REVISTA MEXICANA DE FÍSICA S **53** (4) 129–132 AGOSTO 2007

Dinámica de membranas superconductoras

Zelin Miguel-Pilar
Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional,
Edificio 9, Unidad Profesional "Adolfo López Mateos", Zacatenco, 07738 México D.F., MÉXICO,
e-mail: zelin@esfm.ipn.mx

Recibido el 1 de mayo de 2006; aceptado el 1 de noviembre de 2006

En este trabajo se presenta una descripción geométrica para membranas superconductoras aplicada a ejemplos concretos. Se considera una acción general efectiva la cual incluye una clase general de objetos extendidos superconductores. Además de la descripción lagrangiana, se presenta una descripción hamiltoniana inspirada en el formalismo ADM de la relatividad general. Las descripciones son usadas considerando diversas configuraciones de paredes de dominio: esfera, pared infinita, cilindro y cuerda cerrada, en distintos espacios-tiempo de trasfondo.

Descriptores: Cuerdas; membranas; objetos relativistas superconductores; defectos topológicos; rayos cósmicos.

In this work we present a geometrical description for superconducting membranes in concise examples. A general effective action is considered, which includes a general class of extended superconducting objects. Besides the Lagrangian description, a Hamiltonian description based on the ADM fashion of general relativity is considered. Both descriptions are used considering different domain walls configurations: sphere, infinite wall, cylinder and closed string, in several spacetime backgrounds.

Keywords: Strings; branes; relativistic superconducting objects; topological defects; cosmic rays.

PACS: 04.20.Fy; 11.25.Wx; 11.27.+d; 46.70Hg; 47.10.Df; 98.80.Cq

1. Introducción

Actualmente las membranas superconductoras han sido utilizadas en la modelación de defectos topológicos, los cuales son objetos que surgen en los primeros instantes del universo [1]. El término superconductor hace referencia a corrientes permanentes sobre la membrana, que son responsables, junto con la tensión superficial, de la estabilidad de la configuración. Aquí se presentan diversas configuraciones de membranas superconductoras.

2. Preliminares matemáticos

En esta parte se consideran algunos antecedentes matemáticos relativos al encajamiento de la hoja de mundo y las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana de membranas superconductoras.

2.1. Matemáticas del encajamiento de la hoja de mundo

Se presentan algunos aspectos de las matemáticas de la hoja de mundo de acuerdo a [2, 3]. Consideremos una variedad m temporaloide (encajamiento), de dimensión $D+1$ inmersa en una variedad de trasfondo M de dimensión N. La variedad M tiene una métrica $g_{\mu\nu}$, con $\mu,\nu = 0,\ldots,N-1$. Las x^μ son coordenadas del espacio-tiempo. Los N vectores

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{1}$$

son base del espacio tangente $T_p(M)$ a M en el punto p.

El encajamiento de m en M es

$$x^\mu = \chi^\mu(\xi^a), \tag{2}$$

con $a = 0,\ldots,D$, ξ^a las coordenadas en m y χ^μ las funciones encajadas. Los $D+1$ vectores base del espacio tangente $T_p(m)$ a m son

$$e_a := e^\mu_a \partial_\mu = \chi^\mu_{,a}\partial_\mu, \tag{3}$$

con e^μ_a los vectores tangentes a m asociados a χ^μ

$$e^\mu_a = \chi^\mu_{,a} = \frac{\partial \chi^\mu}{\partial \xi^a}, \tag{4}$$

y el elemento de línea del espacio-tiempo es

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}\chi^\mu_{,a}\chi^\nu_{,b}d\xi^a d\xi^b. \tag{5}$$

La métrica inducida sobre m es

$$\gamma_{ab} = g_{\mu\nu}\chi^\mu_{,a}\chi^\nu_{,b} = g(e_a, e_b), \tag{6}$$

la cual nos da la geometría intrínseca de m. La extrínseca es dada por $N-(D+1)$ vectores normales n^i $(i = 1,\ldots,N-(D+1))$, ortogonales y unitarios

$$g(e_a, n^i) = 0,\; g(n^i, n^j) = \delta^{ij}, \tag{7}$$

con δ^{ij} la delta de Kronecker. Con el formalismo ADM para relatividad general [4,5], se considera una foliación de la hoja de mundo $\{m, \gamma_{ab}\}$ en hipersuperficies espacialoides Σ_t de dimensión D, definidas por el valor cons-tante de una función escalar t.

La hipersuperficie Σ_t es descrita por el encajamiento de Σ_t en m

$$\xi^a = X^a(u^A), \tag{8}$$

donde $A = 1,...,D$, ξ^a son coordenadas locales en m, u^A son coordenadas locales en Σ_t y X^a son las funciones de encajamiento. Los vectores tangentes a Σ_t son

$$\epsilon^a_A = X^a{}_{,A} = \frac{\partial X^a}{\partial u^A}. \tag{9}$$

El encajamiento, por composición de funciones, de Σ_t en M es

$$x^\mu = X^\mu(u^a) = \chi^\mu(\xi^a(u^A)). \tag{10}$$

Por definición, los D vectores base de $T_p(\Sigma_t)$, el espacio tangente a cada punto de Σ_t son

$$\epsilon_A := \epsilon^a_A e^\mu_a \partial_\mu. \tag{11}$$

Así, la métrica inducida sobre Σ_t es

$$h_{AB} = \gamma_{ab}\epsilon^a_A\epsilon^b_B = g_{\mu\nu}\epsilon^\mu_A\epsilon^\nu_B, \tag{12}$$

la normal η^a temporaloide, unitaria a Σ_t está definida por

$$\gamma_{ab}\eta^a\epsilon^b_A = 0,\ \gamma_{ab}\eta^a\eta^b = -1. \tag{13}$$

Denotamos por ∇_μ, ∇_a y $\mathcal{D}_A$ a las derivadas covariantes compatibles con $g_{\mu\nu}$, γ_{ab} y h_{AB}, respectivamente.

2.2. Dinámica lagrangiana

Se describirá brevemente la dinámica lagrangiana para membranas superconductoras [6]. La acción que describe la dinámica de la membrana relativista es

$$S = \int_m d^{D+1}\xi\sqrt{-\gamma}\mathcal{L}(\omega), \tag{14}$$

donde $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\omega)$ es la densidad lagrangiana, ω será llamado el parámetro de estado, dado por

$$\omega = \gamma^{ab}\widetilde{\nabla}_a\phi\widetilde{\nabla}_b\phi, \tag{15}$$

con

$$\widetilde{\nabla}_a\phi = \nabla_a\phi + A_a, \tag{16}$$

el acoplamiento de campos (escalar y vectorial), $A^a = e^\mu_a A_\mu$ las proyecciones del potencial de trasfondo sobre la hoja de mundo y $\gamma = det\{\gamma_{ab}\}$. La corriente electromagnética J^a y el tensor de energía-impulso T^{ab} son

$$J^a = 2\frac{d\mathcal{L}}{d\omega}\gamma^{ab}\widetilde{\nabla}_b\phi, \tag{17}$$

$$T^{ab} = -2\frac{d\mathcal{L}}{d\omega}\gamma^{ac}\widetilde{\nabla}_c\phi\gamma^{bd}\widetilde{\nabla}_d\phi + \mathcal{L}\gamma^{ab}, \tag{18}$$

y las ecuaciones dinámicas de los campos internos son satisfechas

$$\nabla_a J^a = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\partial_a\left(\sqrt{-\gamma}2\frac{d\mathcal{L}}{d\omega}\gamma^{ab}\widetilde{\nabla}_b\phi\right) = 0. \tag{19}$$

Variaciones de la acción en términos de la base $\{e_a, n^i\}$ dan

$$\nabla_a T^{ab} = F^{ba}J_a, \tag{20}$$

$$T^{ab}K^i_{ab} = F^i_a J^a, \tag{21}$$

donde

$$F_{ab} = e^\mu_a e^\nu_b F_{\mu\nu},\ F^i_a = e^\mu_a n^{i\nu}F_{\mu\nu}, \tag{22}$$

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, es el tensor de campo electromagnético y K^i_{ab} denota a la curvatura extrínseca.

2.3. Dinámica hamiltoniana

Ahora se presenta la dinámica hamiltoniana de membranas superconductoras como en [7]. El lagrangiano, de acuerdo a la descomposición ADM de la acción (14) es

$$L[X,\dot{X};\phi,\dot{\phi}] = \int_{\Sigma_t} d^D u N\sqrt{h}\mathcal{L}(\omega), \tag{23}$$

donde N es la función $Lapse$ ($Lapso$) y $h = det\{h_{AB}\}$. También, la descomposición ADM de ω está dada por

$$\omega = -\frac{1}{N^2}[\mathcal{L}_t\phi - N^A\widetilde{\mathcal{D}}_A\phi + (t\cdot A)]^2 + \widetilde{\omega}, \tag{24}$$

donde $\widetilde{\mathcal{D}}_A\phi = \mathcal{D}_A\phi + A_A$ denota la proyección en la hipersuperficie Σ_t de la derivada covariante de norma del campo escalar de la hoja de mundo ϕ, $\mathcal{L}_t\phi$ denota la derivada de Lie a lo largo de la deformación del campo vectorial t^μ, $\widetilde{\omega} = h^{AB}\widetilde{\mathcal{D}}_A\phi\widetilde{\mathcal{D}}_B\phi$ es la proyección en Σ_t de ω y N^A es la función $Shift$ ($Desplazamiento$).

Los momentos asociados son:

$$\pi = \frac{\delta L}{\delta\mathcal{L}_t\phi} = -2\sqrt{h(\widetilde{\omega}-\omega)}\frac{d\mathcal{L}}{d\omega}, \tag{25}$$

$$P_\mu = \frac{\delta L}{\delta\dot{X}^\mu} = [-\sqrt{h}\mathcal{L}(\omega) + (\widetilde{\omega}-\omega)^{\frac{1}{2}}\pi]\eta_\mu - \pi\widetilde{\mathcal{D}}_A\phi\epsilon^A_\mu + \pi A_\mu. \tag{26}$$

Las constricciones del espacio fase $\Gamma := \{X^\mu, P_\mu; \phi, \pi\}$ que generan la dinámica, son

$$C_0 = g^{\mu\nu}\Upsilon_\mu\Upsilon_\nu + h[\mathcal{L}(\omega) + \frac{\pi^2}{2h(\frac{d\mathcal{L}}{d\omega})}]^2 - \pi^2[\omega + \frac{\pi^2}{4h(\frac{d\mathcal{L}}{d\omega})^2}], \tag{27}$$

$$C_A = \Upsilon_\mu\epsilon^\mu_A + \pi\widetilde{\mathcal{D}}_A\phi. \tag{28}$$

C_0 es la constricción escalar. Es la generalización a membranas superconductoras de la constricción escalar para una partícula relativista parametrizada en un campo electromagnético externo. C_A es la constricción vectorial. Es universal para todas las acciones invariantes bajo parametrizaciones de primer orden en las derivadas de las funciones encajadas. Depende de la forma particular de la densidad lagrangiana $\mathcal{L}(\omega)$. Se ha definido el momento cinético de la siguiente manera

$$\Upsilon_\mu = P_\mu - \pi A_\mu. \tag{29}$$

$\mathcal{L}$ es función arbitraria de ω, los modelos más conocidos son

$$\mathcal{L}(\omega) = a + b\omega, \tag{30}$$

conocido como modelo de Witten,

$$\mathcal{L}(\omega) = \sqrt{a + b\omega}, \tag{31}$$

conocido como modelo de Nielsen,

$$\mathcal{L}(\omega) = ln\frac{\omega}{a}, \tag{32}$$

conocido como modelo de Carter-Peter. Aquí a y b son constantes.

3. Ejemplos

Se estudiarán varias configuraciones de membranas superconductoras utilizando las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana, bajo diferentes condiciones físicas.

3.1. Membrana esférica superconductora

Consideremos una membrana esférica simétrica ($D = 2$), inmersa en un espacio-tiempo general, estático, esféricamente simétrico ($N = 4$), con elemento de línea

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)d\Omega^2, \tag{33}$$

donde las funciones A, B y C dependen del espacio-tiempo particular y $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$.

Tomamos como ansatz para nuestra membrana las elecciones

$$\nabla_t\phi = \dot{f}(t),\ A_\mu = (-\frac{q}{r}, 0, 0, 0), \tag{34}$$

con f función derivable del tiempo t y q una constante. Físicamente la membrana tiene una distribución superficial de carga y está inmersa en un campo eléctrico $\vec{E}_r$ de magnitud $\vec{E}_r = (q/r^2)\hat{e}_r$. Con el encajamiento de m en M

$$\chi^\mu(t, \theta, \varphi) = (t, r(t), \theta, \varphi), \tag{35}$$

la ecuación de movimiento según la dinámica lagrangiana, ecuaciones (20) y (21), es

$$\frac{(-2A'B\dot{r}^2 + 2AB\ddot{r} + AA' + AB'\dot{r}^2)}{2(A - B\dot{r}^2)^{\frac{3}{2}}} C\mathcal{L}^+(\omega) + \frac{AC'}{\sqrt{A - B\dot{r}^2}}\mathcal{L} = W\frac{q}{r^2}, \tag{36}$$

y con la dinámica hamiltoniana, ecuaciones (27) y (28), obtenemos

$$\frac{AC^2(\mathcal{L}^+(\omega))^2}{(E - \frac{Wq}{r})^2} + \frac{B}{A}\dot{r}^2 = 1, \tag{37}$$

con

$$\mathcal{L}^+(\omega) = \mathcal{L}(\omega) + \frac{W^2}{2C^2[\frac{d\mathcal{L}}{d\omega}]}, \tag{38}$$

donde la prima indica derivadas con respecto al argumento de las funciones y W una constante. Por supuesto, los dos ecuaciones halladas (36) y (37) son equivalentes.

3.2. Pared infinita superconductora

La pared ($D = 2$) está en el espacio-tiempo plano de Minkowski ($N = 4$), cuyo elemento de línea es

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{39}$$

En este caso tomamos como ansatz para nuestra membrana las elecciones

$$\phi = f(t) + c_1 x + c_2 y,\ A_\mu = (E_z z, 0, 0, 0), \tag{40}$$

donde c_1, c_2 y E_z son constantes. El significado físico de esto es que la membrana está cargada, tiene una corriente constante sobre su superficie en dirección î y otra en dirección ĵ y está inmersa en un campo eléctrico $\vec{E}_z$ en la dirección $\hat{k}$. Con el encajamiento de m en M

$$\chi^\mu(t, x, y) = (t, x, y, z(t)), \tag{41}$$

la ecuación por dinámica lagrangiana es

$$\frac{(\mathcal{L}^+(\omega))\ddot{z}}{(1 - \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}} = WE_z, \tag{42}$$

y por dinámica hamiltoniana

$$\frac{\mu^2}{(E + WE_z z)^2} + \dot{z}^2 = 1, \tag{43}$$

donde

$$\mathcal{L}^+(\omega) = \mathcal{L}(\omega) + \frac{W^2}{2[\frac{d\mathcal{L}}{d\omega}]}. \tag{44}$$

De nuevo (42) y (43) son equivalentes.

3.3. Membrana cilíndrica superconductora

La membrana cilíndrica (D=2) está en Minkowski (N=4), como en (39).

En este caso tomamos como ansatz para nuestra membrana las elecciones

$$\phi = f(t) + c_1\theta + c_2 z,\ A_\mu = (E_r r, 0, 0, 0), \tag{45}$$

donde c_1, c_2 y E_r son constantes. La membrana está cargada y tiene una corriente constante sobre su superficie en la dirección $\hat{e}_\theta$ y una en la dirección $\hat{k}$ y está inmersa en un campo eléctrico $\vec{E}_r$ en la dirección $\hat{e}_r$. Con el encajamiento de m en M

$$\chi^\mu(t, \theta, z) = (t, r(t)\text{cos}\theta, r(t)\text{sin}\theta, z), \tag{46}$$

la ecuación de movimiento por dinámica lagrangiana es

$$\frac{(\mathcal{L}^+(\omega))r\ddot{r}}{(1 - \dot{r}^2)^{\frac{3}{2}}} + (\mathcal{L} - 2\frac{d\mathcal{L}}{d\omega}\frac{c_1^2}{r^2})\frac{1}{\sqrt{1 - \dot{r}^2}} = WE_r, \tag{47}$$

y con la dinámica hamiltoniana

$$\frac{r^2(\mathcal{L}^+(\omega))^2}{(E + WE_r r)^2} + \dot{r}^2 = 1, \tag{48}$$

con

$$\mathcal{L}^+(\omega) = \mathcal{L}(\omega) + \frac{W^2}{2r^2[\frac{d\mathcal{L}}{d\omega}]}. \tag{49}$$

3.4. Cuerda cerrada superconductora

La cuerda $(D = 1)$ está en Minkowski ($N = 4$), como en (39).

Las condiciones físicas son

$$\nabla_t\phi = \dot{f}(t),\ \nabla_\theta\phi = c_1,\ A_\mu = (0, -\frac{B_z}{2}y, \frac{B_z}{2}x, 0), \quad (50)$$

donde c_1 y B_z son constantes. La cuerda está cargada y tiene una corriente constante en la dirección $\hat{e}_\theta$ y está inmersa en un campo magnético $\vec{B}_z$ en la dirección $\hat{k}$. El encajamiento de m en M es

$$\chi^\mu(t,\theta) = (t, r(t)\mathrm{cos}\theta, r(t)\mathrm{sin}\theta, 0), \quad (51)$$

la ecuación de movimiento con dinámica lagrangiana es

$$-\frac{(\mathcal{L}^+(\omega))\ddot{r}}{(1-\dot{r}^2)^{\frac{3}{2}}} - (\mathcal{L} - 2\frac{d\mathcal{L}}{d\omega}\frac{(c_1 + \frac{1}{2}B_z r^2)}{r^2})\frac{1}{r\sqrt{1-\dot{r}}}$$
$$= -\frac{B_z}{\sqrt{1-\dot{r}^2}}2\frac{d\mathcal{L}}{d\omega}\frac{(c_1 + \frac{1}{2}B_z r^2)}{r}, \quad (52)$$

y con la dinámica hamiltoniana

$$\frac{r^2(\mathcal{L}^+(\omega))^2}{E^2} + \dot{r}^2 = 1, \quad (53)$$

con $\mathcal{L}^+(\omega)$ como en (49).

4. Conclusiones

De las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana de membranas relativistas superconductoras se hallaron las ecuaciones de movimiento, a nivel clásico, para distintas configuraciones en diferentes condiciones físicas. Es posible estudiar estos sistemas utilizando diversos mo- delos para $\mathcal{L}(\omega)$ [8]. Estas configuraciones de defectos topológicos pueden usarse para explicar la formación de rayos cósmicos ultraenergéticos o la formación de macroestructuras galácticas, según la dinámica que presenten [9].

Agradecimientos

Agradezco a PIFI-IPN, a Rubén Cordero y CGPI-IPN a través de 20051855 y a Efraín Rojas y CONACYT a través de C01-41639, por el apoyo recibido.

1. B. Carter, “Brane dynamics for treatment of cosmic strings and vortons”. Proc. 2nd Mexican School on Gravitation and Mathematical Physics, Tlaxcala, 1996, ed. A. Garcia, C. Lammerzahl, A. Macias, D. Nuñez (Science Network Publishing, Konstanz, 1997), hep-th/9705172.
2. R. Capovilla and J. Guven, *Phys. Rev. D* **51**(12) (1995) 6736(8).
3. R. Capovilla and J. Guven, *Class. Quantum Grav.* **12** (1995) L107.
4. R. Arnowitt, S. Desser and C.W. Misner, in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, L. Witten, ed., (Wiley, New York, U.S.A 1962) p. 227.
5. A. Corichi and D. Nuñez, *Rev. Mex. Fis.* **37** (1991) 720.
6. R. Cordero and A. Queijeiro, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001) 3393.
7. R. Cordero and E. Rojas, *Phys. Lett. B* **470** (1999) 45.
8. Z. Miguel, Tesis de Licenciatura, Instituto Politécnico Nacional, México, (2004).
9. A. Vilenkin and E.P.S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).
10. R. Cordero and E. Rojas, *Int. J. Mod. Phys. A* **17**(1) (2002) 73.