

Frustración en redes arquimedianas antiferromagnéticas

W. Lebrecht y J. F. Valdés

Departamento de Físicas, Universidad de La Frontera,

Casilla 54-D, Temuco, Chile

e-mail: walter.lebrecht@ufrontera.cl

Received 3 May 2013; accepted 6 August 2013

Se propone estudiar analíticamente la frustración magnética en la fase antiferromagnética de diferentes redes Arquimedianas, dotadas con condiciones periódicas de borde. Para ello se considera una red con N espines, los cuales pueden orientarse hacia arriba (*up*) o hacia abajo (*down*), de modo que la interacción de intercambio en el modelo de Ising solo sea de un tipo, $+J$. Se informan los resultados obtenidos para los parámetros topológicos de red como: plaquetas frustradas, longitudes de frustración y energía asociadas al nivel fundamental, todos ellos a $T = 0$. Se concluye que la posición relativa en la red de una interacción triangular, juega un rol tanto o más importante que el número de coordinación.

Descriptores: Redes arquimedianas; frustración; plaquetas.

This paper tackles the problem of studying anatically the phenomena associated to magnetic frustations for different Archimedean lattices with periodic boundary conditions, all of them in the antiferromagnetic phase. A lattice formed by N spins is considered and modeled through $\pm J$ Ising model. Antiferrogmagnetic phase is restricted to $+J$ interactions between two near-nearest neighbor spin sites. Topological parameters such as frustrated plaquettes, frustration length and energy associated to the ground level at $T=0$ are reported. The relative position of a triangular interaction for each lattice is as much or more important than the coordination number for the same lattice.

Keywords: Archimedean lattices; frustration; plaquettes.

PACS: 05.50.+q; 75.10Hk

1. Introducción y Teoría

Los sistemas magnéticos ordenados, tales como el ferromagnetismo y el antiferromagnetismo, han sido estudiados con detalle en la literatura. El éxito de ellos, motivó el estudio de sistemas magnéticos desordenados de corto alcance. Estos sistemas, usualmente denominados vidrios de espín (SG), han sido estudiados con gran interés en las últimas décadas bajo distintos modelos [1-6]. El más simple de ellos, lo constituye el modelo de Ising [7] que considera interacciones mixtas en competencia y distribuidas al azar en una red plana o tridimensional [8-10]. Estas características necesarias y suficientes dan el carácter de amorfo al sistema magnético y dependiendo de la concentración de un tipo de interacción, se obtienen transiciones de fase orden - desorden [1-2]. Los estudios mencionados anteriormente, han mostrado un nuevo fenómeno denominado *frustración* y que fue mencionado por primera vez por Toulouse [11]. Un ejemplo clásico del fenómeno de frustración, lo constituye la red triangular antiferromagnética ($+J$) [12,13] que produce en forma natural un quiebre de simetría, alterando el cálculo de parámetros físicos y de orden asociados al sistema. Toulouse propone un método alternativo y topológico para determinar la energía del nivel fundamental de sistemas con interacciones mixtas caracterizados por un modelo de Ising $\pm J$. En este nuevo esquema, se definen conceptos tales como *plaqueta frustrada* y *longitud de frustración*, que reemplazan la combinatoria de espines del modelo de Ising obteniéndose los mismos resultados para minimizar la energía [14-18].

Desde el punto de vista topológico, una plaqueta es el mínimo circuito cerrado de enlaces considerando sus mo-

mentos magnéticos a primeros vecinos. Así, la plaqueta triangular posee un número de 3 enlaces, la plaqueta cuadrada 4, la pentagonal 5, la hexagonal 6 y así sucesivamente. Empíricamente una *plaqueta está frustrada cuando posee un número impar de enlaces antiferromagnéticos*, como ocurre en la red triangular en la fase antiferromagnética. Por el contrario, en la fase ferromagnética no hay frustración y cuando el sistema posee enlaces mixtos en forma aleatoria, como los vidrios de espín, está presente la frustración en plaquetas. Se observa en estos sistemas, que usualmente coexisten plaquetas con un número par e impar de enlaces antiferromagnéticos. En el Anexo 1, se explica la manera de obtener la función de plaquetas frustradas para una pentágono (número impar de enlaces) y un dodecágono (número par de enlaces). Considerando estos elementos, una red formada por plaquetas de un mismo tipo de geometría, cuyo número de enlaces sea par, presenta un comportamiento simétrico en los parámetros que dan cuenta de las propiedades del nivel fundamental respecto a igual concentración de enlaces ferromagnéticos y antiferromagnéticos [16-18]. En caso contrario, se observa un comportamiento asimétrico de ellos. Esta misma observación es válida cuando la red contiene plaquetas que incluyen diferentes geometrías (mixtas), como es el caso de las redes Arquimedianas no homogéneas [20-22]. Geométricamente, las redes Arquimedianas son arreglos bidimensionales de sitios y trazos que generan diferentes geometrías cuando los trazos conforman celdas, siendo constante el número de trazos que convergen en cada sitio. Existen únicamente 11 redes Arquimedianas, de las cuales 3 son homogéneas en el sentido de que sus celdas están compuestas por un único tipo de geome-

tría y corresponden a la red cuadrada, triangular y hexagonal o panal de abejas. Las 8 restantes se denominan redes mixtas o no homogéneas, pues están compuestas por combinaciones de celdas con geometrías diferentes.

Un segmento de frustración es el elemento que une dos plaquetas frustradas, frustrando enlaces a su paso. En otras palabras, es la medida de la vecindad de dos plaquetas frustradas. Eventualmente se puede considerar más de un enlace para ir de una plaqueta frustrada a otra. La longitud de frustración es un concepto asociado a la red y corresponde al número total de enlaces frustrados mediante segmentos de frustración. Cuando la longitud de frustración es mínima, se obtienen las propiedades del nivel fundamental a través de esta técnica [19-22]. Las distintas formas de conectar tales plaquetas frustradas, representan la degeneración del nivel.

Para ejemplificar estos conceptos, a continuación se describe el comportamiento de la red triangular antiferromagnética con N espines y condiciones periódicas de borde. Por un lado, el número total de interacciones o enlaces es $B = 3N$ y por otro, el número total de plaquetas P es $2N$. Como se ha indicado anteriormente, todas las plaquetas triangulares presentan frustración (cada una tiene un número impar de enlaces antiferromagnéticos) y la longitud de frustración es $B_F = (2N/2) = N$ (por cada par de plaquetas frustradas P_F existe un segmento de frustración). Las distintas formas de conectar plaquetas frustradas mediante un segmento de frustración, está directamente relacionado con la degeneración del nivel fundamental y este parámetro crece con el tamaño N de la red. La Fig. 1, ilustra cada uno de los conceptos mencionados anteriormente para un arreglo 3×3 de una red triangular antiferromagnética con 9 espines y condiciones periódicas de borde, las que se indican como enlaces y sitios segmentados en los extremos derecho y superior de la figura. En ella, las líneas dobles representan un enlace antiferromagnético cuya interacción tiene el valor $+1$ por comodidad y la distribución de espines “arriba” o “abajo” están representados por “+” y “-” respectivamente. Esta colección de espines constituye uno de los estados del nivel fundamental. El número de plaquetas para este arreglo es 18, número equivalente al de plaquetas frustradas P_F . Una plaqueta frustrada no satisface un mínimo de energía (como

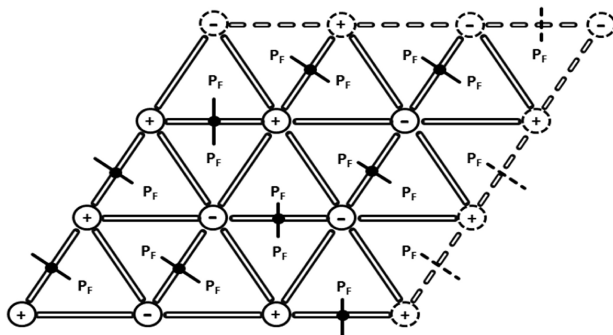


FIGURA 1. Red triangular de tamaño 3×3 con condiciones periódicas de borde según se señala en el texto. Los enlaces frustrados se denotan mediante un círculo negro sobre ellos.

ocurre para otras geometrías como por ejemplo, la cuadrada), el cual se marca mediante un enlace frustrado representado por un círculo negro.

Una vez que la combinatoria de este parámetro satura, se obtiene la red diluida por frustración, es decir, aquellos enlaces que nunca fueron frustrados y que se pueden medir a través del parámetro h_g [23], donde el subíndice g se refiere al nivel fundamental del sistema. En el caso de la red triangular antiferromagnética este parámetro es nulo, es decir, todos los enlaces fueron frustrados en esta fase y en el nivel fundamental.

La energía del nivel fundamental se puede calcular de acuerdo con el siguiente procedimiento:

a) El número total de enlaces de la red B corresponde a la suma de enlaces frustrados B_F y no frustrados B_{NF} de la red, es decir:

$$B = B_F + B_{NF} \quad (1)$$

b) Desarrollando el Hamiltoniano de Ising para un tipo de interacción, en este caso antiferromagnética $+J$, la energía del nivel fundamental se obtiene como la suma de las interacciones entre los enlaces y considerando los momentos magnéticos *up* o *down*, de tal forma que:

$$E_g = +J \left(\sum \uparrow\uparrow + \sum \uparrow\downarrow \right) S^2 = (B_F - B_{NF})JS^2, \quad (2)$$

donde los momentos magnéticos paralelos son positivos, en tanto que los antiparalelos negativos (menor energía). Combinando ambas expresiones anteriores, la energía promedio por enlace del nivel fundamental puede escribirse en función de los enlaces y los enlaces frustrados como:

$$\epsilon_g = \frac{E_g}{B} = \frac{(-B + 2B_F)JS^2}{B} = \left(-1 + \frac{2B_F}{B} \right) JS^2 \quad (3)$$

Alternativamente, la expresión anterior, se puede expresar como función de las plaquetas frustradas y el segmento promedio de frustración, donde este último se define como:

$$s_F = \frac{B_F}{\frac{P_F}{2}}. \quad (4)$$

De esta forma:

$$\epsilon_g = \frac{E_g}{B} = -1 + \frac{s_F P_F}{B}, \quad (5)$$

donde $J = S = 1$. Para finalizar la discusión de la red triangular antiferromagnética, el segmento promedio de frustración es $s_F = 1.0$ y la energía promedio por enlace del nivel fundamental es $-1 + (2/3) = -(1/3)$. El parámetro $h_g = 0.0$, dado que todos los enlaces se frustraron cuando se recorre el nivel fundamental en todos sus estados de mínima energía.

En este trabajo, se propone aplicar los conceptos elaborados por Toulouse a la topología de redes bajo un modelo de Ising y calcular los parámetros definidos anteriormente en redes Arquimedianas en la fase antiferromagnética. Se ha escogido para este estudio las redes que contienen plaquetas

triangulares (3^6) , $(3^3, 4^2)$, $(3^2, 4, 3, 4)$, $(3^4, 6)$, $(3, 6, 3, 6)$, $(3, 4, 6, 4)$ y $(3, 12^2)$, expresadas en la notación de Grünbaum y Shephard [24]. Esta notación consiste básicamente en elegir un sitio arbitrario de la red Arquimediana y buscar la celda que contenga el menor número de lados. Se recorren las celdas desde aquellas de menor número de lados hacia las de mayor número de lados. Si la celda elegida está conectada con celdas de igual número de lados, se comienza el conteo secuencial en torno al punto escogido, a partir de aquella que comparte un lado con una celda de mayor número de lados. En la notación de Grünbaum y Shephard, los números representan el número de lados de la celda. Así por ejemplo, en el caso de la primera red ilustrada en la parte superior izquierda de la Fig. 2, la secuencia del número de lados corresponde a 3,3,3,4,4, que se suele denotar como $(3^3, 4^2)$, donde los exponentes representan las repeticiones de un número de lados en la secuencia.

Los resultados de los parámetros topológicos definidos que se calculan más adelante, se comparan con la red triangular (3^6) descrita anteriormente. Se incluye además el estudio del parámetro de enlaces que nunca se frustraron en esta fase, definido por h_g . En el Anexo 2, se calculan los mismos parámetros en la fase antiferromagnética para una red no Arquimediana que representa un cuasi cristal de acuerdo a la Ref. 25.

2. Análisis topológico y frustración

La Fig. 2 corresponde a un conjunto de 6 redes Arquimedianas que contienen plaquetas triangulares (P_t) en su construcción. En la primera fila se disponen aquellas cuyo número de coordinación c es 5, en cambio, en la segunda fila aquellas con número de coordinación 4 y 3.

Se indica en cada red, un conjunto de plaquetas mixtas (P_{cel}), denominado *celda* y un conjunto de puntos (N_{sit}) y enlaces (B_{sit}) denominado *sitio*. En forma independiente en cada caso, la repetición periódica en el plano genera una red de N espines y $(1/2)cN$ enlaces, con lo cual se define un arreglo de tamaño finito y condiciones periódicas de borde. Una celda está representada por colores grises y un sitio por puntos llenos (espín) y líneas gruesas (enlaces). Así por

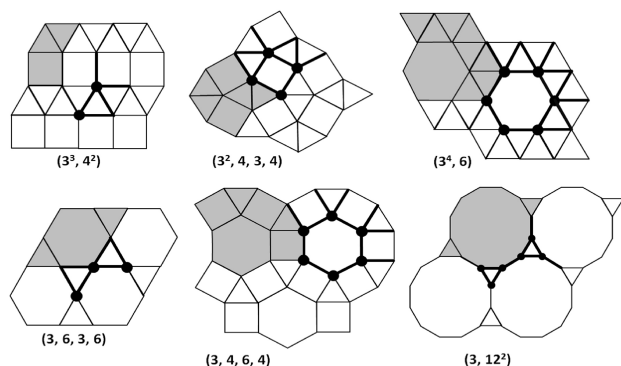


FIGURA 2. Redes Arquimedianas mixtas que contienen plaquetas triangulares representadas mediante celdas y sitios.

TABLA I. Resumen comparativo para cada red de los parámetros relacionados con la frustración en cada red Arquimediana en estudio.

red	c	P_{cel}	P_t	B_{sit}	N_{sit}
(3^6)	6	2	2	3	1
$(3^3, 4^2)$	5	3	2	5	2
$(3^2, 4, 3, 4)$	5	6	4	10	4
$(3^4, 6)$	5	9	8	15	6
$(3, 6, 3, 6)$	4	3	2	6	3
$(3, 4, 6, 4)$	4	6	2	12	6
$(3, 12^2)$	3	3	2	9	6

ejemplo, un arreglo $L \times M$ constituye una colección de L sitios en una dirección por M en otra y por lo tanto contiene $N = LMN_{sit}$ espines y $B = LMB_{sit}$ enlaces. La Tabla I muestra estas *características locales* de las redes en estudio, cumpliéndose que $B_{sit} = (1/2)cN_{sit}$.

En la fase antiferromagnética, las plaquetas triangulares están frustradas, en cambio, aquellas plaquetas con un número par de enlaces no están frustradas para las seis redes consideradas en la Fig. 2. Los segmentos de frustración unen plaquetas frustradas con longitud mínima para asegurar el valor de los parámetros en estudio asociados al nivel fundamental, de esta forma, la posición relativa en la red de tales plaquetas adquiere relevancia. Cuando las plaquetas triangulares actúan a primeros vecinos el segmento de frustración es unitario, dado que frustra un enlace. Cuando las plaquetas triangulares actúan a segundos vecinos, el segmento de frustración frustra dos enlaces. Esta metodología se aplica a cada una de las redes definidas en la Fig. 2 y considerando un arreglo $N = L \times M$. La Tabla II muestra los resultados en función de N para la totalidad de enlaces $B(N)$, plaquetas $P(N)$, longitud de frustración $B_F(N)$, plaquetas frustradas $P_F(N)$, segmento promedio de frustración s_F definido en la Ec. 4 y la energía normalizada al tamaño de la red ϵ_g , definida por la Ec. 5.

Es interesante observar que la energía del nivel fundamental en esta fase, depende de las plaquetas triangulares P_t , de su vecindad entre ellas, como también del número de enlaces del sitio. Se establece a través de la tabla 1 que para redes donde la plaquetas triangulares actúan como vecinas ($s_F = 1.0$) o segundas vecinas ($s_F = 2.0$), la energía del nivel fundamental se puede calcular como:

$$\epsilon_g = -1 + \frac{s_F P_t}{B_{sit}}, \quad (6)$$

siendo coincidente con los valores de la última columna de la Tabla II. La ecuación anterior está ligada a la celda de la red representativa (frustración localizada) y aunque es semejante a la Ec. 5, ésta última corresponde a la red como un todo, usualmente representada por un arreglo de tamaño finito N .

Como se ha mencionado anteriormente, el parámetro h_g da cuenta de la fracción de los enlaces que nunca fueron

TABLA II. Resumen comparativo de los valores asociados al segmento de frustración y la energía por enlace en el nivel fundamental para cada una de las siete redes Arquimedianas.

red	$B(N)$	$P(N)$	$B_F(N)$	$P_F(N)$	s_F	ϵ_g
(3^6)	$3N$	$2N$	N	$2N$	1.0	$-1/3$
$(3^3, 4^2)$	$5N/2$	$3N/2$	$N/2$	N	1.0	$-3/5$
$(3^2, 4, 3, 4)$	$5N/2$	$3N/2$	$N/2$	N	1.0	$-3/5$
$(3^4, 6)$	$5N/2$	$3N/2$	$2N/3$	$4N/3$	1.0	$-7/15$
$(3, 6, 3, 6)$	$2N$	N	$2N/3$	$2N/3$	2.0	$-1/3$
$(3, 4, 6, 4)$	$2N$	N	$N/3$	$N/3$	2.0	$-2/3$
$(3, 12^2)$	$3N/2$	$N/2$	$N/3$	$N/3$	2.0	$-5/9$

frustrados Sa al recorrer todos los estados del nivel fundamental. El parámetro h_g da cuenta de la red diluida por frustración y alternativamente mide el nivel de frustración de la red. Se define como:

$$h_g = \frac{Sa}{B} \quad (7)$$

Este parámetro hace la diferencia entre las redes $(3^3, 4^2)$ y $(3^2, 4, 3, 4)$, ilustrando nuevamente lo importante de la posición relativa de las plaquetas triangulares en la construcción de la red. Para calcular h_g , se considera un arreglo $L \times M$ de ambas redes. El número total de espines de la red es $N = N_{\text{sit}}LM$ y el número de enlaces es $B = (1/2)cN = B_{\text{sit}}LM = (5/2)N$. Se observa en la Fig. 2, que en ambos casos las plaquetas triangulares actúan como vecinas y los enlaces no frustrados para $(3^3, 4^2)$ son $Sa = 3LM$ (horizontales y verticales). En cambio, para la red $(3^2, 4, 3, 4)$ son $Sa = 8LM$. Estos resultados para Sa pueden expresarse en términos de N , de forma que se obtiene $3N/2$ ($2N$) para la primera (segunda) red respectivamente. De esta forma, ocupando la definición dada por la Ec. 7, el parámetro h_g es $3/5$ ($4/5$) para la red $(3^3, 4^2)$ ($3^2, 4, 3, 4$) respectivamente.

La Tabla III muestra el comportamiento de la fracción de enlaces nunca frustrados en el nivel fundamental para redes Arquimedianas antiferromagnéticas. Aquí se observa, que la red triangular (6^3) y $c = 6$, en conjunto con la red de Kagomé $(3, 4, 6, 4)$ y $c = 4$ son redes altamente frustradas en la fase antiferromagnética y la red $(3^2, 4, 3, 4)$ con $c = 5$ es la menos frustrada en esta fase.

TABLA III. Resumen comparativo de los valores asociados a la fracción de enlaces nunca frustrados, h_g , para cada una de las siete redes Arquimedianas.

red	$B(N)$	$Sa(N)$	h_g
(3^6)	$3N$	0	0.0
$(3^3, 4^2)$	$5N/2$	$3N/2$	$3/5$
$(3^2, 4, 3, 4)$	$5N/2$	$2N$	$4/5$
$(3^4, 6)$	$5N/2$	N	$2/5$
$(3, 6, 3, 6)$	$2N$	0	0.0
$(3, 4, 6, 4)$	$2N$	N	$1/2$
$(3, 12^2)$	$3N/2$	$N/2$	$1/3$

3. Conclusiones

La frustración magnética proporcionada por espines de Ising en redes Arquimedianas en la fase antiferromagnética, puede ser estudiada mediante una técnica topológica. Las plaquetas triangulares P_t juegan un rol importante en esta fase. Por un lado, todas ellas admiten frustración espontánea y por otro, el nivel de vecindad entre ellas, siendo el segmento de frustración el que mide esta distancia. La energía del nivel fundamental, está directamente relacionado con la longitud de frustración, es decir, la suma de todos los enlaces que contienen los distintos segmentos de frustración que unen las plaquetas frustradas. Tanto la energía del nivel fundamental ϵ_g , como el parámetro relacionado con la red diluida h_g , pueden medirse a nivel local (sitio) o bien desarrollando un arreglo de $L \times M$ espines de la red. Esta metodología, puede aplicarse a la fase antiferromagnética en redes bi y tridimensionales, en especial, en el caso de los poliedros regulares e irregulares.

Anexo 1. Plaquetas frustradas para una celda pentagonal y dodecagonal

La Fig. 3 ilustra tres celdas pentagonales frustradas, el número de enlaces antiferromagnéticos es impar en cada una de ellas y en la figura se esquematiza con doble línea. Por su parte, la línea simple representa un enlace ferromagnético, siendo x su concentración.

Sumando todas las contribuciones de las celdas frustradas, se obtiene la función.

$$P_F(x) = (1-x)(1-4x+16x^2-24x^3+16x^4), \quad (8)$$

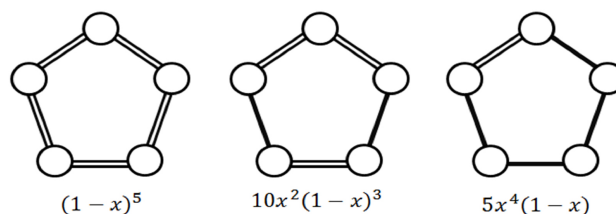


FIGURA 3. Frustración de una plaqueta pentagonal.

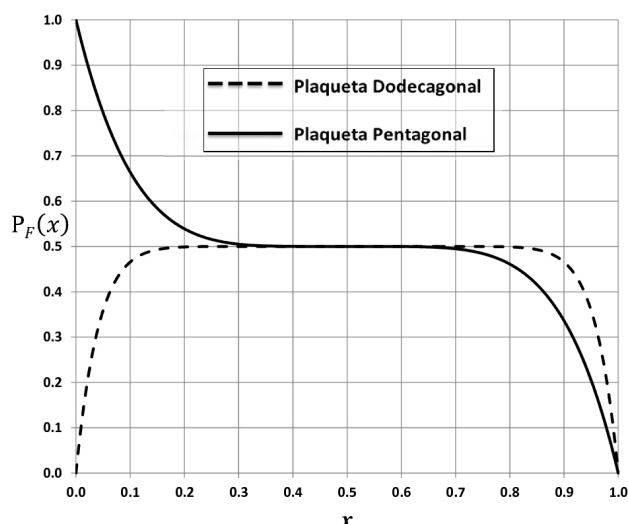


FIGURA 4. Función de plaquetas frustradas para una plaqueta pentagonal y una dodecagonal.

Usando el mismo procedimiento, se obtiene la función de plaquetas frustradas para la plaqueta dodecagonal, donde en este caso hay 6 combinaciones diferentes de enlaces antiferromagnéticos que han de ser considerados y cuyo resultado es:

$$P_F(x) = 4x(1-x)(2x^2 - 2x + 1) \times (4x^2 - 6x + 3)(4x^2 - 2x + 1) \times (16x^4 - 32x^3 + 20x^2 - 4x + 1), \quad (9)$$

La Fig. 4 que se muestra a continuación da cuenta de la función normalizada de plaquetas frustradas en términos de la concentración de enlaces ferromagnéticos x . Para el caso de la plaqueta pentagonal, el comportamiento de la función normalizada de plaquetas frustradas es similar a una plaqueta triangular puesto que contiene un número impar de enlaces. De estas forma, si se tiene un arreglo que contenga plaquetas pentagonales, por ejemplo un dodecaedro, el método indicado en este trabajo es plenamente aplicable para la fase antiferromagnética.

Para el caso de la plaqueta dodecagonal, el comportamiento de la función normalizada de plaquetas frustradas es similar al de una plaqueta cuadrada y una hexagonal, pues contiene un número par de enlaces. En la gráfica ilustrada, se observan la simetría (asimetría) respecto de x de la plaqueta dodecagonal (pentagonal). Note que el comportamiento de la función normalizada de plaquetas frustradas presenta una meseta en la fase vidrio de espín.

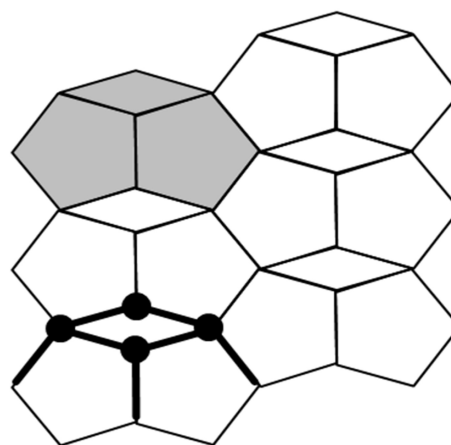


FIGURA 5. Representación de celda y de sitio en la red de Dürer.

Anexo 2. Frustración para una red no Arquimediana en la fase antiferromagnética

La Fig. 5 muestra una red conformada por pentágonos y rombos que representa un *cuasi* cristal. La red es no Arquimediana puesto que no tiene un número de coordinación constante, se le denomina red de Dürer. Se ilustra la celda conformada por dos pentágonos y un rombo cuya repetición en el plano la construye. Además se indican los 4 espinos y 6 enlaces que conforma un sitio.

De acuerdo con los resultados mostrados anteriormente para redes Arquimedianas, para esta red se tiene que $P_{\text{cel}} = 3$, $P_p = 2$ (plaqueta pentagonal), $B_{\text{sit}} = 7$ y $N_{\text{sit}} = 4$. Por otro lado, $B(N) = 7N/4$, $P(N) = 3N/4$, $B_F(N) = N/4$ y $s_F = 1.0$. La energía del nivel fundamental, se obtiene de acuerdo a la Ec. 5 cuyo resultado es $-5/7$ o en forma alternativa por la Ec. 6 al reemplazar P_t por P_p . La fracción de enlaces no frustrados se obtiene por medio de la Ec. 7, cuyo valor es $h_g = 4/7$, es decir más de la mitad de la red permanece con sus enlaces sin frustrar al recorrer todos los estados del nivel fundamental.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Universidad de la Frontera a través del proyecto DIDUFRO DI 13-0102 por el apoyo parcial en el desarrollo de este trabajo.

1. K. Binder and A. P. Young, *Rev. Mod. Phys.* **58** (1986) 801.
2. M. Mezard, G. Parisi and M. A. Virasoro, *Spin glass theory and beyond* (Lecture Notes in Physics (9) , World Scientific Publishing, 1987)

3. H. Rieger, *Ground state properties of frustrated systems* (Lecture Notes in Physics (501), Springer, Heidelberg, 1998).
4. E. E. Vogel, J. Cartes, S. Contreras, W. Lebrecht and J. Villegas, *Phys. Rev. B* **49** (1994) 6018.

5. N. Kawashima and H. Rieger, *Europhys. Lett.* **39** (1997) 85.
6. J. W. Landry and S. N. Coppersmith, *Phys. Rev. B* **65** (2002) 134404-1.
7. S. Kobe, *Brazilian Journal of Physics* **30** (2000) 649.
8. A. K. Hartmann and H. Rieger, *Optimization Algorithms in Physics* (Wiley-VCH, Berlin, 2001)
9. A. K. Hartmann and H. Rieger, *New Optimization Algorithms in Physics* (Wiley-VCH, Berlin, 2004)
10. S. T. Bramwell and M. J. Harris, *J. Phys.: Condens. Matter* **10** (1998) L125.
11. G. Toulouse, *Commun. Phys.* **2** (1977) 115.
12. G. H. Wannier, *Phys. Rev.* **79** (1950) 357.
13. J. Poulter and J. A. Blackman, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001) 7527.
14. S. F. Edwards, P. W. Anderson, *J. Phys. F: Metal Phys.* **5** (1975) 965.
15. D. Sherrington, S. Kirkpatrick, *Phys. Rev. Lett.* **26** (1975) 1792.
16. I. Ono, *J. Phys. Soc. Japan* **41** (1976) 345.
17. T. Klotz, S. Kobe, *J. Phys. A* **27** (1994) L 95.
18. E. E. Vogel, W. Lebrecht, *Z. Phys. B* **102** (1997) 145.
19. J. F. Valdés, W. Lebrecht and E. E. Vogel, *Physica A* **391** (2012) 2585.
20. W. Lebrecht, E. E. Vogel, J. F. Valdés, *Journal of Alloys and Compounds* **369** (2004).
21. W. Lebrecht y J. F. Valdés, *Rev. Mex. Fís.* **54** (2008) 349.
22. W. Lebrecht, J. F. Valdés and E. E. Vogel, *Physica A* **323** (2003) 466.
23. E. E. Vogel, S. Contreras, M. A. Osorio, J. Cartes, F. Nieto, A. J. Ramirez-Pastor, *Phys. Rev. B* **58** (1998) 8475.
24. B. Grünbaum, G.C Shephard, *Tilings and Patterns*, (W.H Freeman and company, New York, 1987).
25. Donald L. D. Caspar and Eric Fontano, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **93** (1996) 14271.