_b)n_cn_d \\
&+ n_b({}^4B_{cd} - {}^2B_{cd}) \\
&+ n_b({}^5B_c - {}^3B_c)n_d. \qquad (122)
\end{aligned}$$

Las componentes de proyección del tensor de Riemann serán entonces,

$$\begin{aligned}
R_{bcd}{}^e &= \widetilde{R}_{bcd}{}^e + {}^1R_{bcd}n^e + {}^2R_{bc}{}^en_d \\
&+ {}^3R_{bc}n_dn^e + {}^4R_{bd}{}^en_c \\
&+ {}^5R_{bd}n_cn^e + {}^6R_b{}^en_cn_d \\
&- n_b({}^4R_{cd}{}^e + {}^5R_{cd}n^e + {}^6R_c{}^en_d), \qquad (123)
\end{aligned}$$

notando que se trata de un tensor de rango $(1,3)$, por lo que para emplear las expresiones (118)-(121) considerando la etiqueta de componente que les asigna la expresión (122), es necesario incrementar en uno el valor posicional de todas las componentes, re-etiquetando cada una de ellas de acuerdo con la regla

$$m = \sum_{k\in\zeta_m} 2^k \qquad \rightarrow \quad m' = q + \sum_{k\in\zeta_m} 2^{k+1},$$

donde $q = 0$ ó $q = 1$ dependiendo de si ω_e es tangente u ortogonal a la superficie, respectivamente. Por ejemplo, tomando la componente de proyección $m = 0$ de $B_{[bc]d}$, (118), se obtienen las componentes de proyección $m' = 0$ y $m' = 1$. Explícitamente, cuando el covector es tangente, $\omega_e = \widetilde{\omega}_e$ y $\omega_\perp = 0$, al sustituir en (118) se tiene

$${}^0\left(R_{bcd}{}^e\widetilde{\omega}_e\right) = 2\left(\frac{1}{2}\,{}^{(3)}R_{bcd}{}^e + K_{d[b}K_{c]}{}^e\right)\widetilde{\omega}_e,$$

y de aquí que,

$${}^0R_{bcd}{}^e = {}^{(3)}R_{bcd}{}^e + 2K_{d[b}K_{c]}{}^e. \qquad (124)$$

Nótese que esta ecuación se puede reescribir como

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d = \widetilde{R}_{abc}{}^d - K_{ac}K_b{}^d + K_{bc}K_a{}^d. \qquad (125)$$

A esta ecuación se le denomina primera relación de Gauss-Codacci, y relaciona al tensor de Riemann de la métrica inducida sobre la hipersuperficie, que representa a la curvatura intrínseca de Σ_t, el tensor de curvatura extrínseca y el tensor de Riemann de la métrica del espaciotiempo.

Cuando el covector es ortogonal, $\widetilde{\omega}_e = 0$, $\omega_e = n_e\omega_\perp$, y al sustituir en (118) se obtiene

$$\begin{aligned}
h_b{}^{b'}h_c{}^{c'}h_d{}^{d'}R_{b'c'd'}{}^e(-n_e)\omega_\perp \equiv {}^1R_{bcd}\omega_\perp \\
= -2\left(D_{[b}K_{c]d}\right)\omega_\perp,
\end{aligned}$$

de donde se lee

$${}^1R_{bcd} = D_cK_{bd} - D_bK_{cd}. \qquad (126)$$

Siguiendo un procedimiento análogo para las demás componentes de proyección de B_{bcd}, se obtienen las siguientes componentes de proyección del tensor de Riemann,

$${}^2R_{bc}{}^e = D_bK_c{}^e - D_cK_b{}^e, \qquad (127)$$

$${}^5R_{bd} = \widetilde{d}\,K_{bd} - D_bu_d + u_bu_d - K_b{}^{b'}K_{b'd}, \qquad (128)$$

$${}^6R_b{}^e = -\widetilde{d}\,K_b{}^e + D_bu^e - u_bu^e + K_b{}^{b'}K_{b'}{}^e. \qquad (129)$$

El último paso es obtener las componentes de proyección faltantes a partir de las proyecciones (124)-(129). Las componentes de proyección ${}^3R_{bc}$ y ${}^7R_b$ se cancelan idénticamente debido a que las propiedades (103) y (107) implican para estas proyecciones la antisimetrización de índices nulos. Asimismo, aplicado directamente la propiedad (107), se obtiene la componente con etiqueta $m = 4$,

$${}^4R_{bd}{}^e = h^{ef}\,{}^1R_{dfb} = D^eK_{bd} - D_dK_b{}^e, \qquad (130)$$

y el resto de las componentes se pueden obtener a partir de la propiedad (103),

$${}^8R_{cd}{}^e = -\,{}^4R_{cd}{}^e \qquad (131)$$

$${}^9R_{cd} = -\,{}^5R_{cd} \qquad (132)$$

$${}^{10}R_c{}^e = -\,{}^6R_c{}^e \qquad (133)$$

$${}^{11}R_c = -\,{}^7R_c = 0. \qquad (134)$$

Con esto concluye el desarrollo $3+1$ del tensor de Riemann, pues se han expresado todas las componentes de proyección presentes en (123). Las componentes de proyección que no aparecen en (123) son idénticamente nulas debido a las simetrías del tensor de Riemann.

6.2. Tensor de Ricci y escalar de curvatura

A partir del desarrollo $3+1$ del tensor de Riemann, es directa la expresión $3+1$ del tensor de Ricci,

$$R_{bd} = R_{bcd}{}^{c}, \tag{135}$$

gracias a la fórmula (59),

$$\begin{aligned} R_{bcd}{}^{c} &= \widetilde{R}_{bcd}{}^{c} - {}^{5}R_{bd} \\ &+ n_d \left({}^{2}R_{bc}{}^{c} - {}^{7}R_b \right) \\ &+ n_b \left({}^{8}R_{cd}{}^{c} - {}^{13}R_d \right) \\ &+ n_b n_d \left({}^{10}R_c{}^{c} - {}^{15}R_\perp \right). \end{aligned} \tag{136}$$

Sustituyendo las expresiones (124)-(134), se obtiene finalmente

$$\widetilde{R}_{ab} = {}^{(3)}R_{ab} + K_{ab}K - \widetilde{\not{d}}K_{ab} - u_a u_b + D_a u_b, \tag{137}$$

$$\widetilde{\mathfrak{R}}_b \equiv {}^{1}R_b = {}^{2}R_b = D_b K - D_c K_b{}^{c}, \tag{138}$$

$$R_\perp = \not{d}K - D_a u^a + u_a u^a - K_{ab}K^{ab}. \tag{139}$$

A la Ec. (138) se les denomina segunda relación de Gauss-Codazzi porque relaciona el tensor de curvatura extrínseca de la hipersuperficie con el tensor de curvatura de Ricci del espaciotiempo.

Gracias a la fórmula (60), se obtiene inmediatamente una expresión en términos de los objetos del formalismo $3+1$ para el escalar de curvatura de Ricci,

$$R \equiv R^{a}{}_{a}, \tag{140}$$

es decir,

$$R = {}^{(3)}R + K^2 - 2u_a u^a + 2D_a u^a - 2\not{d}K + K_{ab}K^{ab}. \tag{141}$$

6.3. Ecuación de Einstein

Considerando la descomposición del tensor de Ricci, Ecs. (138), (139), (137), y del escalar de curvatura, (141), se puede expresar el tensor de Einstein

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R, \tag{142}$$

en forma $3+1$,

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_{ab} &= {}^{(3)}G_{ab} + K\left(K_{ab} - \frac{1}{2}h_{ab}K\right) \\ &+ h_{ab}\left(u_c u^c - D_c u^c - \frac{1}{2}K_{cd}K^{cd}\right) \\ &+ D_a u_b - u_a u_b, \end{aligned} \tag{143}$$

$$\widetilde{\mathfrak{G}}_a = D_a K - D_b K_a{}^{b}, \tag{144}$$

$$G_\perp = \frac{1}{2}\left({}^{(3)}R + K^2 - K_{ab}K^{ab}\right). \tag{145}$$

Suponiendo que la separación $3+1$ para el tensor momento energía es de la forma,

$$T_{ab} = S_{ab} + j_{(a}n_{b)} + n_a n_b \rho,$$

donde S_{ab}, j_a y ρ son respectivamente el tensor de esfuerzos, el vector de flujo de densidad de momento y la densidad de energía de la materia en el marco de los observadores Eulerianos^{x}, se tiene que la ecuación de Einstein

$$G_{ab} = 8\pi G_N T_{ab}, \tag{146}$$

equivale a las ecuaciones

$$\begin{aligned} 8\pi G_N S_{ab} &= {}^{(3)}G_{ab} + K\left(K_{ab} - \frac{1}{2}h_{ab}K\right) \\ &+ h_{ab}\left(u_c u^c - D_c u^c - \frac{1}{2}K_{cd}K^{cd}\right) \\ &+ D_a u_b - u_a u_b, \end{aligned} \tag{147}$$

$$8\pi G_N j_a = D_a K - D_b K_a{}^{b}, \tag{148}$$

$$8\pi G_N \rho = \frac{1}{2}\left({}^{(3)}R + K^2 - K_{ab}K^{ab}\right). \tag{149}$$

Como las Ecs. (148) y (149) representan condiciones para la métrica inducida y sus derivadas en cada hipersuperficie, a menudo se les denomina ecuaciones de constricción. Éstas resultan de especial interés puesto que son más fáciles de resolver que el sistema completo (146), y, para campos de materia apropiados, la existencia de dichas soluciones sobre una hipersuperficie Σ garantiza, dada la existencia de una buena formulación de valores iniciales^{xi}, la existencia y unicidad de una solución para todo el espaciotiempo.

7. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado una reseña de los aspectos generales del formalismo $3+1$, y se han introducido convenciones y notación especialmente adaptadas para éste, que facilitan el tratamiento sistemático de todas las proyecciones involucradas y la manipulación de expresiones de uso frecuente en Relatividad General.

Haciendo uso de éstas herramientas se han derivando fórmulas explícitas y generales para productos tensoriales (56), simetrización (53), antisimetrización (54) y contracción de índices (58), así como para la derivada covariante (87). Asimismo, se han obtenido todas las proyecciones del tensor de Riemann (124)-(134), del tensor de Einstein (143)-(145), y las relaciones de Gauss-Codacci (125)-(138).

Appendix

A. Observadores Eulerianos

Al considerar una foliación del espaciotiempo por hipersuperficies de Cauchy Σ_t, el campo de vectores normales a cada una de estas hipersuperficies n^a, unitario y tipo tiempo puede interpretarse como el campo de velocidades de un conjunto de observadoes en cada punto del espaciotiempo, a los que se les denomina observadores Eulerianos [1]. Estos observadores toman por superficie de simultaneidad justamente a cada Σ_t.

La relación entre el tiempo propio medido por estos observadores y el cambio de la función tiempo t, es justamente la función *lapse*. Más formalmente, considérese la trayectoria de uno de estos observadores, la cual será una curva $\lambda : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ que, parametrizada por el tiempo propio τ, y que introduciendo coordenadas x^μ, cumple con

$$n^\mu = \frac{dx^\mu_\lambda}{d\tau}.$$

Si se toma $x^0 = t$, se tiene que

$$n^0 = \frac{dt}{d\tau} = n^a (dt)_a = n^a \nabla_a t = \frac{1}{N}.$$

Por lo tanto, $n^a \nabla_a$ corresponde a la derivada respecto al tiempo propio de esta familia de observadores, de modo que la 4-aceleración de los observadores es justamente

$$\mathcal{A}^a \equiv n^b \nabla_b n^a = -u^a,$$

que es tangente a cada Σ_t.

Para los observadores Eulerianos, las diferentes componentes de proyección del tensor momento energía de cualquier forma de materia, T_{ab}, son directamente la **densidad de energía de materia**,

$$\rho \equiv n^a n^b T_{ab} = T_\perp,$$

la **densidad de momento de la materia**,

$$j_a \equiv -n^b h_a{}^{a'} T_{a'b} = \tilde{\tau}_a,$$

y el **tensor de esfuerzos de la materia**,

$$S_{ab} \equiv h_a{}^{a'} h_b{}^{b'} T_{a'b'} = \widetilde{T}_{ab}.$$

B. Mapeos y derivada de Lie

Un mapeo $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ induce un nuevo mapeo que permite identificar (o *transportar*) tensores tangentes a $\mathcal{M}$, con tensores tangentes a $\mathcal{N}$. En el caso $\mathcal{N} = \mathcal{M}$, y para vectores en el espacio tangente a p, $v^a \in \mathcal{T}_p\mathcal{M}$, el mapeo correspondiente es el *push-forward*, $\phi_* : \mathcal{T}_p\mathcal{M} \to \mathcal{T}_{\phi(p)}\mathcal{M}$, que en términos de la acción de vectores sobre funciones está definido por la regla

$$(\phi_* v^a)(f) \equiv v^a (f \circ \phi), \tag{B. 1}$$

y para covectores, el mapeo $\phi^* : \mathcal{T}^*_{\phi(p)}\mathcal{M} \to \mathcal{T}^*_p\mathcal{M}$ se denomina *pull-back*, y está dado por

$$(\phi^* \omega_a)(v^a) \equiv \omega_a (\phi_* v^a), \tag{B. 2}$$

por lo que en general se define para tensores (k, l), $T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l}$, el pullback $\phi^* T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l}$ mediante la regla

$$\begin{aligned}(\phi^* T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l})\, \omega_{a_1} \ldots \omega_{a_k} v^{b_1} \ldots v^{b_l} \equiv \\ T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} (\phi^* \omega_{a_1}) \ldots (\phi^* \omega_{a_k}) \\ ([\phi^{-1}]_* v^{b_1}) \ldots ([\phi^{-1}]_* v^{b_l}).\end{aligned} \tag{B. 3}$$

La derivada de Lie de un campo tensorial $T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l}$, respecto a un campo vectorial v^a que genera un grupo uniparamétrico de difeomorfismos[xii] ϕ_τ se define como [5]

$$\begin{aligned}\pounds_v T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} \\ \equiv \lim_{\tau \to 0} \frac{\phi^*_{-t} T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} - T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l}}{\tau},\end{aligned} \tag{B. 4}$$

y da como resultado un campo tensorial del mismo rango que $T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l}$. Esta cantidad se puede interpretar como el cambio infinitesimal del campo $T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l}$ a lo largo del flujo de ϕ_t.

Nótese que la derivada de Lie de un campo tensorial respecto a un campo vectorial v^a, sólo está bien definida en un punto dado q si el campo tensoriales está definido en una vecindad de q que contenga un intervalo de la curva integral de v^a que pasa por dicho punto. Por lo tanto, en términos de una foliación por hipersuperficies de Cauchy, para calcular la derivada de Lie de un campo tensorial respecto a un campo vectorial tipo tiempo, es necesario que el campo esté definido no sólo en la hipersuperficie donde se está evaluando su derivada, sino también en las hipersuperficies que contengan una vecindad infinitesimal de la hipersuperficie en cuestión.

Una expresión general para la derivada de Lie de un campo tensorial $T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l}$ es [5],

$$\begin{aligned}\pounds_v T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} = v^c \nabla_c T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} \\ - \sum_{i=1}^{k} T^{a_1 \ldots c \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} \nabla_c v^{a_i} \\ + \sum_{j=1}^{l} T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots c \ldots b_l} \nabla_{b_j} v^c.\end{aligned} \tag{B. 5}$$

A partir de la fórmula (B. 5), y de la definición de la derivada normal de la Sec. 4, Ec. (74), se obtiene directamente que la relación entre éstas derivadas es

$$\begin{aligned}\eth T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} = -\pounds_n T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} \\ - \sum_{i=1}^{k} T^{a_1 \ldots c \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} (K_c{}^{a_i} + n_c u^{a_i}) \\ + \sum_{j=1}^{l} T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots c \ldots b_l} (K_{b_j}{}^c + n_{b_j} u^c),\end{aligned} \tag{B. 6}$$

siendo $u_a = \eth n_a$ y $K_{ab} = D_a n_b$.

Por ejemplo, para el caso del propio campo de covectores n_a, (B. 6) implica que

$$\begin{aligned} u_a \equiv \eth n_a &= -\pounds_n n_a + n_c(K_a{}^c + n_a u^c) \\ &= -\pounds_n n_a, \end{aligned}$$

lo que prueba la Ec. (80).

El resultado (81) de la Sec. 5 implica que

$$\begin{aligned} \eth h_{ab} &= -n^c \nabla_c h_{ab} \\ &= -n^c(K_{ca} n_b + K_{cb} n_a + n_c n_a u_b + n_c n_b u_a) \\ &= n_a u_b + n_b u_a, \end{aligned}$$

lo cual se puede sustituir en el lado izquierdo de la fórmula (B. 6) para obtener

$$\begin{aligned} n_a u_b + n_b u_a &= -\pounds_n h_{ab} + h_{cb}(K_a{}^c + n_a u^c) \\ &\quad + h_{ac}(K_b{}^c + n_b u^c), \\ &= -\pounds_n h_{ab} + 2K_{ab} + n_a u_b + n_b u_a \\ \Rightarrow \quad \pounds_n h_{ab} &= 2K_{ab}, \end{aligned}$$

que prueba la Ec. (70). Más aún, el lado derecho de la expresión (B. 6) puede escribirse completamente en términos de las derivadas de Lie de n^a y h_{ab}, pues

$$\begin{aligned} u^a &= h^{ac} u_c = -h^{ac} \pounds_n n_c, \\ K_a{}^b &= h^{bc} K_{ac} = \frac{1}{2} h^{bc} \pounds_n h_{ac}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \eth T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} &= -\pounds_n T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k} T^{a_1 \ldots c \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} \\ &\quad h^{a_i d} \left(\frac{1}{2} \pounds_n h_{cd} - n_c \pounds_n n_d \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{l} T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots c \ldots b_l} \\ &\quad h^{cd} \left(\frac{1}{2} \pounds_n h_{b_j d} - n_{b_j} \pounds_n n_d \right). \end{aligned} \quad \text{(B. 7)}$$

ésto muestra la conveniencia de recurrir a la derivada normal $\eth$ para la manipulación de expresiones $3+1$, ya que evita escribir varios términos que incluirían combinaciones de derivadas de Lie.

C. 4-aceleración y la función Lapse

El campo $u_a = \eth n_a$, proporcional a la 4-aceleración de los observadores Eulerianos, también puede expresarse en términos de la derivada tangente a la hipersuperficie de la función Lapse, $D_a N$. La prueba que aquí se presenta sigue el desarrollo correspondiente en la Ref. 1. A partir de la Ec. (26), se despeja la derivada de t,

$$\nabla_a t = -\frac{n_a}{N}.$$

A continuación se sustituye en la propiedad de no torsión de la derivada [5], aplicada a la función tiempo,

$$\nabla_a \nabla_b t = \nabla_b \nabla_a t, \quad \text{(C. 1)}$$

y se desarrolla, quedando

$$-\frac{n_b}{N} \nabla_a N + n_a u_b = -\frac{n_a}{N} \nabla_b N + n_b u_a. \quad \text{(C. 2)}$$

Al contraer (C. 2) con $-n^a h_c{}^b$, se obtiene la Ec. (79),

$$u_c = -\frac{1}{N} D_c N = -D_c \ln N.$$

D. Perspectiva tridimensional

A partir de las nociones de la sección 2, es posible establecer una relación entre la subvariedad $\Sigma_t \subset \mathcal{M}$, y una variedad tridimensional $\hat{\Sigma}$ con la misma topología. Para ello, considere un mapeo suave $\varrho : \mathcal{M} \to \hat{\Sigma}$ con la propiedad de ser invariante ante el mapeo ϕ_τ generado por el campo t^a de la Sec. 2, es decir,

$$\varrho(\phi_\tau(p)) = \varrho(p), \, \forall \, p \in \mathcal{M}, \, \tau \in \mathbb{R}. \quad \text{(D. 1)}$$

Nótese que cualquier difeomorfismo sobre $\hat{\Sigma}$ define un nuevo mapeo ϱ' con la misma propiedad, por lo que un mapeo de este tipo no será único.

Como ϱ mapea todos los puntos de una curva $\gamma_p(\tau)$ al punto $\varrho(p) \in \hat{\Sigma}$, no es única la noción de mapeo inverso para ϱ, pues existe una infinidad de funciones $\rho : \hat{\Sigma} \to \mathcal{M}$ tales que $\varrho(\rho(q)) = q$.

Esta ambigüedad se puede resolver si se toma en cuenta el valor de la función global de tiempo t, y se utiliza como un parámetro externo para los objetos en $\hat{\Sigma}$, de modo que éstos "evolucionen" respecto a t. Con este fin, se escoge una hipersuperficie Σ_{t_0} correspondiente a cierto valor t_0 de referencia para la función t (no necesariamente $t_0 = 0$), y se define $\Phi_{t_0} : \Sigma_{t_0} \to \hat{\Sigma}$ como

$$\Phi_{t_0}(p) = \varrho(p).$$

Este mapeo es un difeomorfismo, así que tiene un mapeo inverso bien definido, $\Phi_{t_0}^{-1}$, y de este modo se puede definir el siguiente mapeo invertible,

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{M} &\to \mathbb{R} \times \hat{\Sigma}, \\ p &\mapsto (t(p), \varrho(p)), \end{aligned} \quad \text{(D. 2)}$$

$$\begin{aligned} \Psi^{-1} : \mathbb{R} \times \hat{\Sigma} &\to \mathcal{M}, \\ (\tau, q) &\mapsto \phi_{\tau - t_0}\left[\Phi_{t_0}^{-1}(q)\right]. \end{aligned} \quad \text{(D. 3)}$$

A partir de Ψ y Ψ^{-1}, se induce el *push-forward* Ψ_* de vectores de $T\mathcal{M}$, al espacio tangente a $\mathbb{R}\times\hat{\Sigma}$, y el *pullback* $(\Psi^{-1})^*$ que *transporta* covectores del espacio cotangente a la variedad hacia el espacio cotangente de $\mathbb{R}\times\hat{\Sigma}$. éstos mapeos se generalizan para tensores arbitrarios evaluando sobre vectores y covectores según corresponda, tal como en la Ec. (B. 3) del Apéndice 7.

En términos de coordenadas y^i sobre $\hat{\Sigma}$, con $i=1,2,3$, el mapeo $\varrho:\mathcal{M}\to\hat{\Sigma}$ se expresa en términos de las tres funciones ϱ^i tales que

$$\varrho^i(p)\equiv y^i(\varrho(p)),$$

con lo que la condición (D. 1) se reescribe como

$$t^a\nabla_a\varrho^i = N^a\nabla_a\varrho^i + Nn^a\nabla_a\varrho^i = 0.$$

Entonces, el *push-forward* Ψ_* de un vector se escribe como

$$\Psi_* v^a = \left(\frac{v_\perp}{N}\partial_t, \left[\widetilde{v}^b - \frac{v_\perp}{N}N^b\right]\left[\nabla_b\varrho^i\right]\left[\frac{\partial}{\partial y^i}\right]^a\right). \quad \text{(D. 4)}$$

Esta expresión representa un elemento del espacio tangente a $\mathbb{R}\times\hat{\Sigma}$, por lo que su primera entrada es un vector unidimensional y la segunda entrada un vector tridimensional.

Aquí se esclarece el papel que juega el vector *shift*: indica qué tanto se desplazan las proyecciones tangentes de vectores al representarlos en el espacio tangente a la variedad tridimensional $\hat{\Sigma}$ bajo el mapeo Ψ_*.

E. Formulación de Valores Iniciales

Un sistema hiperbólico cuasilineal, diagonal y de segundo orden es un sistema de ecuaciones diferenciales para los campos ϕ_i, con $i=1,\ldots,n$, de la forma

$$g^{\mu\nu}(\phi_j,\partial_\mu\phi_j)\partial_\mu\partial_\nu\phi_i = F_i(\phi_j,\partial_\mu\phi_j). \quad \text{(E. 1)}$$

Si se considera una solución particular para los campos $(\phi_0)_i$, en la que $(\mathcal{M},(g_0)_{\mu\nu}[(\phi_0)_j,\partial_\mu(\phi_0)_j])$ es un espaciotiempo globalmente hiperbólico, entonces, un sistema de la forma (E. 1) cuenta con una buena formulación de valores iniciales en el siguiente sentido. Dado el conjunto de datos $\phi_i|_\Sigma$ y $n^\rho\nabla_\rho\phi_i|_\Sigma$ sobre una hipersuperficie de Cauchy Σ, suficientemente *cercanos* a los correspondientes para la solución $(\phi_0)_i$, existe una vecindad abierta O de Σ en la que existe una solución única para (E. 1), y esta solución depende *continuamente* de los valores iniciales $\phi_i|_\Sigma$ y $n^\rho\nabla_\rho\phi_i|_\Sigma$.

Los detalles de este enunciado pueden encontrarse en [5] (Teorema 10.1.3), mientras que una prueba más completa se encuentra en [8]. Este teorema es una generalización del teorema de Cauchy-Kovalevskaya [9] sobre la existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Una vez que se escogen coordenas armónicas[xiii], las ecuaciones de Einstein en el vacío se pueden escribir como un sistema de la forma (E. 1), tomando como los campos ϕ_i a las componentes de la métrica en estas coordenadas, $g_{\mu\nu}$.

Empleando la formulación $3+1$, se parte de este resultado para mostrar que[xiv], dada una variedad tridimensional suave Σ, una métrica h_{ab} sobre ésta, y K_{ab} un tensor suave simétrico en Σ, que satisfacen las Ecs. de *constricción* (148) y (149) en el vacío, existe un espaciotiempo único $(\mathcal{M},g_{ab})$, denominado el desarrollo maximal de Cauchy de (Σ,h_{ab},K_{ab}), que satisface:

(i) $(\mathcal{M},g_{ab})$ es una solución de la ecuación de Einstein (146) en el vacío.

(ii) $(\mathcal{M},g_{ab})$ es globalmente hiperbólico con superficie de Cauchy Σ.

(iii) La métrica inducida y curvatura extrínseca en Σ son, respectivamente, h_{ab} y K_{ab}.

(iv) Cualquier otro espaciotiempo que satisface (i)-(iii) puede mapearse isométricamente a un subconjunto de $(\mathcal{M},g_{ab})$, y la solución g_{ab} depende continuamente de los datos iniciales (h_{ab},K_{ab}) en Σ.

Para el caso de las ecuaciones de Einstein con materia, la existencia de una buena formulación de valores iniciales depende críticamente del tipo de materia que se considere, en especial de las ecuaciones de movimiento que ésta obedezca y de la forma que tenga su tensor de momento energía T_{ab}.

En general, si la materia consiste de campos ϕ_i que satisfacen una ecuación del tipo (E. 1) y si T_{ab} depende solamente de los campos ϕ_i y sus primeras derivadas, así como de la métrica del espaciotiempo g_{ab} y sus primeras derivadas, entonces las ecuaciones de Einstein para el sistema conjunto de los campos y la métrica tendrá la forma (E. 1) y por ende existirá una buena formulación de valores iniciales [5].

Algunos casos de campos de materia para los que existe una buena formulación de valores iniciales para las ecuaciones de Einstein son:

- El campo escalar ϕ que cumple la ecuación de Klein-Gordon,

$$(g^{ab}\nabla_a\nabla_b - m^2 + \xi R)\phi = 0. \quad \text{(E. 2)}$$

- El campo vectorial A^a que cumple con las ecuaciones de Maxwell

$$g^{ac}\nabla_c F_{ab} = 0, \quad \text{(E. 3)}$$

donde $F_{ab}\equiv 2\nabla_{[a}A_{b]}$.

- El fluido perfecto con ecuaciones de estado $P=P(\rho)$ *apropiadas*, a pesar de no ser un sistema del tipo (E. 1) [5, 8].

Una discusión más amplia sobre los tipos de materia que permiten contar con una buena formulación de valores iniciales en Relatividad General, se puede consultar en la Ref. [8], a donde dirigimos a los lectores interesados en profundizar en este tema.

Es importante enfatizar que, en el caso más general, no está garantizada la existencia de una buena formulación de valores iniciales, especialmente si la materia no obedece ecuaciones lineales o cuasi-lineales. Además, si un espaciotiempo (o una región abierta de éste) no es globalmente hiperbólico, no se contará con una buena formulación de valores iniciales en el sentido previamente expuesto.

F. Conjuntos de etiquetas de índices

TABLA I. Conjuntos de etiquetas para 1, 2, 3 y 4 índices.

m	m_B	ζ_m	${Y^1}_m$	${Y^2}_m$	${Y^3}_m$	${Y^4}_m$	${Y^5}_m$
0	0	$\emptyset$	{0}	{1,0}	{2,1,0}	{3,2,1,0}	{4,3,2,1,0}
1	1	{0}	$\emptyset$	{1}	{2,1}	{3,2,1}	{4,3,2,1}
2	10	{1}	{0}	{0}	{2,0}	{3,2,0}	{4,3,2,0}
3	11	{1,0}	$\emptyset$	$\emptyset$	{2}	{3,2}	{4,3,2}
4	100	{2}	{0}	{1,0}	{1,0}	{3,1,0}	{4,3,1,0}
5	101	{2,0}	$\emptyset$	{1}	{1}	{3,1}	{4,3,1}
6	110	{2,1}	{0}	{0}	{0}	{3,0}	{4,3,0}
7	111	{2,1,0}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	{3}	{4,3}
8	1000	{3}	{0}	{1,0}	{2,1,0}	{2,1,0}	{4,2,1,0}
9	1001	{3,0}	$\emptyset$	{1}	{2,1}	{2,1}	{4,2,1}
10	1010	{3,1}	{0}	{0}	{2,0}	{2,0}	{4,2,0}
11	1011	{3,1,0}	$\emptyset$	$\emptyset$	{2}	{2}	{4,2}
12	1100	{3,2}	{0}	{1,0}	{1,0}	{1,0}	{4,1,0}
13	1101	{3,2,0}	$\emptyset$	{1}	{1}	{1}	{4,1}
14	1110	{3,2,1}	{0}	{0}	{0}	{0}	{4,0}
15	1111	{3,2,1,0}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	{4}
16	10000	{4}	{0}	{1,0}	{2,1,0}	{3,2,1,0}	{3,2,1,0}
17	10001	{4,0}	$\emptyset$	{1}	{2,1}	{3,2,1}	{3,2,1}
18	10010	{4,1}	{0}	{0}	{2,0}	{3,2,0}	{3,2,0}
19	10011	{4,1,0}	$\emptyset$	$\emptyset$	{2}	{3,2}	{3,2}
20	10100	{4,2}	{0}	{1,0}	{1,0}	{3,1,0}	{3,1,0}
21	10101	{4,2,0}	$\emptyset$	{1}	{1}	{3,1}	{3,1}
22	10110	{4,2,1}	{0}	{0}	{0}	{3,0}	{3,0}
23	10111	{4,2,1,0}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	{3}	{3}
24	11000	{4,3}	{0}	{1,0}	{2,1,0}	{2,1,0}	{2,1,0}
25	11001	{4,3,0}	$\emptyset$	{1}	{2,1}	{2,1}	{2,1}
26	11010	{4,3,1}	{0}	{0}	{2,0}	{2,0}	{2,0}
27	11011	{4,3,1,0}	$\emptyset$	$\emptyset$	{2}	{2}	{2}
28	11100	{4,3,2}	{0}	{1,0}	{1,0}	{1,0}	{1,0}
29	11101	{4,3,2,0}	$\emptyset$	{1}	{1}	{1}	{1}
30	11110	{4,3,2,1}	{0}	{0}	{0}	{0}	{0}
31	11111	{4,3,2,1,0}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Agradecimientos

Agradecemos los comentarios y sugerencias del revisor anónimo que han permitido mejorar este manuscrito. Este trabajo ha sido apoyado por los proyectos CONACYT No. 220738 y DGAPA-UNAM IG-100316.

---

i. En el Apéndice E se incluye una exposición más precisa de lo que significa contar con una buena formulación de valores iniciales en Relatividad General, y las condiciones que se requieren para ello.

ii. Ver por ejemplo [6].

iii. En el Apéndice F se tabulan todos los conjuntos de índices necesarios para desarrollar tensores hasta de cuatro índices.

iv. Ver Apéndice B.

v. Nótese que u_a es tangente a Σ_t debido a que n^a es de norma constante.

vi. Ver Apéndice C.

vii. Ver Apéndice B.

$viii$. El signo de u^a se ha escogido para que en los siguientes desarrollos todos los términos tengan signo positivo.

ix. En esta sección se regresa a la notación usual de índices abstractos ya que la notación empleada en la sección anterior en este caso es innecesariamente general. No obstante, se conserva la nomenclatura para las componentes de proyección derivada de esta notación.

x. Una reseña sobre los observadores Eulerianos y el significado físico de las componentes de proyección del tensor momento energía de acuerdo a ellos se encuentra en el Apéndice A.

xi. Ver Apéndice E.

xii. Un mapeo suave que es uno a uno, sobreyectivo y con mapeo inverso suave.

$xiii$. Coordenadas x^μ tales que $H^\mu \equiv g^{ab}\nabla_a\nabla_b(x^\mu) = 0$.

xiv. Teorema 10.2.2 de Wald [5].

1. E. Gourgoulhon, *3+1 Formalism in General Relativity: bases of numerical relativity*, Lecture Notes in Physics **vol. 846** (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012).
2. R. Arnowitt, S. Deser, and C.W. Misner, *Phys. Rev.* **117** (1960) 1595.
3. R. Arnowitt, S. Deser, and C.W. Misner, *The Dynamics of General Relativity* in Gravitation: an introduction to current research, editado por Louis Witten (Wiley, New York, 1962).
4. M. Alcubierre, *Introduction to 3+1 numerical relativity*, International series of monographs on physics (Oxford Univ. Press, Oxford, 2008).
5. R.M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
6. A.N. Tsirulev, *Theor. Math. Phys.* **102** (1995) 245.
7. R.D. Richtmyer, *Principles of Advanced Mathematical Physics*, **vol. 1** (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1981).
8. S.W. Hawking, and G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, New York, 1973).
9. S.V. Kowalevsky, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **80** (1875) 1.