

# Regularización de códigos en simetría esférica y axial en relatividad numérica

M. Ruiz, M. Alcubierre y D. Núñez

*Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México,*

*Apartado Postal 70-543, México D.F. 04510, México,*

*e-mail: ruizm@nucleares.unam.mx, malcubi@nucleares.unam.mx,*

*nunez@nucleares.unam.mx*

Recibido el 1 de mayo de 2006; aceptado el 1 de noviembre de 2006

Elegir coordenadas adaptadas para evolucionar espacio-tiempos con alguna simetría, usualmente genera divergencias en las ecuaciones de evolución para las variables geométricas. Por esta razón, los códigos de evolución en relatividad numérica rápidamente se hacen inestables. Presentamos un algoritmo genérico para resolver el problema de la regularización que se puede utilizar directamente en las ecuaciones de evolución y que permite escoger de forma general las variables de norma. Este algoritmo es similar al introducido por Rinne y Stewart dentro del formalismo  $Z_4$ . Sin embargo, nuestro algoritmo es más general y se puede utilizar en una amplia variedad de sistemas de evolución.

**Descriptores:** Relatividad numérica; espacio-tiempo esféricamente simétrico; espacio-tiempo axialmente simétrico; condiciones de regularidad.

The use of coordinates adapted to evolving space times with some symmetry is often a source problems, the evolution equations for the geometric quantities have divergences. This problem propagates very fast and makes numerical codes crash. We present a generic algorithm for dealing with the regularization problem that can be used directly on the evolution equations, and which allows very general gauge choices. We explicitly show the regularity of the evolution equations, we describe the corresponding numerical code, and we present several examples clearly showing the regularity of our evolutions.

**Keywords:** Numerical relativity; spherically symmetric space-time; axi-symmetric space-time; regularity conditions.

PACS: 04.20.Ex; 04.25.Dm; 95.30.Sf

## 1. Introducción

La implementación de códigos en relatividad numérica que usen coordenadas adaptadas a la simetría de un espacio-tiempo regular dado, esta restringida por la pérdida de regularidad de las variables geométricas. El problema se presenta por la presencia de términos en las ecuaciones de evolución que van como  $1/r$  cerca del origen en el caso de simetría esférica, o  $1/\rho$  cerca al eje de simetría, en el caso axial. Sin embargo, la regularidad de los coeficientes métricos, que localmente deben ser planos, garantiza la cancelación exacta de estos términos asegurando soluciones bien comportadas. Esta cancelación exacta, sin embargo, correcta para soluciones analíticas, no se tiene para soluciones numéricas debido a los errores de truncamiento y redondeo. Los términos  $1/\xi$ , donde  $\xi$  representa la coordenada radial o axial según el caso, no se cancelan y la solución diverge en un tiempo finito.

Generalmente, para solucionar este problema, al menos para simetría esférica, se utiliza la norma *polar/radial* [1,2] donde se elige la coordenada radial  $r$  de tal manera que el área propia de las esferas de  $r$  constante sea siempre  $4\pi r^2$ , el vector de corrimiento es nulo y el lapso es obligado a satisfacer cierta ecuación diferencial en  $r$ . Muchas alternativas, por otra parte, han tratado de solucionar este mismo problema para el caso de simetría axial. La mayoría ha conducido a evoluciones inestables. Recientemente, Alcubierre y Gonzalez [3] presentaron un algoritmo genérico de regularización para diferentes formulaciones hiperbólicas en el caso esférico que se basa en la introducción de una variable auxiliar que absorbe los términos problemáticos. Sin embargo, no es cla-

ro como extender este método al caso de simetría axial sin afectar la hiperbolicidad del sistema. Por otro lado, Rinne y Stewart [4] desarrollaron otro método de regularización para el caso axial, de nuevo introduciendo una nueva variable dinámica dentro del contexto de la formulación  $Z_4$ . Presentamos un método de regularización en el que no es necesario introducir variables dinámicas adicionales, ni una descomposición especial de las ecuaciones de Einstein.

Este artículo esta organizado de la siguiente manera: en la Sec. 2 discutimos cuales son las condiciones necesarias para que los coeficientes métricos y de curvatura extrínseca sean regulares. Primero consideramos el caso esférico y mostramos cuales términos se deben regularizar. Después extendemos esta descripción al caso de espacio-tiempos con simetría axial. En la Sec. 3 discutimos la descomposición de las ecuaciones de Einstein que vamos a usar para las evoluciones, y adicionalmente presentamos algunos ejemplos numéricos de nuestro método de regularización. Finalmente, concluimos en la Sec. 4.

## 2. Condiciones de Regularidad

Para mostrar las condiciones necesarias que deben cumplir los coeficientes geométricos para ser regulares en cualquier punto del espacio tiempo, es útil emplear una descomposición específica de las ecuaciones de Einstein. Por simplicidad, y sin pérdida de generalidad, usaremos la formulación Arnowit-Deser- Misner (ADM) [5,6].

### 2.1. Caso Esférico

Comencemos escribiendo la forma general de la métrica espacial en simetría esférica como

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = A(t, r) dr^2 + r^2 B(t, r) d\Omega^2, \quad (1)$$

con  $d\Omega^2$  el elemento de ángulo sólido. Hemos ya factorizado la dependencia  $r^2$  de la parte angular de la métrica. Esto tiene la ventaja de hacer explícita la dependencia en  $r$  de las cantidades geométricas haciendo el procedimiento de regularización más sencillo.

Siguiendo a Alcubierre y Gonzalez [3], existen dos diferentes tipos de condiciones de regularidad que las variables  $\{\gamma_{ii}, D\gamma_{ii}, K_{ii}\}$ , donde  $D\gamma_{ii}$  es la derivada radial logarítmica, deben satisfacer en  $r = 0$ .

El primer conjunto de condiciones se impone al exigir que las diferentes variables estén bien definidas en el origen, implicando el siguiente comportamiento en el límite cuando  $r$  tiende a cero,

$$\begin{aligned} \gamma_{ii} &\sim \gamma_{ij}^0 + \mathcal{O}(r^2), \\ K_{ii} &\sim K_{ii}^0 + \mathcal{O}(r^2), \\ D\gamma_{ii} &\sim \mathcal{O}(r), \end{aligned} \quad (2)$$

con  $\{\gamma_{ij}^0, K_{ij}^0\}$  funciones que son constantes en  $r$ . Esta condición es simple de implementar numéricamente. Se puede discretizar el espacio a través de una red finita de puntos que no contenga al origen como uno de estos puntos. Usualmente se considera que el punto inicial de la red es  $r = \pm\Delta r/2$ . Con esta discretización, obtenemos datos sobre el punto inicial exigiendo que las funciones geométricas  $\{\gamma_{ii}, K_{ii}\}$  sean funciones pares y  $\{D_{ii}\}$  funciones impares con respecto a  $r = 0$ .

Para el segundo conjunto de condiciones, que tiene más complicaciones que el primero, escribamos las ecuaciones ADM para, por ejemplo, la componente angular de la curvatura extrínseca en el caso en que el vector de corrimiento es nulo,

$$\begin{aligned} \partial_t K_B = & -\frac{\alpha}{2A} \left[ B \partial_r D_B + B D_B (D_\alpha + D_B) \right. \\ & - \frac{B D_A D_B}{2} - \frac{B}{r} (D_A - 2D_\alpha - 4D_B) \\ & \left. - \frac{2(A-B)}{r^2 B} \right] + \frac{\alpha K_B K_A}{A}, \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $D_\alpha := \partial_r \ln \alpha$ . Y la restricción hamiltoniana,

$$\begin{aligned} \partial_r D_B = & \frac{1}{r^2 B} (A - B) + \frac{KB}{B} \left( 2K_A + \frac{AK_B}{B} \right) \\ & + \frac{1}{r} (D_A - 3D_B) + \frac{D_A D_B}{2} - \frac{3D_B^2}{4}. \end{aligned} \quad (4)$$

De acuerdo con (2),  $\{D_\alpha, D_A, D_B\}$  se aproximan al origen básicamente como  $r$ , por lo tanto, los términos del tipo  $D_{\{A,B\}}/r$  son regulares. Por otro lado, vemos que los

términos de la forma  $(A-B)/r^2$  van, en el límite cuando  $r$  va a cero, como  $(A^0 - B^0)/r^2$ , donde  $A^0$  y  $B^0$  son constantes. Claramente estos términos son divergentes. Analíticamente, sin embargo, se puede mostrar que esto no sucede. Existe otra condición que es consecuencia del hecho que el espacio debe permanecer localmente plano en  $r = 0$ . Esta condición implica que:

$$A - B \sim \mathcal{O}(r^2), \quad K_A - K_B \sim \mathcal{O}(r^2), \quad (5)$$

por lo cual,

$$A^0 = B^0, \quad K_A^0 = K_B^0. \quad (6)$$

Para implementar numéricamente la condición (5) y que el espacio sea localmente plano, exigimos que nuestros coeficientes métricos se puedan escribir como

$$\begin{aligned} A(t, r) &= H(t, r) + r^2 J(t, r), \\ B(t, r) &= H(t, r) - r^2 J(t, r), \\ K_A(t, r) &= K_H(t, r) + r^2 K_J(t, r), \\ K_B(t, r) &= K_H(t, r) - r^2 K_J(t, r), \end{aligned} \quad (7)$$

con  $H, J, K_H$  y  $K_J$  funciones métricas pares, con respecto a  $r = 0$  y positivas. Esta descomposición garantiza que las funciones geométricas sean regulares en todo punto del espacio. Así, en lugar de evolucionar los coeficientes métricos  $A, B, K_A$  y  $K_B$  evolucionamos  $H, J, K_H$  y  $K_J$  y reconstruimos la métrica (1) en cada paso de tiempo.

Antes de discutir el caso axial, es útil mencionar un detalle acerca de las ecuaciones de evolución para los nuevos coeficientes. Veamos, por ejemplo, la ecuación de evolución para  $K_J$ :

$$\begin{aligned} \partial_t K_J = & \frac{H^3 (\alpha D_H + 2H D_\alpha)}{4A^2 B^2 r^3} + \frac{3H^2 \alpha D_H^2}{8A^2 B^2 r^2} \\ & - \frac{H^3 (\alpha D_H^2 + 2H D_\alpha^2)}{4A^2 B^2 r^2} \\ & + \mathcal{F}(H, J, K_H, K_J), \end{aligned} \quad (8)$$

donde  $D_\alpha$  y  $D_H$  son derivadas radiales,  $D^2 \alpha$  y  $D^2 H$  son segundas derivadas radiales y  $\mathcal{F}(H, J, K_H, K_J)$  son los demás términos regulares de la ecuación (8). Por simple inspección vemos que, de acuerdo al comportamiento de las funciones geométricas (2), el primer término de (8) va como  $1/r^3$  cerca del origen, el segundo término va como  $1 + \mathcal{O}(r^2)$  y el tercer término va como  $1/r^2$ . Sin embargo, si combinamos los dos términos irregulares para formar una sola derivada,

$$\begin{aligned} \partial_t K_J = & -\frac{\alpha H^3}{4A^2 B^2 r} \partial_r \left( \frac{D_H}{r} \right) - \frac{H^4}{2A^2 B^2 r} \partial_r \left( \frac{D_\alpha}{r} \right) \\ & + \frac{3H^2 \alpha D_H^2}{8A^2 B^2 r^2} + \mathcal{F}(H, J, K_H, K_J) \end{aligned} \quad (9)$$

la ecuación resultante es regular en todo punto del espacio. Veamos por ejemplo el primer término. Numéricamente  $D_H$  va como  $r + \mathcal{O}(r^2)$  cerca al origen,  $D_H/r$  va como  $1 + \mathcal{O}(r^2)$  y finalmente, la derivada radial hace que este término se aproxime como  $\mathcal{O}(r)$ . Claramente este término es regular.

## 2.2. Caso Axial

Para el caso axial, de nuevo es importante especificar el comportamiento de los coeficientes métricos y las componentes de la curvatura extrínseca cuando se están acercando al eje, definido por  $\rho = 0$ . Está claro que todas las funciones geométricas tienen que ser uniformes con respecto al eje, puesto que la métrica debe ser localmente plana. Es decir, estas funciones deben comportarse como  $1 + h(z)\rho^2$  cerca del eje de simetría. Por otro lado, se puede mostrar que cualquier tensor simétrico  $M_{\alpha\beta}$  en coordenadas  $(t, \rho, z, \phi)$  tiene la forma [4]

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} g_{tt} & \rho g_{t\rho} & g_{tz} & \rho^2 g_{t\phi} \\ \rho g_{t\rho} & \tilde{g}_{\rho\rho} & g_{\rho z} & \rho^3 g_{\rho\phi} \\ g_{tz} & g_{\rho z} & g_{zz} & \rho^2 g_{z\phi} \\ \rho^2 g_{t\phi} & \rho^3 g_{\rho\phi} & \rho^2 g_{z\phi} & \tilde{g}_{\phi\phi} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

donde  $\tilde{g}_{\rho\rho} = g_{\rho\rho} + \rho^2 \hat{g}_{\rho\rho}$  y  $\tilde{g}_{\phi\phi} = g_{\phi\phi} - \rho^2 \hat{g}_{\phi\phi}$ . Es claro que  $g_{tt}, g_{t\rho}, \dots, g_{\phi\phi}$  son funciones de  $t, z$  y  $\rho$  y además son funciones pares.

Usando las anteriores condiciones, podemos escribir la forma general de la métrica espacial como

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = A d\rho^2 + B dz^2 + \rho^2 T d\phi^2 + 2\rho C d\rho dz + 2C_1 \rho^3 d\rho d\phi + 2\rho^2 C_2 dz d\phi, \quad (11)$$

donde, usando (10),  $A = H + \rho^2 J$  y  $T = H - \rho^2 J$ . La forma general de la curvatura extrínseca  $K_{ij}$ , en analogía con (11), es

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{K}A & \rho KC & \rho^3 KC_1 \\ \rho KC & KB & \rho^2 KC_2 \\ \rho^3 KC_1 & \rho^2 KC_2 & \rho^2 \tilde{K}T \end{bmatrix}, \quad (12)$$

donde  $KA = KH + \rho^2 KJ$  y  $KT = KH - \rho^2 KJ$ .

Esta forma de descomponer tanto la métrica como la curvatura extrínseca hace de nuevo que las ecuaciones de evolución ADM sean regulares. Algunas de estas ecuaciones, para el caso sin rotación, son:

$$\begin{aligned} \partial_t KB &= -\frac{B^2 H^3 \alpha DB}{2\rho T^2 (AB - \rho^2 C^2)^2} + F_B, \\ \partial_t KC &= -\frac{H^3 B}{4\rho T^2 (AB - \rho^2 C^2)^2} (H \alpha DB + 2B \alpha DH + 2B H D\alpha) + F_C, \\ \partial_t KJ &= -\frac{B H^4}{4\rho T^2 (AB - \rho^2 C^2)^2} \left[ \alpha \partial_\rho \left( \frac{DB}{\rho} \right) + 2B \partial_\rho \left( \frac{D\alpha}{\rho} \right) + \frac{2B DH D\alpha}{\rho H} \right] + F_J, \end{aligned} \quad (13)$$

donde  $F_{KB, KC, KJ}$  son términos regulares. Bajo simple inspección, después de juntar términos aparentemente irregulares en una sola derivada, como en el caso de (8), vemos que todas las ecuaciones son regulares.

## 3. Ecuaciones de Evolución y Ejemplos Numéricos

Este método de regularización es general y se puede aplicar a una amplia variedad de sistemas de evolución. Para mostrar esta generalidad describiremos a continuación un sistema de ecuaciones hiperbólico, es decir, que matemáticamente esta bien puesto [10], y uno no hiperbólico que se usarán en las evoluciones numéricas.

El primer sistema de ecuaciones, no hiperbólico, es ADM en vacío,

$$\frac{d\gamma_{ij}}{dt} = -2\alpha K_{ij}, \quad (14)$$

$$\frac{dK_{ij}}{dt} = -\alpha_{|i|j} + \alpha ({}^3R_{ij} - 2K_{il}K^l_j + K K_{ij}), \quad (15)$$

donde  $d/dt = \partial/\partial t - \mathcal{L}_\beta$  representa la derivada temporal total,  $M_{ij} = S_{ij} + \gamma_{ij}(\rho - S)/2$  es la proyección del tensor momento-energía,  $\rho = n_\alpha n_\beta T^{\alpha\beta}$ ,  $S_{ij} = \gamma_{i\alpha}\gamma_{j\beta} T^{\alpha\beta}$ ,  $S = S^i_i$ , y  $K$  es la traza de la curvatura extrínseca. Como ecuación de evolución del lapso tomamos la conocida familia de ecuaciones Bonna-Maso,

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha = -\alpha^2 f(\alpha) K + \mathcal{L}_\beta \alpha. \quad (16)$$

Usamos las ecuaciones ADM junto con la anterior ecuación para el primer ejemplo numérico de regularización. En la Fig. 1 se muestra la evolución del espacio-tiempo de Minkowski con un lapso perturbado con una gaussiana, es decir, evolucionamos un espacio plano en el que el avance temporal de la superficie no es uniforme, esta modulado por una función gaussiana.

Para tener un sistema de ecuaciones hiperbólico, siguiendo a G. Nagy *et al.* [9] y a Alcubierre *et al.* [7], introducimos la cantidad geométrica

$$\Delta^i_{lm} \equiv \Gamma^i_{lm} - \Gamma^i_{lm}|_{\text{flat}} \quad (17)$$

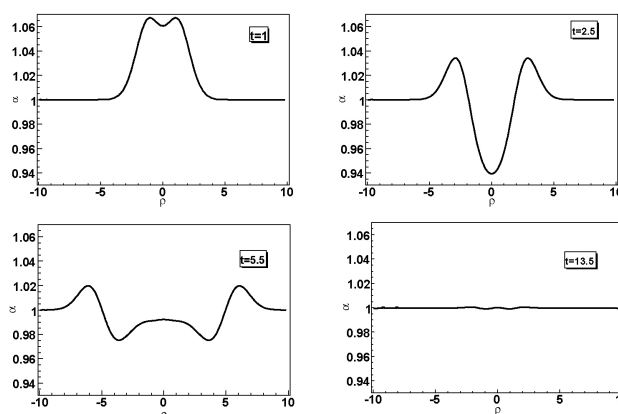


FIGURA 1. Espacio-tiempo axialmente simétrico regularizado: Evolución del lapso.

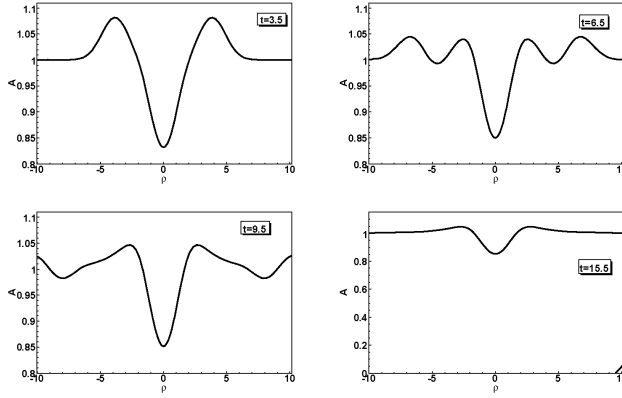


FIGURA 2. Espacio-tiempo Axial regularizado: Evolución del coeficiente  $g_{\rho\rho}$  en Minkowski con una perturbación gaussiana inicial en el lapso.

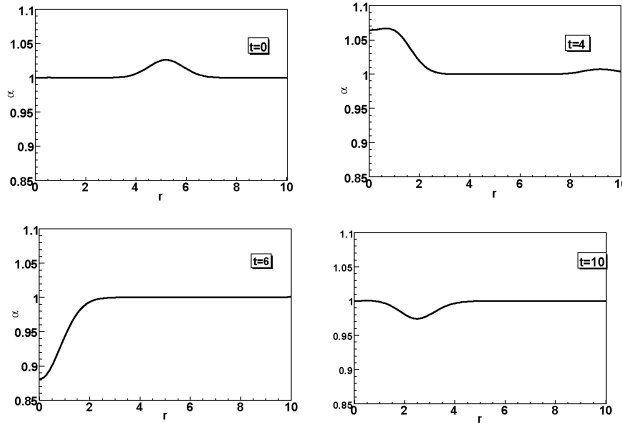


FIGURA 3. Espacio-tiempo esféricamente simétrico regularizado: Evolución del coeficiente  $g_{rr}$  en Minkowski con una perturbación gaussiana inicial en el lapso.

como una variable independiente. Usando las Ecs. (14), (15) obtenemos la siguiente ecuación de evolución para el vector  $\Delta^i$ :

$$\Delta^i_{,t} = \mathcal{L}_\beta \Delta^i + \gamma^{lm} \beta^i_{,lm} - [\alpha (2 K^{im} - \gamma^{im} \text{tr} K)]_{|m} + 2 \alpha K^{lm} \Delta^i_{lm} + \gamma^{lm} \mathcal{L}_\beta \Gamma^i_{lm}|_{\text{flat}}. \quad (18)$$

Se puede mostrar que el conjunto de ecuaciones ADM (14), (15) junto con (16) y (18), modificando esta última ecuación con la constricción de momentos, es fuertemente hiperbólico [8]. En las Figs. 2 y 3 se muestra la evolución de algunos coeficientes geométricos para este conjunto de ecuaciones hiperbólico.

#### 4. Discusión

La implementación de códigos en relatividad numérica que usen coordenadas adaptadas a la simetría de un espacio-tiempo regular dado, esta restringida por la pérdida de regularidad de las variables geométricas. Hemos mostrado que el problema se puede reducir a la existencia de dos conjuntos de condiciones de regularidad tanto en el origen, en el caso esférico, como en el eje, definido como  $\rho = 0$ , para el caso axial. En primer lugar, las condiciones de regularidad que garantizan que las variables estén bien definidas en el origen/eje. Estas condiciones se pueden interpretar como una serie de condiciones de simetría en el origen/eje para las diversas variables, y se pueden hacer cumplir fácilmente en simulaciones numéricas. Sin embargo, también existen las condiciones de regularidad relacionadas con la condición que el espacio-tiempo debe ser localmente plano. Hemos presentado un algoritmo genérico de regularización que se basa en la descomposición de las funciones geométricas. Esta descomposición nos ayuda a imponer los dos conjuntos de condiciones en el límite que  $r$  tiende a cero, para el caso esférico, o  $\rho$  tendiendo a cero, para el caso axial, sin introducir variables dinámicas adicionales. Hemos mostrado la eficiencia de nuestro algoritmo para dos formulaciones de las ecuaciones de evolución.

#### Agradecimientos

Este trabajo fue financiado en parte por CONACyT con proyecto SEP-2004-C01-47209, por DGAPA-UNAM con proyecto IN112401 y IN122002, y por DGEP-UNAM con un proyecto complementario.

1. J. Bardeen y T. Piran, *Phys. Rep.* **196** (1983) 205.
2. M.W. Choptuik, *Phys. Rev. D* **44** (1991) 3124.
3. M. Alcubierre y J. Gonzalez, *Comp. Phys. Commun.* **167** (2005) 76.
4. O. Rinne y J.M. Steward, *Class. Quantum Grav* **22** (2005) 1143.
5. R. Arnowitt, S. Deser y C.W. Misner, en *Gravitation: An Introduction to Current Research*, editado por L. Witten (John Wiley, New York, 1962) p. 227.
6. J. York, en *Sources of Gravitational Radiation*, editado por L. Smarr (Cam. Univ. Press, Cambridge, England, 1979).
7. M. Alcubierre *et al.*, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 7124018.
8. C. Bona, J. Massó, E. Seidel y J. Stela, *PHYS. REV. LETT.* **75** (1995) 600.
9. G. Nagy, O. Ortiz y O. Reula, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 044012.
10. A. Gustafsson, H. Kreiss y J. Olinger, en *Time Dependent Problems and Difference Methods*, editado por D. Levy (John Wiley, New York, 1995).