

## Espinores de Weyl y el formalismo de helicidad

J.L. Díaz Cruz, B. Larios, O. Meza Aldama y J. Reyes Pérez

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,  
Av. San Claudio y 18 Sur, C. U. 72570 Puebla, México.

Received 27 March 2015; accepted 28 July 2015

En este trabajo revisamos la formulación original de la ecuación relativista para partículas con espín (1/2). Tradicionalmente (“a la Dirac”), se propone que la “raíz cuadrada” de la ecuación de Klein Gordon (K-G) involucra un espinor (de Dirac) de 4 componentes y en el límite no relativista se puede escribir como 2 ecuaciones para dos espinores de 2 componentes. Por otra parte, existe el formalismo de Weyl, en el cual de entrada se trabaja con espinores de Weyl de 2 componentes, los cuales son los objetos fundamentales en el formalismo de helicidad. En este trabajo rederivamos las ecuaciones de Weyl directamente, partiendo de la ecuación de K-G, asimismo se introduce la interacción electromagnética con los espinores de Weyl. Como un ejemplo de aplicación de dicho formalismo, se calcula la dispersión de Compton usando los métodos de helicidad.

*Descriptores:* Espinores de Weyl; formalismo de helicidad; dispersión de Compton.

In this work we give a review of the original formulation of the relativistic wave equation for particles with spin one-half. Traditionally (*À la Dirac*), it's proposed that the “square root” of the Klein-Gordon (K-G) equation involves a 4 component (Dirac) spinor and in the non-relativistic limit it can be written as 2 equations for two 2 component spinors. On the other hand, there exists Weyl's formalism, in which one works from the beginning with 2 component Weyl spinors, which are the fundamental objects of the helicity formalism. In this work we rederive Weyl's equations directly, starting from K-G equation We also introduce the electromagnetic interaction with the Weyl spinors. As an example of the use of that formalism, we calculate Compton scattering using the helicity methods.

*Keywords:* Weyl spinors; helicity formalism; Compton scattering.

PACS: 03.65.Pm; 11.80.Cr

### 1. Introducción

Uno de los pilares de la física contemporánea es la mecánica cuántica, gracias a la cual se han logrado grandes avances en la comprensión de la naturaleza a nivel atómico e incluso subatómico. Por otra parte, sus aplicaciones han dado lugar a toda una revolución tecnológica. Así pues, el estudio de la física cuántica forma parte de nuestra cultura científica.

Cabe recordar que la primera formulación de la Mecánica Cuántica (ondulatoria) se basó en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H\Psi, \quad (1)$$

donde  $H$  representa el operador hermítico que define la energía total del sistema, y la función de onda  $\Psi$  es dependiente de la posición y el tiempo:  $\Psi = \Psi(\vec{r}, t)$ . Para una partícula libre, el hamiltoniano tiene la forma  $H = -(\hbar^2/2m)\nabla^2$ . Al aplicar el método de separación de variables, es decir  $\Psi(\vec{r}, t) = \phi(t)\psi(\vec{r})$ , obtenemos [9]

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi = E\psi, \quad (2)$$

donde ahora  $\psi(\vec{r})$  es función sólo de las coordenadas espaciales  $x, y$  y  $z$ . Las soluciones de la Ec. (1) son de la forma

$$\Psi = \psi \exp(-iEt/\hbar), \quad (3)$$

donde  $E$  es el eigenvalor correspondiente de  $H$ . Con esta expresión obtenemos una densidad de probabilidad positiva definida que, junto a su corriente de probabilidad, satisface una

ecuación de continuidad. En realidad, la condición  $H = H^\dagger$  y que se tenga una primera derivada temporal, nos aseguran esta propiedad.

Después del éxito de la mecánica cuántica basada en la Ec. (2) para describir el átomo, se propuso obtener una ecuación de onda relativista; tal ecuación es conocida (en honor a Oscar Klein y Walter Gordon<sup>i</sup>), con el nombre de ecuación de Klein-Gordon (K-G) y es de la forma<sup>ii</sup>:

$$(\square + m^2)\psi = 0, \quad (4)$$

donde  $\square = \partial^\mu \partial_\mu = (\partial^2/\partial t^2) - \nabla^2$  es el llamado operador *d'Alembertiano*. Esta ecuación es invariante relativista y se utiliza para describir partículas relativistas cargadas o neutras de espín cero, pero su densidad de probabilidad no es positiva definida y admite energías negativas (ver [12]); además, no describe correctamente los electrones ya que estos son de espín 1/2.

En 1928, Dirac propuso una expresión relativista en la cual tanto las derivadas temporales como espaciales aparecieran a primer orden, en lugar del segundo orden en que aparecen en el operador *d'Alembertiano* de la Ec. (4), esperando de alguna forma resolver el problema de que la densidad de probabilidad no sea definida positiva. Para obtener una densidad de probabilidad positiva, Dirac propuso sacar la “raíz cuadrada” a la Ec. (4), usando objetos (matrices de Dirac) que satisfacen cierta relación de anticonmutación y llegó a la siguiente expresión:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta m)\psi, \quad (5)$$

la cual se puede reescribir en forma covariante:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (6)$$

que es conocida como la ecuación de Dirac, y donde  $\psi$  es ahora un objeto llamado *espinor* (de 4 componentes). Más aún, al hacer la sustitución mínima  $\partial_\mu \mapsto D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ , es posible describir las interacciones de los electrones con los potenciales electromagnéticos.

La Ec. (6) tiene dos soluciones independientes (o cuatro, si tomamos en cuenta la orientación del espín): una de carga negativa que describe al electrón y otra correspondiente a una partícula con carga positiva, que ahora es llamada positrón. Como las únicas partículas conocidas hasta 1928 eran los electrones, los protones y los fotones, Dirac pensó que la solución de carga positiva de sus ecuaciones debía corresponder al protón, hasta que en 1932 Carl Anderson descubrió, mientras estaba estudiando los rayos cósmicos en una cámara de niebla, que algunas trayectorias se desviaban con la misma magnitud del electrón pero en sentido opuesto. Se había descubierto la primera antipartícula, el positrón.

En ese mismo año James Chadwick demostró experimentalmente la existencia de los neutrones, que eran necesarios para comprender la estabilidad del núcleo, pero no se podía explicar cómo es que este se mantenía unido. En 1935 Hideki Yukawa razonó que debía existir otra fuerza más potente que la electromagnética que mantenía unidos a los protones a pesar de que estos se repelen, entonces propuso la existencia de un campo análogo al electromagnético que producía bosones con masa, responsables de la fuerza nuclear fuerte, y a partir del alcance corto de dichas interacciones predijo que su masa debía ser del orden de 150 MeV. En 1947 el físico inglés Cecil Powell (en un experimento con rayos cósmicos) encontró una partícula con las propiedades predichas por Yukawa, a la cual se le denominó pión.

A finales del siglo XIX, Rutherford descubrió que el uranio emite dos tipos de radiación: la radiación alfa, que son núcleos de helio (dos protones y dos neutrones), y la radiación beta, que son electrones. Posteriormente, Rutherford y Soddy demostraron que para átomos radiactivos con núcleos inestables, al emitir un electrón (radiación  $\beta$ ), un neutrón se convierte en un protón dando como resultado un átomo de un elemento diferente. Por otra parte, cuando un neutrón está libre, este se desintegra para formar un electrón y un protón (desintegración  $\beta$ ):

$$n \longrightarrow p + e^-, \quad (7)$$

pero la suma de las energías del protón y el electrón producidas por este proceso era menor que la del neutrón. Después se realizaron experimentos para neutrones en reposo y se demostró que las magnitudes de los momentos de los electrones emitidos tenían valores distintos, pero para este proceso la ley de conservación de energía-momento es

$$c^2 M_n = (M_e c^4 + P_e^2 c^2)^{\frac{1}{2}} + (M_p c^4 + P_p^2 c^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

donde  $M_n$ ,  $M_e$ ,  $M_p$  son las masas del neutrón, electrón y protón, respectivamente, y  $P_e^2$  y  $P_p^2$  son las magnitudes de

los momentos para el electrón y el protón. Cuando el neutrón está en reposo,  $\vec{P}_n = 0 = \vec{P}_p + \vec{P}_e$ , lo cual implica que  $|\vec{P}_p| = |\vec{P}_e|$ , y entonces tenemos una solución única para  $P_e$  fijada por las masas de las partículas, esto representaba una contradicción con los experimentos, en los cuales se encuentra que hay una distribución para la energía del electrón. Incluso se pensó que las leyes de conservación de energía no eran válidas para algunos procesos entre partículas, hasta que en 1930, Wolfgang Pauli sugirió la existencia de una nueva partícula con masa cero y sin carga eléctrica, por lo que el proceso debería ser

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (9)$$

Tres años después Enrico Fermi, influido por la idea de Pauli, introdujo la fuerza nuclear débil para explicar este fenómeno y propuso que el neutrón se convierte en un protón y emite un bosón cargado ( $W^-$ ), Fermi nombro a la nueva partícula ( $\bar{\nu}_e$ ) como *neutrino*, en el presente se denomina antineutrino del electrón.

Para describir partículas y antipartículas de espín un medio, en 1929 Hermann Weyl propuso un par de ecuaciones acopladas que llevan su nombre y para el caso de masa cero (por ejemplo para neutrinos) las ecuaciones se desacoplan, y toman la forma:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi = i \vec{\sigma} \cdot \nabla \phi, \quad (10)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \chi = -i \vec{\sigma} \cdot \nabla \chi, \quad (11)$$

donde  $\phi$  y  $\chi$  son objetos llamados *espinores de Weyl* izquierdo y derecho<sup>iii</sup> (de 2 componentes), respectivamente. Un año antes que Weyl, Dirac las había considerado partiendo de la versión de 2 componentes en su ecuación, pero Pauli (ver [10]) se negó a aceptarlas debido a que no son invariantes bajo paridad.

En 1956, Tsung Dao Lee y Chen Ning Yang [1,2] propusieron que la paridad es una simetría de todos los procesos debidos a interacciones fuertes y electromagnéticas, pero no lo es en procesos debidos a interacciones débiles como, por ejemplo, en la desintegración  $\beta$ . Un año después Chien Shiung Wu [3] y sus colaboradores consideraron la desintegración  $\beta$  de un neutrón del núcleo de cobalto 60 y demostraron experimentalmente que las interacciones débiles violaban paridad: la reacción daba lugar a núcleos de níquel y emisión de electrones y antineutrinos electrónicos.

En 1954, Chen Ning Yang y Robert Mills [4] consiguieron construir una teoría de campos invariante ante una transformación de tipo no abeliano. Luego, en 1957 Julian Schwinger [5] tomó esta teoría y la aplicó a la fuerza nuclear débil y a la fuerza electromagnética y se dio cuenta que estas fuerzas tenían una magnitud similar, pero esta simetría se rompía debido a que los bosones de norma ( $W^\pm$ ) de la fuerza débil tienen masa, mientras que el bosón de norma del campo

electromagnético (fotón) no tiene masa. Un año después Sidney Bludman [6] sugirió que la fuerza nuclear débil se podía describir mediante una teoría gauge local no abeliana e introducía tres partículas,  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z^0$ , el  $Z^0$  describe interacciones débiles en las que no interviene la carga eléctrica. Por otro lado en 1961 Sheldon Glashow [7,8], usando la teoría de Bludman, generó un modelo que incluía un triplete de bosones vectoriales portadores de la fuerza débil y un bosón vectorial portador de la fuerza electromagnética; se vio que se podría combinar el singlete y el triplete de tal modo que surgiría una partícula neutra con masa ( $Z^0$ ), pero que dejaría a la otra (fotón) sin masa.

Paul Dirac, junto a Jordan, Heisenberg y Pauli, formularon las primeras teorías cuánticas de campos, pero en ellas aparecían infinitos. Aportaciones de Tomonaga, Bethe, Dyson, Schwinger y Feynman (con sus diagramas que nos permiten estudiar las interacciones electromagnéticas de objetos como electrones, positrones, quarks, etc.) lograron que las teorías fueran renormalizables y la electrodinámica cuántica (QED) se convirtió en la teoría cuántica de campos más sencilla que es invariante bajo transformaciones de gauge. Posteriores desarrollos de Ward, Weinberg, Salam, Wilson, Veltman y t’Hooft llevaron a las teorías de Yang-Mills renormalizables, que son la base de la física de partículas.

Tradicionalmente en QED se usa el formalismo de Dirac (4 componentes) en lugar del formalismo de Weyl (2 componentes). En este artículo tratamos de construir la teoría completa de QED partiendo desde un inicio de espinores de Weyl. En la actualidad, este programa de formular las teorías cuánticas de campos (QFT, por sus siglas en inglés) con campos de helicidad definida se ha extendido para el estudio de procesos con muchas partículas en el estado final y es uno de los temas más activos de investigación en QFT. Es posible que en el futuro se estudie QFT de inicio con este formalismo de helicidad.

El contenido del artículo es el siguiente: En la Sec. 2 de este artículo llegamos a las Ecs. (10) y (11) partiendo de la Ec. (4). En la Sec. 3 llegamos a ecuaciones de movimiento para los campos de Weyl con dos derivadas espaciales y temporales y verificamos que el sistema es invariante bajo paridad y conjugación de carga. En la Sec. 4 introducimos la notación usada en el formalismo de helicidad. Finalmente, en la Sec. 5 usamos el formalismo de helicidad para calcular la amplitud invariante de la dispersión electrón-fotón, llamada dispersión de Compton, a nivel árbol y veremos las ventajas que se tienen al usar este formalismo.

## 2. Espinores de Weyl

En esta sección obtenemos las ecuaciones de Weyl a partir de la ecuación K-G, y demostramos algunas propiedades de los espinores de 2 componentes. La ecuación de K-G<sup>iv</sup> está dada por

$$(-\square + m^2)\phi = 0, \tag{12}$$

la cual rescribimos como

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\phi = m^2\phi. \tag{13}$$

La idea es obtener una ecuación de primer orden, así que podemos intentar “factorizar” el operador diferencial del lado izquierdo de la ecuación anterior. Para esto proponemos escribirlo como sigue

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 = \left(i\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\alpha} \cdot \nabla\right)\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\beta} \cdot \nabla\right), \tag{14}$$

donde  $\vec{\alpha}$  y  $\vec{\beta}$  son (tri-)vectores constantes (independientes de las coordenadas, del campo y de sus derivadas) aún indeterminados. Desarrollando el lado derecho de (14):

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + i(\vec{\beta} + \vec{\alpha}) \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{\alpha} \cdot \nabla)(\vec{\beta} \cdot \nabla). \tag{15}$$

Para que ambos lados coincidan, debemos tener

$$\vec{\beta} = -\vec{\alpha} \tag{16}$$

y

$$(\vec{\alpha} \cdot \nabla)(\vec{\beta} \cdot \nabla) = \nabla^2, \tag{17}$$

lo cual, usando (16), implica que

$$\alpha_i^2 = -1. \tag{18}$$

Por conveniencia, definimos  $\vec{\sigma}$  mediante la expresión  $\vec{\alpha} \equiv i\vec{\sigma}$ ; por tanto, la Ec. (18) es equivalente a

$$\sigma_i^2 = 1. \tag{19}$$

Ahora, podemos rescribir la Ec. (17), usando el convenio de suma sobre índices repetidos y la definición de  $\vec{\sigma}$ , como sigue

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \partial_i \partial_i = \alpha_i \beta_j \partial_i \partial_j \\ &= \frac{1}{2}(\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i) \partial_i \partial_j \\ &= -\frac{1}{2}(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \partial_i \partial_j \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i) \partial_i \partial_j. \end{aligned} \tag{20}$$

Por lo tanto, las componentes de  $\vec{\sigma}$  deben cumplir

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i \equiv \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}. \tag{21}$$

Ningún conjunto de tres números reales o complejos puede cumplir la Ec. (21), pero un conjunto de matrices sí puede satisfacer tales relaciones de anticonmutación. Las matrices “canónicas” que cumplen (21) son las *matrices de Pauli*:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{22}$$

Ya que sabemos que  $\vec{\sigma}$  es un vector de matrices, debemos sobreentender que hay una matriz identidad multiplicando a los miembros derechos de las ecuaciones tales como las (19) y (21).

Las matrices de Pauli forman un conjunto maximal de matrices anticonmutantes, es decir, no existe una cuarta matriz que anticonmute con  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ , y cuyo cuadrado sea la identidad. Para ver esto, primero notemos que  $\sigma_3 = -i\sigma_1\sigma_2$ ; en efecto:

$$\begin{aligned} -i\sigma_1\sigma_2 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= -i \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3. \end{aligned} \quad (23)$$

Suponiendo que existe una matriz  $\sigma_4$  que anticonmuta con las otras tres, tenemos

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 &= -\sigma_4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \\ \Rightarrow \sigma_1\sigma_2(-i\sigma_1\sigma_2)\sigma_4 &= -\sigma_4\sigma_1\sigma_2(-i\sigma_1\sigma_2) \\ \Rightarrow -\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_4 &= \sigma_4\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2 \\ \Rightarrow -(\sigma_1)^2(\sigma_2)^2\sigma_4 &= \sigma_4(\sigma_1)^2(\sigma_2)^2 \\ \Rightarrow -\sigma_4 &= \sigma_4 \\ \Rightarrow \sigma_4 &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

De nuevo, en la última línea se sobreentiende que 0 representa la matriz  $2 \times 2$  cuyas entradas son todas cero.

Ahora podemos reescribir (13) como

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} + i\vec{\sigma} \cdot \nabla \right) \left( i \frac{\partial}{\partial t} - i\vec{\sigma} \cdot \nabla \right) \phi = m^2 \phi. \quad (25)$$

El resultado de aplicar el operador diferencial  $i(\partial/\partial t) - i\vec{\sigma} \cdot \nabla$  sobre  $\phi$  será un objeto de la misma naturaleza que  $\phi$ . Podemos escribir, sin pérdida de generalidad,

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} - i\vec{\sigma} \cdot \nabla \right) \phi = m\chi, \quad (26)$$

con lo cual (25) se convierte en

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} + i\vec{\sigma} \cdot \nabla \right) \chi = m\phi. \quad (27)$$

Reacomodando (26) y (27), obtenemos respectivamente

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi = i\vec{\sigma} \cdot \nabla \phi + m\chi \quad (28)$$

y

$$i \frac{\partial}{\partial t} \chi = -i\vec{\sigma} \cdot \nabla \chi + m\phi. \quad (29)$$

Las Ecs. (28) y (29) son llamadas *ecuaciones de Weyl* (acopladas).

Como cada  $\sigma_i$  es una matriz  $2 \times 2$  que actúa sobre  $\phi$  y  $\chi$ , éstos últimos deben ser objetos de dos componentes, los cuales se llaman espinores de Weyl izquierdo y derecho, respectivamente. Físicamente, representan partículas y antipartículas de espín  $(1/2)$ .

El caso de masa cero es particularmente interesante; en este límite las ecuaciones de Weyl se desacoplan y, usando la sustitución canónica  $E \leftrightarrow i(\partial/\partial t)$  y  $\vec{p} \leftrightarrow -i\nabla$ , se convierten en

$$\begin{aligned} E\phi &= -\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\phi, \\ E\chi &= \vec{\sigma} \cdot \vec{p}\chi. \end{aligned} \quad (30)$$

Recordando la relación relativista  $E^2 - \vec{p}^2 = m^2$ , en el caso de masa nula tenemos  $E = |\vec{p}|$ , por lo tanto,

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \hat{p}\phi &= -\phi, \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{p}\chi &= \chi, \end{aligned} \quad (31)$$

tal que  $\hat{p} \equiv (\vec{p}/|\vec{p}|)$ . De mecánica cuántica, sabemos (ver, por ejemplo, [9] o [13]) que las matrices de Pauli, salvo una constante multiplicativa, representan a los operadores de espín  $(1/2)$ , así que  $\vec{\sigma} \cdot \hat{p}$  es el operador que nos da la componente del espín en dirección del momento lineal. A esta cantidad (el valor de la proyección del espín de una partícula en dirección de su momento) se le conoce como *helicidad*. Formalmente, denotamos el operador de helicidad como  $h \equiv \vec{\sigma} \cdot \hat{p}$ , así que las Ecs. (31) nos dicen que los espinores de Weyl  $\phi$  y  $\chi$  son eigenestados de helicidad, con eigenvalores  $-1$  y  $+1$ , respectivamente. Algunos autores [11] definen una partícula derecha como aquella que tiene helicidad  $+(1/2)$ , e izquierda a la que tiene helicidad  $-(1/2)$ .

Como dijimos, los espinores de Weyl tienen dos componentes. Una convención muy usada [14,15,12] es usar superíndices punteados ( $\dot{a}, \dot{b}, \dots = \dot{1}, \dot{2}$ ) para etiquetar las componentes del espinor derecho  $\chi$  y subíndices no punteados ( $a, b, \dots = 1, 2$ ) para las del espinor izquierdo  $\phi$ , y representarlos con vectores columna, es decir

$$\phi_a = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \chi^{\dot{a}} = \begin{pmatrix} \chi^{\dot{1}} \\ \chi^{\dot{2}} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$\phi_1, \phi_2, \chi^{\dot{1}}$  y  $\chi^{\dot{2}}$  son, en general, números complejos (los cuales conmutan entre sí). El símbolo de Levi-Civita de 2 índices se usa para subir o bajar índices espinoriales:

$$\begin{aligned} \phi^a &\equiv \epsilon^{ab}\phi_b, \\ \chi_{\dot{a}} &\equiv \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\chi^{\dot{b}}, \end{aligned} \quad (33)$$

donde  $\epsilon^{12} = \epsilon^{\dot{1}\dot{2}} = \epsilon_{21} = \epsilon_{\dot{2}\dot{1}} \equiv +1$ . Notar que, usando la antisimetría de  $\epsilon_{ab}$ ,

$$\phi^a\psi_a = \phi^a\epsilon_{ab}\psi^b = -\epsilon_{ba}\phi^a\psi^b = -\phi_a\psi^a, \quad (34)$$

y, por lo tanto,

$$\phi^a\phi_a = 0. \quad (35)$$

En analogía con (32), los espinores  $\phi^a$  y  $\chi_{\dot{a}}$  se representan usualmente con vectores fila:

$$\phi^a = (\phi^1, \phi^2), \quad \chi_{\dot{a}} = (\chi_1, \chi_2). \quad (36)$$

Las componentes  $\phi_a$  y  $\chi^{\dot{a}}$  de los espinores de Weyl no son independientes entre sí, como veremos a continuación. Primero notemos que la definición (33) implica que

$$\begin{aligned}\phi^1 &= \phi_2, \\ \phi^2 &= -\phi_1.\end{aligned}\quad (37)$$

Además, la “ecuación izquierda” de Weyl, en forma matricial, es de la forma

$$\begin{pmatrix} E\phi_1 \\ E\phi_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

lo cual es equivalente, igualando componente a componente, usando (37) y tomando complejo conjugado, a

$$E\phi^{2*} = -p_3\phi^{2*} + (p_1 + ip_2)\phi^{1*}, \quad (39a)$$

$$E\phi^{1*} = (p_1 - ip_2)\phi^{2*} + p_3\phi^{1*}. \quad (39b)$$

Por otro lado, la “ecuación derecha” de Weyl está dada por:

$$E\chi^{\dot{1}} = p_3\chi^{\dot{1}} + (p_1 - ip_2)\chi^{\dot{2}}, \quad (40a)$$

$$E\chi^{\dot{2}} = (p_1 + ip_2)\chi^{\dot{1}} - p_3\chi^{\dot{2}}. \quad (40b)$$

Se puede ver que (39a) y (39b) tienen exactamente la misma forma que (40b) y (40a), respectivamente, sólo se intercambian  $\chi^{\dot{1}}$  por  $\phi^{1*}$  y  $\chi^{\dot{2}}$  por  $\phi^{2*}$ . Así, concluimos que<sup>v</sup>

$$\begin{aligned}\chi^{\dot{a}} &= \phi^{a*}, \\ \chi_{\dot{a}} &= \phi_a^*.\end{aligned}\quad (41)$$

### 3. Acoplamiento de los campos de Weyl al campo electromagnético

La densidad lagrangiana que describe a dos campos espinoriales de Weyl de masa  $m$  se puede escribir como

$$\mathcal{L} = i\chi^{\dot{1}}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\chi + i\phi^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\phi - m\chi\phi - m\chi^{\dot{1}}\phi^{\dagger}, \quad (42)$$

donde  $\sigma^{\mu} = (I, \vec{\sigma})$  y  $\bar{\sigma}^{\mu} = (-I, \vec{\sigma})$ . Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, obtenemos las ecuaciones de movimiento (EDM)

$$m\chi - i\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\phi^{\dagger} = 0, \quad (43)$$

$$-i\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\chi + m\phi^{\dagger} = 0. \quad (44)$$

Para el caso  $m = 0$  (por simplicidad), usando la sustitución minimal  $\partial_{\mu} \rightarrow D_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu}$  ( $A_{\mu}$  es el cuadripotencial electromagnético:  $A_{\mu} = (\varphi, \vec{A})$ , donde  $\varphi$  es el potencial escalar eléctrico y  $\vec{A}$  es el potencial vectorial magnético) en las ecuaciones anteriores, obtenemos

$$-i\sigma^{\mu}D_{\mu}\phi^{\dagger} = 0, \quad (45)$$

$$-i\bar{\sigma}^{\mu}D_{\mu}\chi = 0. \quad (46)$$

El objetivo es llegar, a partir de (45) y (46), a EDM con segundas derivadas espaciales y temporales. Multiplicando (45) por el operador  $i\bar{\sigma}^{\nu}D_{\nu}$ , obtenemos

$$\bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu}D_{\nu}D_{\mu}\phi^{\dagger} = 0. \quad (47)$$

Luego, usando las siguientes relaciones (ver [15]):

$$\bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu} = g^{\nu\mu} - 2i\bar{\sigma}^{\nu\mu} \quad (48)$$

$$\sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu} = g^{\nu\mu} - 2i\sigma^{\nu\mu} \quad (49)$$

$$\bar{\sigma}^{\nu\mu} = -\bar{\sigma}^{\mu\nu} \quad (50)$$

$$\sigma^{\nu\mu} = -\sigma^{\mu\nu} \quad (51)$$

llegamos a que

$$(D_{\mu}D^{\mu} - 2i\bar{\sigma}^{\nu\mu}D_{\nu}D_{\mu})\phi^{\dagger} = 0. \quad (52)$$

El segundo término de (52) se debe ver cuidadosamente; usando (50) vemos que

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^{\nu\mu}(\partial_{\nu} - ieA_{\nu})(\partial_{\mu} - ieA_{\mu})\phi^{\dagger} &= -ie\bar{\sigma}^{\nu\mu}\partial_{\nu}A_{\mu}\phi^{\dagger} \\ &= -\frac{ie}{2}(\bar{\sigma}^{\nu\mu}\partial_{\nu}A_{\mu} + \bar{\sigma}^{\mu\nu}\partial_{\mu}A_{\nu})\phi^{\dagger} \\ &= -\frac{ie}{2}\bar{\sigma}^{\nu\mu}F_{\nu\mu}.\end{aligned}\quad (53)$$

Hemos reducido  $\bar{\sigma}^{\nu\mu}D_{\nu}D_{\mu} = -\frac{ie}{2}\bar{\sigma}^{\nu\mu}F_{\nu\mu}$  ya que tenemos

$$\bar{\sigma}^{\nu\mu}\partial_{\nu}\partial_{\mu}\phi^{\dagger} = 0, \quad (54)$$

$$\bar{\sigma}^{\nu\mu}(A_{\mu}\partial_{\nu} + A_{\nu}\partial_{\mu})\phi^{\dagger} = 0 \quad (55)$$

y

$$\bar{\sigma}^{\nu\mu}A_{\nu}A_{\mu}\phi^{\dagger} = 0. \quad (56)$$

Finalmente, (47) queda como

$$(D_{\mu}D^{\mu} - e\bar{\sigma}^{\nu\mu}F_{\nu\mu})\phi^{\dagger} = 0. \quad (57)$$

Con el mismo procedimiento podemos encontrar que (44) es

$$(D_{\mu}D^{\mu} - e\sigma^{\nu\mu}F_{\nu\mu})\chi = 0. \quad (58)$$

Para entender el acoplamiento de una partícula con espín  $s = (1/2)$  al campo electromagnético externo, debemos expresar (57) y (58) de tal forma que los campos  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  aparezcan acoplados explícitamente a las matrices de Pauli. Del segundo término de (57) tenemos

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^{\nu\mu}F_{\nu\mu} &= \bar{\sigma}^{00}F_{00} + \bar{\sigma}^{0j}F_{0j} + \bar{\sigma}^{j0}F_{j0} + \bar{\sigma}^{ij}F_{ij} \\ &= \frac{1}{2}i\sigma^jF_{0j} - \frac{1}{2}i\sigma^jF_{j0} + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\sigma_kF_{ij} \\ &= \frac{1}{2}i\vec{\sigma} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2}i\vec{\sigma} \cdot \vec{E} - \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \\ &= -\vec{\sigma} \cdot (\vec{B} - i\vec{E}),\end{aligned}\quad (59)$$

donde hemos usado las siguientes identidades (ver [15]):

$$\sigma^{ij} = \bar{\sigma}^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\sigma^k \quad (60)$$

y

$$\sigma^{i0} = -\sigma^{0i} = -\bar{\sigma}^{i0} = \bar{\sigma}^{0i} = \frac{1}{2}i\sigma^i. \quad (61)$$

Por otro lado, sabemos que las componentes de los campos  $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$  y  $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$  se obtienen a partir del tensor de Faraday mediante

$$B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk} \quad (62)$$

y

$$E^i = -F^{0i} = F^{i0}, \quad (63)$$

donde

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Finalmente, usando la Ec. (59), la Ec. (57) toma la forma

$$(D_\mu D^\mu + e\vec{\sigma} \cdot (\vec{B} - i\vec{E}))\phi^\dagger = 0. \quad (65)$$

De manera similar, para (58) encontramos

$$(D^\mu D_\mu + e\vec{\sigma} \cdot (\vec{B} + i\vec{E}))\chi = 0. \quad (66)$$

Una vez que tenemos las EDM para campos espinoriales de 2 componentes, podemos verificar si el sistema tiene simetría C y P.

### 3.1. Paridad

Sabemos que  $\vec{E}$  es un vector (polar) y  $\vec{B}$  es un pseudovector (o vector axial), es decir, bajo una transformación de paridad ( $\vec{r} \rightarrow \vec{r}^P = -\vec{r}$ ),  $\vec{E} \rightarrow -\vec{E}$  y  $\vec{B} \rightarrow \vec{B}$ . Si tomamos (66) y aplicamos una transformación P, obtenemos

$$(D^\mu D_\mu + e\vec{\sigma} \cdot (\vec{B}^P + i\vec{E}^P))\chi^P = 0 \quad (67)$$

$$(D^\mu D_\mu + e\vec{\sigma} \cdot (\vec{B} - i\vec{E}))\chi^P = 0. \quad (68)$$

Vemos que, si definimos  $\chi^P = \phi^\dagger$ , entonces la Ec. (66) bajo transformación de paridad es justamente (65). A la inversa, por la misma transformación, (65) se transforma en (66). Por lo tanto el sistema es invariante bajo transformaciones de paridad.

### 3.2. Conjugación de carga

Si tomamos la Ec. (65) y conjugamos carga, es decir,

$$\begin{aligned} e &\rightarrow e^C = -e, \\ \rho(\vec{r}) &\rightarrow \rho^C(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}), \\ V(\vec{r}) &\rightarrow V^C(\vec{r}) = -V(\vec{r}), \\ \vec{A}(\vec{r}) &\rightarrow \vec{A}^C(\vec{r}) = -\vec{A}(\vec{r}), \end{aligned} \quad (69)$$

vemos que

$$(D_\mu D^\mu + e^C \vec{\sigma} \cdot (\vec{B}^C - i\vec{E}^C))\phi^{\dagger C} = 0 \quad (70)$$

$$(D_\mu D^\mu - e\vec{\sigma} \cdot (-\vec{B} + i\vec{E}))\phi^{\dagger C} = 0 \quad (71)$$

$$(D_\mu D^\mu + e\vec{\sigma} \cdot (\vec{B} - i\vec{E}))\phi^{\dagger C} = 0. \quad (72)$$

Si definimos  $\phi^{\dagger C} = \phi^\dagger$ , vemos que (65) es invariante ante conjugación de carga, análogamente para (66).

## 4. Aspectos básicos del formalismo de helicidad (FH)

Tradicionalmente, los procesos básicos de QED se trabajan en el formalismo de espinores de 4 componentes, sin embargo recientemente [16] se han visto las muchas ventajas de trabajar con los métodos de helicidad en el formalismo de 2 componentes. En esta sección vamos a presentar los aspectos de QED en el formalismo de helicidad.

Sean  $p$  y  $k$  dos cuadrimomentos, y sean  $\phi$  y  $\kappa$  los espinores correspondientes, es decir,  $\phi$  es el espinor de Weyl que representa a una partícula no masiva de espín (1/2) (orientación arbitraria) y de cuadrimomento  $p$ , y algo similar para  $\kappa$  y  $k$ . Definimos la notación

$$[pk] \equiv [p]^a [k]_a \equiv \phi^a \kappa_a. \quad (73)$$

(Es decir, hemos definido  $[p]^a \equiv \phi^a$  y  $[k]_a \equiv \kappa_a$ , y la notación  $[pk]$  es simplemente una abreviación para la contracción de índices espinoriales.) Debido a (34) y (35), tenemos  $[kp] = -[pk]$  y  $[pp] = 0$ . Para espinores derechos, a su vez, definimos

$$\langle pk \rangle \equiv \langle p|_{\dot{a}} |k\rangle^{\dot{a}} \equiv \phi_{\dot{a}} \kappa^{\dot{a}} \quad (74)$$

(aquí, hemos definido  $\langle p|_{\dot{a}} \equiv \phi_{\dot{a}}$  y  $|k\rangle^{\dot{a}} \equiv \kappa^{\dot{a}}$ , y  $\langle pk \rangle$  es una abreviación para la contracción de índices espinoriales punteados), lo cual implica que  $\langle kp \rangle = -\langle pk \rangle$  y  $\langle pp \rangle = 0$ . Usando (41), tenemos

$$\langle pk \rangle = \phi_{\dot{a}} \kappa^{\dot{a}} = (\phi_a \kappa^a)^* = (\kappa^a \phi_a)^* = [kp]^*. \quad (75)$$

En el FH se trabaja con espinores de dos componentes que no anticonmutan (también conocidos en la literatura como twistores). Veremos que en el límite ultraenergético o, equivalentemente, para  $s, |t|$  y  $|u| \gg m^{2vi}$ , el cálculo se vuelve mucho más sencillo con FH que utilizando métodos convencionales con espinores de 4 componentes.

Para poder hacer el cálculo con el Formalismo de Helicidad es conveniente utilizar la nueva notación, que básicamente consiste en escribir las componentes de los espinores usuales  $u$  y  $v$ , de 4 componentes, en términos de twistores:

$$\begin{aligned} u_-(p) = v_+(p) &= \begin{pmatrix} [p]_a \\ 0 \end{pmatrix}, \\ u_+(p) = v_-(p) &= \begin{pmatrix} 0 \\ [p]^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \\ \bar{u}_-(p) = \bar{v}_+(p) &= (0, \langle p|_{\dot{a}}), \\ \bar{u}_+(p) = \bar{v}_-(p) &= ([p]^a, 0), \end{aligned} \quad (76)$$

donde el producto entre estos bra-kets de twistores cumple

$$\begin{aligned} [k|p] &= [kp], & \langle k|p \rangle &= \langle kp \rangle, \\ [k|p] &= 0, & \langle k|p \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (77)$$

Entre las muchas relaciones útiles de los bra-kets de twistores se tiene la que los relaciona directamente con los 4-vectores de las partículas involucradas en el proceso de interés:

$$\begin{aligned} \langle k p | p k \rangle &= \text{Tr} \left[ \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \not{k} \not{p} \right], \\ &= -2k \cdot p = -(k+p)^2. \end{aligned} \quad (78)$$

(Para llegar a la última línea se ha usado el hecho de que que las partículas tienen masa cero.) Podemos escribir cualquier 4-vector  $p$  “no masivo” (límite ultrarrelativista) en la forma

$$-\not{p} = |p\rangle [p] + |p\rangle \langle p|. \quad (79)$$

Se utilizarán las reglas de Feynman de QED como se hace comúnmente para espinores de 4 componentes, la diferencia con el **FH** es que nuestro principal objeto matemático son ahora los twistores, debemos entonces expresar todo lo que figura en las reglas de Feynman en términos de ellos. Tenemos hasta ahora expresados casi todos los ingredientes en términos de twistores, lo único que nos falta escribir son los 4-vectores de polarización  $\varepsilon_{\lambda_i}^{\mu}$  y  $\varepsilon_{\lambda_i}'^{\mu}$  ( $\lambda_i$  es la helicidad) de los fotones entrantes y salientes.

Como se puede ver en [17] los 4-vectores de polarización en términos de los twistores se pueden escribir como sigue:

$$\varepsilon_+^{\mu}(k) = -\frac{\langle q | \gamma^{\mu} | k \rangle}{\sqrt{2} \langle q k \rangle}, \quad (80)$$

$$\varepsilon_-^{\mu}(k) = -\frac{[q | \gamma^{\mu} | k \rangle}{\sqrt{2} [q k]}. \quad (81)$$

En las dos expresiones anteriores  $q$  es un momento de referencia arbitrario no masivo.

Resulta conveniente tener de una vez las expresiones para  $\not{\varepsilon}_{\pm}(k)$ , ya que aparecen al escribir las amplitudes usando las reglas de Feynman

$$\not{\varepsilon}_+(k; p) = \frac{\sqrt{2}}{\langle q k \rangle} (|k\rangle \langle q| + |q\rangle \langle k|), \quad (82)$$

$$\not{\varepsilon}_-(k; p) = \frac{\sqrt{2}}{[q k]} (|k\rangle [q] + |q\rangle \langle k|). \quad (83)$$

## 5. Dispersión de Compton en el Formalismo de Helicidad

El objetivo en esta sección es calcular la amplitud invariante de la dispersión de Compton  $e^{-}\gamma \rightarrow e^{-}\gamma$  Fig. 1 utilizando técnicas modernas de Teoría Cuántica de Campos como el **FH**. En este trabajo sólo haremos el análisis de los diagramas de Feynman a nivel árbol. Definimos las variables de Mandelstam

$$s_{ij} = -(p_i + p_j)^2. \quad (84)$$

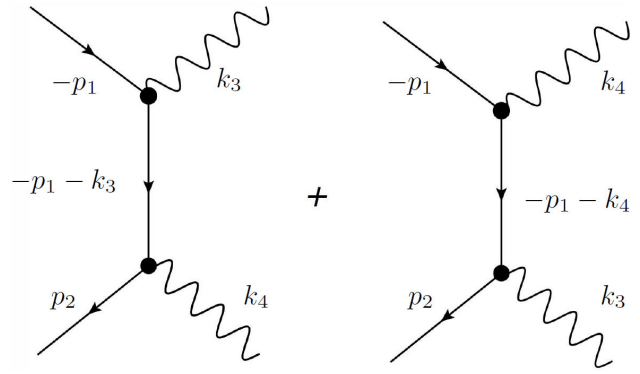


FIGURA 1. Diagramas para una dispersión de fermiones-fotones, se consideran todos los momentos salientes.

Es posible generalizar el proceso  $e^{-}\gamma \rightarrow e^{-}\gamma$  a procesos con dos fermiones externos (no virtuales) y dos fotones externos, como se muestra en la Fig. 1. Es importante identificar los diagramas que son cero en este tipo de procesos, los diagramas que tienen 2 fermiones externos con la misma helicidad son cero, esto se debe a que los elementos matriciales de un número impar de matrices gamma de Dirac en el espacio de twistores es cero [18]; explícitamente,

$$\langle p | \gamma^{\mu} | k \rangle = 0, \quad (85)$$

$$[p | \gamma^{\mu} | k \rangle = 0. \quad (86)$$

Denotamos las amplitudes por  $\mathcal{M}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}$ , donde  $\lambda_i$  es la helicidad de la partícula  $i$ -ésima. En nuestro caso, sólo hay 2 amplitudes que contribuyen al proceso,  $\mathcal{M}_{+-\lambda_3 \lambda_4}$  y  $\mathcal{M}_{-+\lambda_3 \lambda_4}$ , esta última es justamente la compleja conjugada de la primera, entonces basta con calcular una de ellas. Es posible, a partir de (82) y de (77), mostrar que

$$\not{\varepsilon}_-(k; p) | p \rangle = 0, \quad (87)$$

$$[p | \not{\varepsilon}_-(k; p) = 0, \quad (88)$$

$$\not{\varepsilon}_+(k; p) | p \rangle = 0, \quad (89)$$

$$\langle p | \not{\varepsilon}_+(k; p) = 0. \quad (90)$$

La amplitud  $\mathcal{M}_{+-\lambda_3 \lambda_4}$  obtenida directamente de las reglas convencionales de Feynman se puede escribir ahora en términos de twistores como

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{+-\lambda_3 \lambda_4} &= (-i) e^2 \langle p_2 | \varepsilon_{\lambda_4}^{\mu}(k_4; q_4) (i \gamma_{\mu}) \\ &\times \left( \frac{-i(\not{p}_1 + \not{k}_3)}{(p_1 + k_3)^2} \right) (i \gamma_{\nu}) \varepsilon_{\lambda_3}^{\nu}(k_3; q_3) | p_1 \rangle \\ &- (-i) e^2 \langle p_2 | \varepsilon_{\lambda_3}^{\mu}(k_3; q_3) (i \gamma_{\mu}) \\ &\times \left( \frac{-i(\not{p}_1 + \not{k}_4)}{(p_1 + k_4)^2} \right) (i \gamma_{\nu}) \varepsilon_{\lambda_4}^{\nu}(k_4; q_4) | p_1 \rangle \end{aligned} \quad (91)$$

$$\begin{aligned}
 &= -e^2 \langle 2 | \not{\epsilon}_{\lambda_4} (k_4; q_4) \left( \frac{\not{p}_1 + \not{k}_3}{s_{13}} \right) \not{\epsilon}_{\lambda_3} (k_3; q_3) | 1 \rangle \\
 &- e^2 \langle 2 | \not{\epsilon}_{\lambda_3} (k_3; q_3) \left( \frac{\not{p}_1 + \not{k}_4}{s_{14}} \right) \not{\epsilon}_{\lambda_3} (k_4; q_4) | 1 \rangle \quad (92)
 \end{aligned}$$

Si tomamos las polarizaciones  $\lambda_3 = \lambda_4 = -$  en (91) y elegimos  $q_3 = q_4 = p_1$  (recordemos que  $q_3$  y  $q_4$  son 4-momentos de referencia arbitrarios) obtenemos que  $\mathcal{M}_{+-\lambda_3\lambda_4}$ , después de usar (87), es cero; lo mismo ocurre si  $\lambda_3 = \lambda_4 = +$ , eligiendo  $q_3 = q_4 = p_2$  y usando (90). Las únicas amplitudes que sobreviven son  $\mathcal{M}_{+---}$  y  $\mathcal{M}_{-++-}$ . Vemos en (92) que en el caso que  $\lambda_3 = +$ , eligiendo el 4-momento de referencia arbitrario  $q_3 = p_2$  y utilizando (90), el segundo término de (92) se anula.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{+---} &= -e^2 \langle 2 | \not{\epsilon}_{\lambda_4} (k_4; q_4) \\
 &\times \left( \frac{\not{p}_1 + \not{k}_3}{s_{13}} \right) \not{\epsilon}_{\lambda_3} (k_3; q_3) | 1 \rangle \quad (93)
 \end{aligned}$$

Utilizando (82) en (93) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{+---} &= -e^2 \left( \frac{1}{s_{13}} \right) \frac{\sqrt{2}}{[q_4 4] \langle 2 4 \rangle} \\
 &\times [q_4 | (\not{p}_1 + \not{k}_3) | 2 \rangle [3 1] \frac{\sqrt{2}}{\langle 2 3 \rangle} \quad (94)
 \end{aligned}$$

Tomando  $q_4 = k_3$  y recordando que  $[p] \not{p} = [p] (|p\rangle [p] + |p\rangle \langle p|) = 0$ , (94) resulta ser

$$\mathcal{M}_{+---} = 2e^2 \frac{\langle 2 4 \rangle [3 1] \langle 1 2 \rangle [3 1]}{[3 4] \langle 2 3 \rangle s_{13}}. \quad (95)$$

Para un proceso con  $n$  partículas externas y tratando todos los momentos como salientes, la ley de conservación del cuadrimento se escribe como

$$\sum_{j=1}^n \langle i j \rangle [j k] = 0, \quad y \quad \sum_{j=1}^n [i j] \langle j k \rangle = 0. \quad (96)$$

De (96) uno puede expandir la serie para  $n = 4$ , que es justamente el caso para el proceso  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ , y encontrar que  $\langle 2 1 \rangle [1 3] + \langle 2 4 \rangle [4 3] = 0$ ; además sabemos que  $s_{13} = \langle 1 3 \rangle [3 1]$ , considerando estos resultados en (94) y cancelando términos iguales, se obtiene finalmente

$$\mathcal{M}_{+---} = 2e^2 \frac{\langle 2 4 \rangle^2}{(1 3) \langle 2 3 \rangle}. \quad (97)$$

La amplitud restante  $\mathcal{M}_{-++-}$  se encuentra por simetría de cruce  $3 \leftrightarrow 4$ :

$$\mathcal{M}_{-++-} = 2e^2 \frac{\langle 2 3 \rangle^2}{(1 4) \langle 2 4 \rangle}. \quad (98)$$

El promedio de la amplitud total al cuadrado se calcula de la forma usual

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} [2 (|\mathcal{M}_{+---}|^2 + |\mathcal{M}_{-++-}|^2)] \quad (99)$$

Haciendo las cuentas explícitamente

$$\begin{aligned}
 \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \left\{ 2 \left[ 4e^4 \left( \frac{\langle 2 4 \rangle^2}{(1 3) \langle 2 3 \rangle} \right) \left( \frac{\langle 2 4 \rangle^2}{(1 3) \langle 2 3 \rangle} \right)^* \right. \right. \\
 &\left. \left. + 4e^4 \left( \frac{\langle 2 3 \rangle^2}{(1 4) \langle 2 4 \rangle} \right) \left( \frac{\langle 2 3 \rangle^2}{(1 4) \langle 2 4 \rangle} \right)^* \right] \right\} \quad (100)
 \end{aligned}$$

Tomando el primer término de (100) y recordando que  $[i j]^* = \langle j i \rangle$  obtenemos expresiones en el denominador del tipo

$$\begin{aligned}
 \langle 1 3 \rangle \langle 2 3 \rangle \langle 1 3 \rangle^* \langle 2 3 \rangle^* &= \langle 1 3 \rangle \langle 2 3 \rangle [1 3] [2 3] \\
 &= s_{13} s_{23} \quad (101)
 \end{aligned}$$

y, en el numerador,

$$\begin{aligned}
 \langle 2 4 \rangle \langle 2 4 \rangle \langle 2 4 \rangle^* \langle 2 4 \rangle^* &= \langle 2 4 \rangle \langle 2 4 \rangle [2 4] [2 4] \\
 &= s_{24}^2 = s_{13}^2. \quad (102)
 \end{aligned}$$

De la misma forma podemos simplificar el segundo término de (100) y, finalmente, obtener

$$\begin{aligned}
 \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 2e^4 \left( \left| \frac{s_{14}}{s_{13}} \right| + \left| \frac{s_{13}}{s_{14}} \right| \right) \\
 &= -2e^4 \left( \frac{u}{s} + \frac{s}{u} \right). \quad (103)
 \end{aligned}$$

Para el caso de la dispersión de Compton,  $s_{13} = s$ ,  $s_{12} = t$  y  $s_{14} = u$ . Vemos que obtenemos el mismo resultado que se obtiene al usar espinor de 4 componentes, pero nos ahorramos el uso del álgebra de trazas, etc.

## 6. Conclusiones

En este artículo hemos presentado el formalismo para el tratamiento de fermiones usando espinores de Weyl como los campos básicos. Actualmente se están realizando importantes avances para poder calcular procesos de dispersión con muchas partículas en el estado final, los cuales se basan en el llamado formalismo de helicidad, el cual hace uso primordial de dichos espinores de Weyl. Consideramos que es importante transmitir los aspectos centrales de estas nuevas técnicas a los estudiantes de física teórica, mediante el desarrollo de varios aspectos, incluido un proceso físico de dispersión.

Entre los ejemplos discutidos en este artículo, se incluyen

1. Una derivación de la ecuación de Weyl a partir de la ecuación de Klein-Gordon.
2. La incorporación del momento magnético de un fermión directamente a partir de la ecuación de Weyl con el campo electromagnético ( $A_\mu$ ), mediante el principio de sustitución mínima, es decir,  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ie A_\mu$ .
3. Cálculo de la dispersión de Compton  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$  usando el formalismo de helicidad, cuyos aspectos centrales son discutidos a un nivel básico.



Con este artículo esperamos cumplir el objetivo de motivar a los estudiantes para profundizar en el estudio de la teoría cuántica de campos y en particular en los temas de los nuevos métodos de helicidad y amplitudes.

## Agradecimientos

J.L. Díaz-Cruz agradece el apoyo del SNI-CONACYT. B. Larios López agradece el apoyo de la SMF y del ICTP.

- 
- i.* Aunque también la propuso el mismo Schrödinger.
  - ii.* A partir de ahora usaremos unidades naturales,  $\hbar = c = 1$ .
  - iii.* La terminología viene de cierta representación de la complejificación del álgebra de Lie asociada al grupo de Lorentz; ver [12].
  - iv.* De aquí en adelante, a diferencia de (4), tomamos el tensor métrico de Minkowski con signatura +2, es decir,  $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ .
  - v.* Notar que en el argumento dado, supusimos que el momento  $\vec{p}$  es real. En algunos casos es útil trabajar con momentos complejos; véase [16]. Si el momento  $p$  es complejo, las relaciones (41) no son válidas.
  - vi.*  $s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$ ,  $t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2$  y  $u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2$  son las variables cinemáticas invariantes ante transformaciones de Lorentz, conocidas como variables de Mandelstam, en honor al físico Sudafricano Stanley Mandelstam,  $p_1, p_2$  son los 4-vectores entrantes y  $p_3, p_4$  son los 4-vectores salientes en la colisión.
1. T. D. Lee y C. N. Yang, *Phys. Rev.* **104** (1956) 254.
  2. T. D. Lee y C. N. Yang, *Phys. Rev.* **105** (1957) 1671.
  3. C. S. Wu *et al*, *Phys. Rev.* **105** (1957) 1413.
  4. C. N. Yang y R. L. Mills, *Phys. Rev.* **96** (1996) 191.
  5. J. Schwinger, *Ann. Phys.* **2** (1957) 407.
  6. S. Bludman, *Nuovo Cim.* **9** (1958) 433.
  7. S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579.
  8. S. L. Glashow y M. Gell-Mann, *Ann. Phys.* **15** (1961) 437.
  9. D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, 2a. ed. (Pearson-Prentice Hall, 2005).
  10. R. Penrose, *El Camino a la Realidad* (Debate, México, 2008).
  11. M. E. Peskin y D. V. Schroeder, *An introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, 1995).
  12. L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, 2a. ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
  13. C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloe, *Quantum Mechanics*, vol. 1 (John Wiley & Sons, 1977).
  14. G. F. Torres del Castillo, *Spinors in Four-Dimensional Spaces* (Birkhauser, New York, 2010).
  15. H. K. Dreiner, H. E. Haber y S. P. Martin, arXiv:0812.1594v5.
  16. H. Elvang y Y. Huang, arXiv: 1308.1697v2.
  17. M. Srednicki, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, 2007).
  18. D. J. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, 2a. ed. (Wiley-VCH, Weinheim, 2008).