Singularidades en modelos Bianchi con electrodinámica no lineal

R. García-Salcedo
CINVESTAV-Monterrey,
Av. Cerro de las Mitras 2565, Col. Obispado, Monterrey, 64060 N.L.,
e-mail: rsalcedo@fis.cinvestav.mx

Recibido el 1 de mayo de 2006; aceptado el 1 de noviembre de 2006

En esta contribución se presenta una breve recopilación de soluciones de las ecuaciones de Einstein acopladas con electrodinámica no lineal. Estas soluciones corresponden a espacios tipo Petrov D, homogéneas y anisotrópicas, la cual tiene como algunos casos particulares a varios espacios confermes a Bianchi, entre ellos G_3I, G_3II, G_3III, G_3VIII, G_3IX y Kantowski— Sachs. La materia que acoplamos a dicha métrica es la electrodinámica no lineal de Born-Infeld, [17]. Posteriormente se realiza un análisis de geodésicas el cual nos indica que G_3VIII es geodésicamente completo, pero que para G_3II y G_3IX el análisis no es concluyente. Mientras que para G_3I, G_3III y Kantowski—Sachs, se muestra que son geodésicamente incompletos.

Descriptores: Petrov D; Electrodinámica de Born-Infeld; Análisis de geodésicas.

In this contribution we shall to present a brief compilation of the Einstein field equation solutions coupled with with nonlinear electrodynamics. The metric used correspond to homogenous and anisotropic spaces Petrov type D, which has some particular cases to several conformal to Bianchi spaces, among them G_3I, G_3II, G_3III, G_3VIII, G_3IX and Kantowski–Sachs. We coupled Born-Infeld nonlinear electrodynamics with this metric [17]. Finally, an analysis of geodesic is made which indicates us that G_3VIII is geodesically complete, but in the analysis for GII and GIX is not conclusive. Whereas for G_3I, G_3III and the Kantowski-Sachs, it shows that are geodesically incomplete.

Keywords: Petrov type D; Born-Infeld electrodynamics; geodesic analysis.

PACS: 98.80.Hw; 11.10.Lm; 04.20.Dw

1. Introducción

La relatividad general (RG) es la mejor teoría que tenemos para la descripción de la dinámica del espacio-tiempo, materia y gravitación. Lo que uno podría esperar, y que también le ocurrió a Einstein, es que la evolución y estructura del espacio-tiempo, de acuerdo a esta teoría, esté libre de singularidades (lugares donde la validez y las predicciones de la teoría dejan de tener sentido) y, por tanto, la relatividad general podría representar la teoría "final" para la descripción del mundo físico a nivel macroscópico. Sin embargo, la RG supone e implica la existencia del espacio-tiempo y, de esta forma, la cuestión de cómo tal estructura de espacio-tiempo puede ser creada lógicamente, está fuera del reino de dicha teoría. Podría no ser una cuestión científica válida el preguntarnos si la RG tiene un rango infinito de validez o, equivalentemente, que sea una teoría libre de singularidades del espacio-tiempo.

Desafortunadamente, los teoremas de singularidad, que fueron mostrados por primera vez hace más de 30 años por Stephen Hawking, Robert Geroch y Roger Penrose [1], nos dieron las malas nuevas de que bajo ciertas condiciones aparecerían las singularidades del espacio-tiempo ya sea en el futuro o en el pasado. Si esto es cierto, y la estructura matemática de la RG implica la existencia de singularidades del espacio-tiempo, entonces esta teoría no podría ser la definitiva para la descripción consistente del universo. Su rango de validez en tal caso es finito y deberemos encontrar otra teoría que nos responda la cuestión de cómo fue creado el espacio-tiempo en la RG.

Por supuesto, un asunto importante (que aún no es claro) es el de la naturaleza de las singularidades del espacio-tiempo en RG. Todos los intentos que se han hecho hasta ahora en esta dirección muestran que las singularidades están típicamente relacionadas con estructuras muy complicadas que nos llevan a teorías de cuerdas, teoría cuántica de la gravedad, entre otras. Podemos, por tanto, concluir que es interesante, y además, legítimo trabajar en el estudio de espacio-tiempos que proporcionan elementos que contribuyan al avance en este sentido.

J.M.M. Senovilla acaba de presentar tanto los logros como las preguntas abiertas sobre los teoremas de singularidad en la Relatividad General [2].

2. Relatividad general acoplada con electrodinámica no lineal de Born-Infeld

Una de las motivaciones para analizar los espacio-tiempos con campos electromagnéticos no lineales es que en épocas tempranas o en ciertas regiones del universo, dichos campos exceden los 10^{15} gauss, de hecho, se ha demostrado que podrían existir campos electromagnéticos del orden de 10^{42} gauss [3]. A estos valores de los campos electromagnéticos, la interacción de fotones con ellos mismos se hace importante y la electrodinámica clásica ya no es válida [4]. La teoría electromagnética no lineal de Born e Infeld (BI) puede funcionar en ciertos casos como lagrangiano efectivo de la electrodinámica cuántica (EDC) [5].

La electrodinámica no lineal (EDNL) que presentaron Born e Infeld en 1934 posee una estructura lagrangiana similar a una acción efectiva en EDC; es decir, que el lagrangiano de BI tiene la misma dependencia en los invariantes electromagnéticos que en la aproximación de un lazo de la EDC.

Este último hecho fue descrito por Heisenberg y Euler [6] poco después de la propuesta de Born e Infeld. Por otro lado, basado en consideraciones generales, Schwinger obtuvo una expresión para la lagrangiana de EDC que coincidía, salvo un factor numérico del orden de la unidad, con la lagrangiana de BI en la misma aproximación [7]. Por lo tanto, la teoría de BI nos puede dar, al menos cualitativamente, algunas de las características de universos tempranos o de regiones en el universo donde la electrodinámica clásica deja de tener validez.

La aplicación de las ecuaciones de la EDNL de BI es interesante en RG ya que se puede implementar un modelo clásico en el que ahora es posible tomar en cuenta fenómenos como la polarización del vacío, entre otros y cómo afectan al espacio-tiempo donde se encuentran. Las soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein acopladas con esta EDNL de BI pueden indicar la relevancia física de efectos no lineales en intensos campos gravitacionales y electromagnéticos. De la misma forma, se puede espe-cular que al haber campos electromagnéticos intensos, el espacio-tiempo descrito por ellos podrían de cierta forma evitar las singularidades que pudieran aparecer al resolver las ecuaciones de Einstein.

De hecho, es interesante notar que las primeras soluciones exactas regulares que se encontraron en RG con EDNL fueron agujeros negros [8], donde como fuente se tienen campos electromagnéticos no lineales que satisface la condición de energía débil y los campos de Maxwell son reproducidos en el límite débil. También se ha mostrado que la RG acoplada con EDNL nos da agujeros negros magnéticos y monopolos [9], y estructuras eléctricamente cargadas regulares que poseen un centro regular de de Sitter [10]. La estabilidad de estas soluciones regulares ha sido explorada también [11].

Recientemente, un modelo alternativo de agujero negro fue propuesto, en particular, las soluciones conocidas como gravastar [12], en donde existe una transición de fase en o cerca del lugar donde se espera que se forme el horizonte de eventos y el interior es reemplazado por un condensado de de Sitter. El modelo de gravastar no tiene singularidades en el origen y no tiene horizonte de eventos, porque su superficie rígida está localizada a un radio mayor que el radio de Schwarzschild. En este contexto, se ha encontrado una gravastar con EDNL, donde el interior de la solución de de Sitter es sustituida por un campo electromagnético no lineal de BI. Esta solución es llamada gravastar fantasma de BI [13].

Otro tipo de soluciones a las ecuaciones de campo gravitacional de Einstein son las conocidas como agujeros de gusano, las cuales comenzaron a tener mucha popularidad a partir del famoso trabajo de Morris y Thorne a mediados de la década de los 80 [14]. Las soluciones tipo agujeros de gusano (3+1) dimensional estáticas esféricamente simétricas no pueden acoplarse con EDNL, como fue dicho por Bronnikov [9], [15] y confirmado posteriormente por A. Berrocal y F. Lobo [16]. Este último trabajo también demostró que la solución (2+1) dimensional, así como las soluciones axialsimétricas estacionarias tanto en (2+1) como (3+1) dimensional, tampoco pueden acoplarse con EDNL. Lo anterior fue demostrado considerando que el lagrangiano de dicha electrodinámica sólo depende de uno de los invariantes del campo electromagnético, por lo que aún está abierta la posibilidad para explorar la incorporación del otro de los invariantes de campo.

En la Ref. 17, se encontró una solución exacta de las ecuaciones acopladas de Einstein-Born-Infeld para un escenario cosmológico anisotrópico. Se consideró una métrica tipo Petrov D y dependiendo de algunos parámetros de las funciones métricas, se pueden ver algunos espacios tiempo Bianchi, los cuales se describiran posteriormente. La métrica considerada es

$$ds^2=\frac{1}{\phi(t)^2} \times \left[\frac{dz^2}{h(z)}-\frac{dt^2}{s(t)}+h(z)dy^2+s(t)\left(dx+M(z)dy\right)^2\right], \quad (1)$$

donde $M\left(z\right)=2lz$ y $h\left(z\right)=\alpha+\epsilon z^2$. Y considerando un tensor de energía momento de electrodinámica no lineal de Born-Infeld

$$T_{ab}=\mathcal{H}_P\left(-p_{as}p^s_b+g_{ab}P\right)+\left(P\mathcal{H}_P+Q\mathcal{H}_Q-\mathcal{H}\right)g_{ab},$$

donde $\mathcal{H}=b^2-\sqrt{b^4-2b^2P+Q^2}$ con P y Q, los invariantes de campo electromagnético. Las soluciones para las funciones métricas ϕ y s son las siguientes:

$$\phi\left(t\right)=A\cos\left(lt+C_2\right),$$

$$s(t)=\phi^3\dot{\phi}\left[C_1+\int\left(\frac{2b^2\left(1-\sqrt{1-\phi^4}\right)-\epsilon\phi^2}{\phi^4\dot{\phi}^2}\right)dt\right].$$

Con estas funciones métricas, la métrica resulta conforme a varios espacios-tiempo Bianchi (α, l y ϵ son constantes), [30]. El valor de ϵ depende de la curvatura del espacio-tiempo: si el espacio-tiempo tiene curvatura positiva el valor es $+1$, si es plano su valor es 0 y si la curvatura es negativa $\epsilon=-1$. Otros modelos han sido propuestos con campos electromagnéticos no lineales como fuente: en [18] una solución Friedmann-Robertson-Walker homogénea e isotrópica no singular fue obtenida considerando una generalización no lineal de la electrodinámica de Maxwell como fuente; en la Ref. 19 una cosmología de Yang-Mills con una acción de Born-Infeld no abeliana fue investigada.

3. Inflación en espacios Bianchi acoplados con EDNL de BI

Uno de los tópicos de interés dentro del acoplamiento de la NLED y la RG es saber qué tanto la primera de éstas pudiera favorecer o no un escenario inflacionario. El escenario de la inflación cosmológica fue propuesto por Guth [20], y ha sido muy favorecido ya que resuelve algunos de los problemas del modelo estándar de la cosmología. Además, recientemente ganó el apoyo de la evidencia observacional [21]. Los modelos convencionales utilizan campos escalares con un potencial asociado que da lugar a la inflación. Otra propuesta para producir inflación es usar teorías con lagrangianos con una dependencia no convencional de las derivadas de los campos [22]. No hay razón para pensar que en el comienzo del periodo inflacionario en el universo fuera tan isotrópico como se ve hoy en día. Novello *et al*. mostraron que agregar un término adicional a la lagrangiana de Maxwell de campo electromagnético causa la expansión del universo [23].

De hecho, un período de expansión acelerada pudo haber sido el responsable de que el universo, originalmente anisotrópico, se isotropizara. En este sentido, los modelos anisotrópicos más simples son los Bianchi. La inflación en dichos modelos ha sido tratado en la teoría de Einstein-Cartan y con una constante cosmológica [24]. La inflación con un campo de Brans-Dicke en un modelo Bianchi V ha sido estudiado en la Ref. 25; inflación asistida fue investigada en un Bianchi I en la Ref. 26 y en Bianchi VI0 en la Ref. 27. En la Ref. 28 se consideró a la EDNL como el campo dinámico que promueve la inflación en varios modelos Bianchi. Recientemente Novello *et al.* han confirmado que la EDNL podría resolver dos problemas importantes de la relatividad general: la aceleración que actualmente se observa en el universo y las singularidades en la teoría [29].

4. Análisis de la singularidad en espacios Bianchi con EDNL de BI

Los espacios anisotrópicos pero espacialmente homogéneos donde el tensor de energía momento corresponde a un campo electromagnético no lineal libre de fuentes, en particular, EDNL de BI fueron encontrados en la Ref. 17. Estos espaciotiempos incluyen varios casos particulares de espacios Bianchi [28]. En este trabajo, se explicará brevemente la existencia o no de singularidades en estos espacios Bianchi.

Existen varios criterios que nos pueden decir si un espacio-tiempo es singular o no, tales como la divergencia de los invariantes de curvatura. Sin embargo, esto no funciona de manera inversa, es decir, si los invariantes de curvatura no divergen, entonces no se puede asegurar que el espacio-tiempo sea regular, como sucede en los espacios Bianchi estudiados en la Ref. 29.

Hawking y Ellis discutieron espacios Bianchi I y dieron un teorema acerca de las singularidades que ocurren en todos los modelos espacialmente no homogéneos no vacíos en los cuales las condición fuerte de energía (CFE), o tambien conocida como condición de convergencia temporal ($R_{ab}u_a u_b \geq 0$, donde u_a es un vector temporal), se satisface. Sin embargo, la condición de convergencia temporal o CFE no se cumple en el caso de los espacios Bianchi que se estudian aquí. Por lo tanto, la posibilidad de ausencia de singularidades persiste [1].

Así que la prueba que queda por realizar es la del análisis de las geodésicas en dichos espacios Bianchi. La característica común de los espacio-tiempos singulares es la existencia de geodésicas causales incompletas. Generalmente se considera como definición de la ausencia de singularidades la completez geodésica causal (g-completeness), es decir, un observador en caída libre no deja el espacio-tiempo en un tiempo propio finito; equivalentemente, que cada geodésica puede ser extendida a valores arbitrarios de su parámetro afín. Sin embargo, ni aún la completez geodésica garantiza la ausencia de singularidades (ver el contraejemplo dado por Geroch [31]).

La demostración de la completez geodésica no es simple, en la mayoría de los casos debido a la complejidad de las ecuaciones las cuales son no lineales de segundo orden y fuertemente acopladas [32]. Sin embargo, el análisis de la extensión geodésica se puede simplificar cuando existen constantes de movimiento asociadas a los vectores de Killing. El método que se utiliza en este trabajo para analizar la completez es obtener las ecuaciones de primer orden para las derivadas de las coordenadas con respecto de un parámetro afín, usando las constantes de movimiento. Entonces si de alguna forma se logra probar que las primeras derivadas están acotadas, uno puede concluir que las correspondientes curvas geodésicas son completas [33].

En un trabajo reciente [30], se investigan espacio-tiempos con un grupo de isometrías de cuatro dimensiones que contiene un subgrupo de tres dimensiones que actúa transitivamente sobre superficies espaciales, es decir, espacio-tiempos espacialmente homogéneos anisitrópicos en una dirección espacial y se realiza el estudio de la completez geodésica para las soluciones a las ecuaciones de Einstein cuya materia es un campo electromagnético no lineal de Born-Infeld. La métrica incluye como casos particulares varias métricas conformes a varios espacios Bianchi, en particular G_3I, G_3II, G_3III, G_3VIII, G_3IX y Kantowski— Sachs, dependiendo de algunos valores de los parámetros que se encuentran en la métrica original.

Se distinguen dos familias: Bianchi G_3I, G_3III y Kantowski—Sachs por un lado, mientras que por el otro lado se tienen Bianchi G_3II, G_3VIII y G_3IX. Los espacios Bianchi G_3I, G_3III y Kantowski—Sachs sólo admiten una componente del campo electomagnético, ya sea eléctrico o magnético pero no ambos, los cuales pueden intercambiar su rol por una rotación de dualidad. Estos espacios muestran divergencia en sus invariantes a un tiempo finito, más aún, el rango del parámetro afín es finito y, las geodésicas son incompletas. Para el caso en donde $t = 0$ se muestra que aparece una geodésica incompleta en el espacio Bianchi G_3I.

En la segunda familia, es decir en los Bianchi G_3II, G_3VIII y G_3IX, la función que determina todo el comportamiento dinámico de la métrica, resulta ser periódica y acotada, por lo que existen valores de t para los cuales la métrica se vuelve singular. En general, las geodésicas de esta familia son completas, excepto en el caso de G_3II, pero cuando el momento lineal tiene un valor igual a cero, entonces la geodésica puede ser completa, aunque genéricamente en este caso, se puede considerar geodésicamente incompleto. En todos los casos, existen puntos donde aparece una singularidad y, por lo tanto, se procede a hacer una extensión a la variedad. Los resultados que se obtienen es que el caso Bianchi G_3VIII es geodésicamente completo. Para los caso G_3II y G_3IX el análisis no es concluyente. El análisis más completo puede verse en la Ref. 29.

5. Ecuación de Raychaudhuri

El primer resultado concerniente a la predición de singularidades bajo ciertas condiciones físicas se debe a Raychaudhuri, el cual vino a aparecer exactamente el mismo año en que Einstein falleció. En 1955, Raychaudhuri publica lo que se considera como el primer teorema de singularidad y la cual es la base de los desarrollos posteriores de todos los teoremas de singularidad [34]. La ecuación de Raychaudhuri puede ser fácilmente derivada dado que ésta tiene una interpretación geométrica simple. Dicha derivación se presenta en un muy reciente artículo de Dadhich [35].

La ecuación de Raychaudhuri nos dice que la expansión de un haz de geodésicas temporales con vorticidad cero decrecerá monótomamente a lo largo de las geodésicas si, para cualquier vector temporal V^a, $R_{ab}V^aV^b \geq 0$; es decir que se cumple la CFE. Lo anterior significa que el enfocamiento de geodésicas cercanas es inevitable si CFE se satisface.

Con respecto a los espacios Bianchi estudiados en la Ref. 29, se muestra que pueden violan la CFE y este hecho podría explicar por qué existen soluciones libres de singularidad cuando materia de BI se incluye en un universo. Se muestra que en el caso de BI el enfocamiento de geodésicas no ocurre debido al campo electromagnético, mientras que en el caso de campos electromagnéticos de Maxwell la convergencia de trayectorias ocurre y es favorecida por el campo electromagnético.

En el caso de los Bianchi G_3I y G_3II, con ϵ=0 las geodésicas se enfocan en $t = \pi/2$ y, por tanto, tiene una singularidad. Para los casos restantes, donde $\epsilon \neq 0$, la constante b de BI puede ser ajustada para así evitar la convergencia de geodésicas.

En el caso del campo electromagnético lineal de Maxwell, se puede decir que tarde o temprano las geodésicas se enfocarán, es decir que no se pueden evitar las singularidades.

Agradecimientos

Se agradece a Nora Bretón por sus apreciables y fructíferas conversaciones, así como sus aportaciones para la escritura de este trabajo. De la misma forma a Claudia Moreno y Aarón V. B. Arellano por la revisión de este manuscrito. Finalmente a Lorena Ramírez, por su constante apoyo y cariño.

1. S. Hawking and G. Ellis. *The large scale structure of space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1978).
2. J.M.M. Senovilla (2006) [arXiv:physics/0605007].
3. A.E. Shabad and V.V. Usov, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 180401.
4. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1975).
5. M. Born and L. Infeld, *Nature* **132** (1933) 970; M. Born and L. Infeld, *Proc. Roy. Soc. London A* **144** (1934) 425.
6. W. Heisenberg and H. Euler, *Z. Phys.* **98** (1936) 714.
7. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82** (1951) 664.
8. E. Ayón-Beato and A. García, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 5056; M. Cataldo and A. García, *Gen. Rel. Grav.* **31** (1999) 629 [arXiv:gr-gc/9911084].
9. K. A. Bronnikov *Phys. Rev. D* **63** (2001) 044005 [arXiv:gr-qc/0006014].
10. I. Dymnikova, *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 4417 [arXiv:gr-qc/0407072].
11. N. Breton, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 044015 [arXiv:hep-th/0502217].
12. P.O. Mazur and E. Mottola (2001) [arXiv:gr-qc/0109035]; M. Visser and D.L. Wiltshire *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 1135 [arXiv:gr-qc/0310107].
13. N. Bilíc, G.B. Tupper, and R.D. Viollier, *JCAP* **0602** (2006) 013 [arXiv:astro-ph/0503427].
14. M.S. Morris and K.S. Thorne, *Am.J.Phys.* **56**(1988) 395.
15. K.A. Bronnikov and S.V. Grinyok, *Grav. Cosmol.***11** (2006) 75 [arXiv:gr-qc/0509062].
16. A.V.B. Arellano and F.S.N. Lobo, *Class. Quantum Grav.* **23** (2006) 7229, [arXiv:gr-qc/0604095].
17. R. García-Salcedo and N. Bretón, *Int. J. Mod. Phys. A* **15** (2000) 4341.
18. V.A. De Lorenci, R. Klippert, M. Novello, and J.S. Salim, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 063501.
19. V.V. Dyadichev, D.V. Galtsov, A.G. Zorin, and M. Yu Zotov, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 084007.
20. A. Guth, *Phys. Rev. D* **23** (1981) 347.
21. P. De Bernardis *et al.*, *Nature* 404 (2000) 955
22. B.L. Altshuler, *Class. Quantum Grav.* **7** (1990) 189.
23. M. Novello, S.E. Perez Bergliaffa, and J. Salim.(2003) [arXiv:astro-ph/0312093].
24. L. Jensen and J. Stein-Schabes, *Phys. Rev. D* **35** (1987) 1146; M. Demianski, R. de Ritis, G. Platania, P. Scudellaro, and C. Stornaiolo, *Phys. Rev. D* **35** (1987) 1181.
25. J.L. Cervantes-Cota, *Class. Quantum Grav.* **16** (1999) 3903
26. J.M. Aguirregabiria, A. Chamorro, L.P. Chimento, and M. Zuccala, *Phys. Rev.* **D62** (2000) 084029
27. J.M. Aguirregabiria, P. Labraga, and R. Lazkoz, *Gen. Rel. Grav.* **34** (2002) 341

28. R. García-Salcedo and N. Bretón, *Class. Quant. Grav.* **20** (2003) 5425 [arXiv:hep-th/ 0212130].
29. M. Novello, E. Goulart, J.M. Salim, and S.E. Perez Bergliaffa, *Class Quantum Grav.* **24** (2007) 3021.
30. R. García-Salcedo and N. Bretón, *Class. Quantum Grav.* **22** (2005) 4783.
31. R. Geroch, *Ann. Phys.* **48** (1968) 526.
32. J.M.M. Senovilla *Gen. Rel. Grav.* **30** (1988) 5701.
33. V.I. Arnold, *Ordinary Differential Equations* (Cambridge, MA: MIT Press, 1990)
34. A.K. Raychaudhuri, *Phys. Rev.* **98**(1955) 1123.
35. N. Dadhich (2005) [arXiv:gr-qc/0511123]