

La radiación del fondo cósmico

M.J. Reyes-Ibarra y L.A. Ureña-López
Instituto de Física de la Universidad de Guanajuato,
León, Guanajuato, 37150 México,
e-mail: mreyes@fisica.ugto.mx, lurena@fisica.ugto.mx

Recibido el 1 de mayo de 2006; aceptado el 1 de noviembre de 2006

Las observaciones de las anisotropías de la Radiación de Fondo Cósmico se han convertido en una herramienta fundamental en cosmología. Aquí presentamos brevemente el formalismo necesario para entender la evolución de las anisotropías, y cómo su espectro de potencias nos permite conocer la evolución y composición del universo.

Descriptores: Cosmología; radiación del fondo cósmico; perturbaciones cosmológicas.

Observations on the anisotropies of the Cosmic Microwave Background have become a fundamental tool in Cosmology. We present a brief description of the mathematical formulae that is necessary to understand the evolution of the anisotropies, and how their power spectrum gives us information about the evolution and composition of the universe.

Keywords: Cosmology; cosmic microwave background; cosmological perturbations.

PACS: 98.80.-k; 98.80.Jk; 98.80.Es

1. Introducción

Uno de los pilares teóricos fundamentales de la Cosmología es el llamado *Principio Cosmológico* (PC), el cual establece que el universo es *homogéneo e isotrópico* a grandes escalas [1-4]. Aún cuando el PC es una hipótesis de trabajo muy sencillo que nos permite entender la expansión del universo, éste último contiene estructuras bien formadas, como galaxias, cúmulos de galaxias, etc., que rompen la isotropía requerida por el PC en las escalas correspondientes.

El Modelo Estándar Cosmológico (MEC) [5-7] está basado en el PC, y también en la Teoría de la Relatividad General (RG) de Einstein, que es aún nuestra teoría fundamental de la gravitación. El MEC establece que la materia en el universo era dominada inicialmente por partículas relativistas que formaban un plasma muy denso y caliente. Una vez que el universo se enfrió, las interacciones entre los fotones y otras partículas dejaron de ocurrir, y a partir de ese momento (que se conoce como la época de recombinación, aprox. 300 mil años después del Big Bang) los fotones comenzaron a moverse libremente.

Son éstos fotones los que forman lo que conocemos como la Radiación del Fondo Cósmico (RFC). La RFC fue detectada por primera vez en el año de 1965 por Arno Penzias y Robert Wilsonⁱ. El satélite COBE, ya en la década de los años 1990, se utilizó para determinar que el espectro de la RFC correspondía al de un cuerpo negro con una temperatura actual de aprox. $T_0 = 2.75 \pm 0.015$ K [8].

El mismo satélite COBE permitió también detectar pequeñas *anisotropías* δT en la RFC, las cuales son del orden de $\delta T/T_0 \simeq 10^{-5}$. Una consecuencia de esto es que el universo tenía en sus inicios un alto grado de isotropía, lo cual apoya nuestra hipótesis del PC[1,3]. Posteriormente, más mediciones de las anisotropías de la RFC fueron llevadas a cabo [8], siendo las más recientes y precisas las del satélite WMAP[9].

Las anisotropías de la RFC se han convertido en una herramienta fundamental para la cosmología moderna. La razón estriba en que los fotones de la RFC, al propagarse libremente en el espaciotiempo del universo, contienen información importante del mismo desde la época de recombinación hasta nuestros días; una historia de casi 14 mil millones de años.

Algunas características del universo que se pueden inferir de las anisotropías son su geometría espacial, su contenido material, su velocidad de expansión, etc. Otra forma de decirlo, más precisa, es que se pueden obtener los valores de los llamados *parámetros cosmológicos*. Algunos de éstos parámetros se listan a continuación

- Constante de Hubble, H_0 ;
- Temperatura de la RCF, T_{0RFC} ;
- Parámetro de densidad de materia, Ω_{0m} ;
- Parámetro de densidad de bariones, Ω_{0b} ;
- Parámetro de densidad de materia oscura, Ω_{0DM} ;
- Parámetro de densidad de constante cosmológica (energía oscura), $\Omega_{0\Lambda}$;
- Parámetro de densidad de curvatura, Ω_{0k} .

Una lista exhaustiva de los parámetros cosmológicos puede consultarse en [8,10], aunque hay autores que sugieren que el número de parámetros relevantes es realmente pequeño [11].

En este artículo nuestra intención es presentar el formalismo matemático utilizado para el estudio de las anisotropías de la RFC, para mostrar también la manera en que cierta información está contenida en ellas.

Un breve resumen del artículo se da a continuación. En la Sec. 2 se presentan las ecuaciones fundamentales que

nos permiten seguir la evolución de las anisotropías de la RFC, que son la ecuación de Boltzmann y la ecuación de las geodésicas nulas en un espaciotiempo homogéneo e isotrópico linealmente *perturbado*. En la Sec. 3, se muestra cómo a su vez las perturbaciones del espaciotiempo evolucionan según las ecuaciones de la RG. Por último, en la Sec. 3 se discute brevemente cómo se obtiene el espectro de potencias de las anisotropías. También presentaremos diversos ejemplos numéricos de la solución de las ecuaciones de evolución que se obtienen con los paquetes públicos CMBFAST [12] y CMBEASY [13].

2. La Ecuación de Boltzmann

La principal cantidad para describir las anisotropías de la RFC es la *función de distribución* $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ de los fotones. La anisotropía en la temperatura del gas de fotones se define como (para esta sección ver las Refs. 7 y 14; y las referencias que allí se mencionan)

$$4\Theta(t, \mathbf{x}) \equiv \left[\int f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) d^3p \right] - 1 = 4 \frac{\delta T}{T}, \quad (1)$$

donde la integración se hace en el espacio de momentos \mathbf{p} . De esta manera, es solamente necesario conocer la evolución de la función de distribución, la cual está dada por la conocida ecuación de Boltzmann

$$\frac{df}{dt} = C[f]. \quad (2)$$

La parte derecha de la ecuación, $C[f]$, contiene todos los términos posibles de colisión y la parte izquierda los términos sin colisión.

En esta sección estamos interesados principalmente en la descripción de la propagación libre de fotones (*i.e.* a tiempos posteriores a la época de recombinación), por lo que nos limitaremos al caso en que $C[f] = 0$. Esto es formalmente equivalente a decir que el número de fotones en un elemento del espacio fase no cambia con el tiempo.

La función de distribución de los fotones f , depende de la 4-posición x^μ y el 4-momento $p^{\mu ii}$, de modo que la parte izquierda de la Ec. (2) se puede expresar de la forma

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p^\mu} \frac{dp^\mu}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial |\mathbf{p}|} \frac{d|\mathbf{p}|}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i} \frac{d\hat{p}^i}{dt}, \end{aligned} \quad (3)$$

donde $\mathbf{p}^2 = p^i p_i$, y \hat{p}^i es el vector unitario de dirección de los fotones.

La solución de la ecuación anterior no es trivial debido a que los fotones viajan a través de una métrica perturbada. La métrica homogénea e isotrópica perturbada que tomaremos tiene la forma

$$\begin{aligned} g_{00}(t, \mathbf{x}) &= -(1 + 2\Psi), \\ g_{0i}(t, \mathbf{x}) &= 0, \\ g_{ij}(t, \mathbf{x}) &= a^2(t) \delta_{ij} [(1 + 2\Phi)], \end{aligned} \quad (4)$$

que corresponde a la llamada *norma Newtoniana* para perturbaciones escalares lineales [15].

De esta manera el espaciotiempo perturbado queda caracterizado por el factor de escala $a(t)$, y las funciones escalares $\Psi(x^\mu)$ y $\Phi(x^\mu)$. La función Ψ corresponde al potencial Newtoniano, y la función Φ es la perturbación de la curvatura espacial. Ambas funciones son llamadas *potenciales gravitacionales*.

La ecuación de geodésicas nulas, que determina la evolución del 4-momento de los fotones, es

$$\frac{dp^\mu}{dt} = g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} \right) \frac{p^\alpha p^\beta}{p^0}. \quad (5)$$

El hecho de que los fotones son partículas sin masa implica que $p^2 \equiv p^\mu p_\mu = 0$, y entonces

$$-(1 + 2\Psi)(p^0)^2 + |\mathbf{p}|^2 = 0$$

(ver la métrica (4)). La componente temporal del 4-momento viene dada en primera aproximación como

$$p^0 = \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{1 + 2\Psi}} \simeq |\mathbf{p}|(1 - \Psi). \quad (6)$$

Esta ecuación es la generalización de la expresión relativista $E = |\mathbf{p}|$ para una métrica de FRW perturbada. De igual manera es posible ver que el vector dirección viene dado por

$$\hat{p}^i \simeq a(t) \frac{p^i}{|\mathbf{p}|} (1 + \Phi). \quad (7)$$

Por otro lado, de la ecuación (5) obtenemos las siguientes dos ecuaciones,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{dp^0}{dt} &= - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} (1 - \Psi) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + 2 \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right), \quad (8) \\ \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{d|\mathbf{p}|}{dt} &= \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{dp^0}{dt} (1 + \Psi) + \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} \\ &= - \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

La Ec. (9) describe el cambio en el momento de los fotones cuando se mueven a través de un universo perturbado. El primer término se refiere a la pérdida de momento debido a la expansión de Hubble. Para entender los otros dos términos es necesario recordar que una región muy densa tiene $\Phi > 0$ y $\Psi < 0$. Por lo tanto, el segundo término dice que un fotón en un pozo gravitacional profundo ($\partial \Phi / \partial t > 0$) pierde energía. Esto se debe a que los fotones no pueden salir tan fácilmente del pozo de potencial haciendo que la magnitud del corrimiento al rojo aumente. El tercer término dice que un fotón viajando en un pozo de potencial ($\hat{p}^i \partial \Psi / \partial x^i < 0$) gana energía porque es atraído hacia el centro. Inversamente, cuando deja el pozo, sufre un corrimiento al rojo gravitacional.

Por último, al usar las Ecs. (8) y (9) en la Ec. (3), e integrando sobre los momentos, se obtiene

$$\dot{\Theta} + \dot{p}^i \frac{\partial}{\partial x^i} (\Theta + \Psi) + \dot{p}^i \frac{\partial}{\partial \dot{p}^i} \Theta + \dot{\Phi} = 0, \quad (10)$$

donde el punto indica derivada respecto a t . Esta es la ecuación de Boltzmann, en ausencia de colisiones, que describe la evolución de las fluctuaciones de temperatura Θ definidas en la Ec. (1).

3. Ecuaciones de Einstein

Para tener una solución completa de las Ecs. (8), (9) y (10), es necesario también conocer la evolución de las perturbaciones de la métrica (4). Tal evolución dependerá de manera importante de las perturbaciones del contenido material del universo.

La relación entre las cantidades métricas y la materia está dada por las ecuaciones de la RG, [2,5,14]

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (11)$$

$G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein; $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, el cual depende de la métrica y sus derivadas; $\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ es el escalar de Ricci; G es la constante de Newton; y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento.

El hecho de que el universo se considere un fluido perfecto, nos lleva a tomar la definición del tensor de energía-momento para dicho fluido, el cual está dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (12)$$

donde ρ , P y u^μ son la densidad de energía, la presión y la 4-velocidad del fluido, respectivamente.

Ahora bien, sólo nos interesan las ecuaciones dadas por cantidades perturbadas. La perturbación al tensor de Ricci viene dado en forma covariante como [1]

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)_{;\nu} - (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)_{;\lambda}, \quad (13)$$

donde $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ es la perturbación de los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. En términos de las perturbaciones de la métrica $\delta g_{\mu\nu}$, ver Ecs. (4), se tiene

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} = & \frac{1}{2}g^{\lambda\rho} [(\delta g_{\lambda\rho})_{;\mu;\nu} - (\delta g_{\rho\mu})_{;\nu;\lambda} \\ & - (\delta g_{\rho\nu})_{;\mu;\lambda} + (\delta g_{\mu\nu})_{;\rho;\lambda}]. \end{aligned} \quad (14)$$

Otra cantidad importante es el escalar de Ricci, que se expresa $\delta\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Tomando en cuenta las perturbaciones al tensor de energía-momento (12), $T_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}$, las ecuaciones de Einstein perturbadas son

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G\delta T_{\mu\nu}, \quad (15)$$

donde la perturbación del tensor de Einstein es $\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - (1/2)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} - (1/2)\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

Por último cabe mencionar que la métrica para un universo perturbado, en su forma más general, contiene no sólo perturbaciones escalares, sino también vectoriales y tensoriales [1,5-7,12-17]. Las primeras representan perturbaciones en la densidad de energía del fluido cosmológico cuando ocurrió la última dispersión y son las únicas fluctuaciones con las cuales se puede formar estructura a través de inestabilidades gravitatorias. Las segundas representan perturbaciones en la velocidad del fluido y decaen con la expansión del universo. Las terceras son perturbaciones transversales, las cuales pueden verse como ondas gravitacionales [16].

4. Anisotropías de la Radiación del Fondo Cósmico (RFC)

El punto importante en esta sección es entender cómo se genera el espectro de potencias de la RFC, y una vez generado, ver qué información se puede obtener de él.

Los multipolos $a_{\ell m}$ de las anisotropías de la RFC están definidas por la relación [7,14,17]

$$\frac{\delta T}{T} = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \quad (16)$$

donde los términos $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ son los armónicos esféricos. El monopolo ($\ell = 0$) es la temperatura de cuerpo negro de la RFC. El dipolo ($\ell = 1$) se interpreta como el resultado del efecto Doppler causado por el movimiento relativo entre el sistema solar y el campo de cuerpo negro de la RFC. Los multipolos $\ell \geq 2$ representan la anisotropía intrínseca de la RFC.

Las anisotropías de temperatura del RFC se miden en dos puntos separados por un ángulo θ , y el cuadrado de la diferencia se promedia sobre el cielo, entonces

$$\left\langle \left(\frac{\delta T}{T} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \sum_{\ell} (2\ell + 1) C_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), \quad (17)$$

donde los términos $C_{\ell} \equiv \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle$ son conocidos como la varianza cósmica de los $a_{\ell m}$, y los P_{ℓ} son los polinomios de Legendre. Así pues, el espectro se genera al graficar los coeficientes de la expresión (17).

Para entender las anisotropías, actualmente se cuenta con la ayuda de códigos muy eficientes. El más conocido de ellos es el código CMBFAST [12], el cual genera el espectro de potencia de las anisotropías de la RFC al variar parámetros cosmológicos.

Existe otro código, CMBEASY[13], con el cual también es posible generar espectros de la RFC. Este código es un poco más fácil de utilizar ya que en la ventana principal es posible introducir los parámetros para los cuales se quiere generar el espectro. El inconveniente del código CMBEASY es que sólo genera espectros para modelos cosmológicos planos.

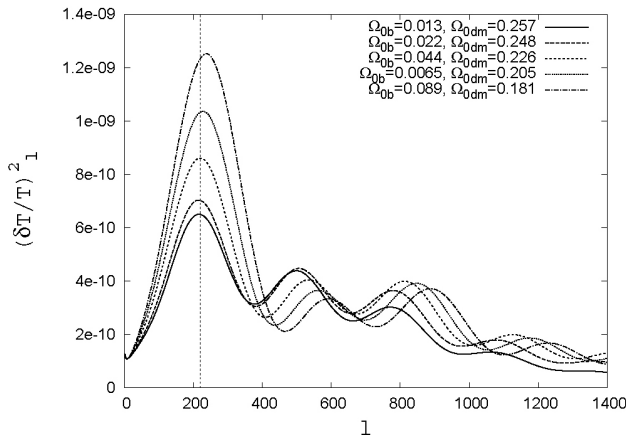


FIGURA 1. Espectros de potencias de la RFC que se obtienen al variar la cantidad de materia bariónica y materia oscura. La línea vertical se encuentra en el multipolo $\ell = 220$. Más detalles se dan en el texto.

Como ejemplo, en la Fig. 1 se muestran los espectro de potencia para un universo plano, al variar el parámetro de densidad de bariones (Ω_{ob}) y de materia oscura (Ω_{0DM}) para un universo plano ($\Omega_{0k} = 0$), tal que $\Omega_{ob} + \Omega_{0DM} = 0.27$. El resto de la materia está en la forma de una constante cosmológica (Λ) con proporción $\Omega_{0\Lambda} = 0.73$.

Se observa que el primer pico no se mueve, encontrándose aproximadamente en el multipolo $\ell \approx 220$, lo que indica que se tiene trata de un universo con curvatura nulaⁱⁱⁱ. Para los casos cuando se tiene menor contenido bariónico, la altura del primer pico disminuye, debido a que la amplitud de oscilación es pequeña. La presión disminuye y esto hace que

los fotones puedan escapar del pozo de potencial, reduciendo la magnitud de las perturbaciones. Por el contrario, cuando el contenido bariónico aumenta, las oscilaciones son grandes, es más difícil que salgan del pozo de potencial, y aumenta la amplitud de las perturbaciones.

5. Conclusiones

En el análisis que se muestra en este artículo, se puede ver que el estudio de las anisotropías tiene un papel muy importante en la cosmología moderna debido a que proporcionan información sobre el universo desde el momento en que la materia bariónica y la radiación se desacoplan hasta nuestros días. Además, con ayuda de las observaciones y los códigos numéricos, es posible inferir sobre las características que tendrían diferentes modelos cosmológicos a diferentes épocas al interpretar los espectros generados de la RFC. En los siguientes años se espera contar con información más precisa, así como con evidencia de la existencia de ondas gravitacionales primordiales[8]. De ser así, la RFC abriría una nueva ventana que nos permitiría mirar hasta casi el momento del Big Bang.

Acknowledgments

MJR-I agradece la beca de maestría otorgada por CONACYT. Otros apoyos parciales para este trabajo son: CONACYT (42748, 46195 y 47641); CONCYTEG (05-16-K117-032); DINPO (000085) y PROMEP UGTO-CA-3.

- ⁱ Para un breve recuento del descubrimiento de la RFC, ver Ref. 4.
- ⁱⁱ Tomamos como convención de unidades $c = 1$, y una signatura $-1, 1, 1, 1$. Los índices con letras griegas pueden tomar los valores 0, 1, 2, 3, y los latinos toman los valores 1, 2, 3.
- ⁱⁱⁱ La posición del primer pico depende también de la razón entre la materia bariónica y la radiación.
1. S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, 1972).
2. C.W. Misner, K.S. Thorne y J.A. Wheeler, *Gravitation* (San Francisco, 1973) p. 1279.
3. G.F.R. Ellis (2006), astro-ph/0602280.
4. P.J.E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton University Press, 1993).
5. E.W. Kolb y M.S. Turner, *The Early Universe* (Addison Wesley, 1993).
6. A.R. Liddle y D.H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-scale Structure* (Cambridge University Press, 2000).
7. S. Dodelson, *Modern Cosmology* (Cambridge University Press, 2000).

8. Lambda (2005), legacy Archive for Microwave Back-ground Data Analysis, <http://lambda.gsfc.nasa.gov>
9. D.N. Spergel *et al.*, (2006), astro-ph/0603449, 0603450, 0603451, 0603452.
10. M. Tegmark, A. Aguirre, M. Rees y F. Wilczek, *Phys. Rev. D* **73**(2006) 023505, astro-ph/0511774.
11. A.R. Liddle, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **351** (2004) L49, astro-ph/0401198.
12. U. Seljak y M. Zaldarriaga, *Astrophys. J.* **469** (1996) 437, astro-ph/9603033, <http://www.cmbfast.org>
13. G.R.M. Doran y C. Müller, <http://www.cmbeasy.org>
14. W. Hu, Ph.D. thesis (1995).
15. C.-P. Ma y E. Bertschinger, *Astrophys. J.* **455** (1995) 7, astro-ph/9506072.
16. W. Hu y M.J. White, *New Astron.* **2** (1997) 323, astro-ph/9706147.
17. J.G. Bartlett, *New Astron. Rev.* **43** (1999) 83, astro-ph/9903260.