

Determinación del espín de agujeros negros

L.M. Fernández-Hernández y L.A. Ureña-López
Instituto de Física de la Universidad de Guanajuato,
37150, León, Guanajuato, México,
e-mail: lizabeth@fisica.ugto.mx, lurena@fisica.ugto.mx

Recibido el 1 de mayo de 2006; aceptado el 1 de noviembre de 2006

Presentamos un resumen de la teoría detrás de los modelos de discos de acreción alrededor de agujeros negros. Asumiendo perturbaciones lineales, se encuentran dos modos principales de vibración del disco de acreción, que producen modulación del flujo de rayos X emitidos por el mismo. Se muestra la determinación de la masa y el espín para un ejemplo concreto de un candidato a agujero negro.

Descriptores: Agujeros negros; discos de acreción.

We present a summary of the theory of accretion disks around black holes. In the regime of linear perturbation, we find the normal modes of vibration of the accretion disk that modulate the emission of X-ray bursts. An example is shown for the determination of the mass and spin of a particular black hole candidate.

Keywords: Black holes; accretion disks.

PACS: 97.60.Lf; 04.70.-s

1. Introducción

Cuando una estrella cumple su ciclo de *vida*, la presión de radiación producida por la fusión nuclear no puede más contrarrestar la atracción de la fuerza gravitatoria, por lo que la estrella colapsaⁱ. Dependiendo de las propiedades de la estrella tales como su tamaño, su masa, etc., ella podrá colapsar y convertirse en algún otro tipo de objeto celeste: enana blanca, enana café, estrella de neutrones, etc. El caso extremo es el colapso en lo que llamamos un *agujero negro* [1-3].

Los agujeros negros son objetos difíciles de observar, ya que en principio no emiten radiación electromagnética directamenteⁱⁱ. Existen, sin embargo, varios indicios que pueden llevar a la observación indirecta de un agujero negro[4].

El propósito del presente artículo es presentar la teoría básica detrás de las observaciones de la radiación intensa de rayos X que, según creemos, proviene del *disco de acreción* de materia que se presenta alrededor de ciertos candidatos a ser agujeros negros[5]. Esto es de particular importancia, ya que se estima que la región donde son generados los rayos X se encuentra a sólo algunos radios de Schwarzschild del agujero negro en cuestión.

Para esclarecer las propiedades básicas de los agujeros negros, comenzaremos en la Sec. 2 con el caso más sencillo, el agujero negro (estático) de Schwarzschild. En la Sec. 3, estudiaremos los agujeros negros rotantes, que son caracterizados por la métrica de Kerr.

En la Sec. 4, presentaremos los modelos de disco de acreción alrededor de un agujero negro de Kerr. El objetivo principal será encontrar las eigenfrecuencias del movimiento de perturbaciones lineales de la materia en el disco. Por último, en la Sec. 5, revisaremos la conexión existente entre teoría y observaciones, y presentaremos las conclusiones generales del trabajo.

2. Agujeros negros de Schwarzschild

La métrica de Schwarzschild describe el espaciotiempo exterior a una configuración esférica y estática de masa. Utilizando coordenadas esféricas la escribimos como

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \alpha^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1)$$

donde $\alpha = 1 - r_h/r$. La cantidad $r_h \equiv (2GM/c^2)$ es conocida como *radio de Schwarzschild*, donde M representa la masa total del objeto central, y G es la constante de gravitación. Notemos que para radios $r > r_h$, la métrica (1) se encuentra bien definida.

Para $r = r_h$, el término g_{rr} de la métrica se indefinir. De manera general, a la superficie donde $g_{tt} = 0$ se le llama *superficie de corrimiento al rojo infinito*. Por otro lado, la superficie para la cual g_{rr} se indetermina, es generalmente llamada el *horizonte de eventos*. En el caso de la métrica de Schwarzschild, los papeles de superficie de corrimiento al rojo infinito y horizonte de eventos son jugados por la misma superficie, aunque ésta no es una regla general.

Para estudiar la dinámica de partículas de prueba masivas en el espaciotiempo (1), es conveniente definir el Lagrangiano de geodésicas como $\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -c^2$ [6], donde el punto significa derivada respecto al tiempo propio τ .

El Lagrangiano \mathcal{L} no depende explícitamente de las variables t y φ , de lo cual inferimos que los correspondientes momentos canónicos, $\epsilon = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{t}$ y $A = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi}$, son constantes de movimiento. De esta manera, la ecuación de movimiento de las partículas de prueba que se obtiene directamente del Lagrangiano es

$$\dot{r}^2 + \alpha r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{\epsilon^2}{c^2} = \frac{c^2 (r_h - r)}{r^3} \left(r^2 + \frac{A^2}{c^2 \sin^2\theta} \right), \quad (2)$$

donde la parte derecha define al potencial gravitatorio efectivo $V(r)$.

Las órbitas circulares se corresponden con los mínimos de $V(r)$. Los valores de equilibrio que se obtienen son entonces $\theta_0 = (\pi/2)$, y

$$r_0 = \frac{A^2}{2GM} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{A^2} \frac{12G^2M^2}{c^2}} \right). \quad (3)$$

Para encontrar las eigenfrecuencias del movimiento linealmente perturbado de una partícula masiva en una órbita circular, hacemos un análisis de pequeñas oscilaciones alrededor de los valores de equilibrio (θ_0, r_0) [7,8]. Las eigenfrecuencias obtenidas son

$$w_1^2 = \frac{A^2}{r_0^4}, \quad w_2^2 = \frac{A^2}{r_0^4} - \frac{6A^2GM}{c^2 r_0^5}, \quad (4)$$

donde $A^2 = GM r_0 (1 - 3GM/(c^2 r_0))^{-1}$, ver Ec. (3). En este caso, w_1^2 corresponde a la frecuencia radial y w_2^2 a la frecuencia azimutal. Otra frecuencia típica del sistema es la orbital, dada por $\Omega = d\varphi/dt = (GM/r_0^3)^{1/2}$, la cual coincide con el cálculo Newtoniano.

También de la Ec. (3) se observa que para valores de $A^2 < (12G^2M^2/c^2)$, el radio r_0 no está definido, lo cual indica un cambio cualitativo en la forma de la curva del potencial. Es decir, existe un valor mínimo para A^2 , y en consecuencia, existe también un valor mínimo para r_0 . Esto es lo que define el llamado radio de la órbita circular estable más pequeña (ISCO, por las siglas en inglés de *innermost stable circular orbit*), el cual es $r_{ISCO} = 3r_h$.

3. Agujeros negros de Kerr

Para analizar el espaciotiempo de un agujero negro rotante, es conveniente comenzar con la métrica de Kerr

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (5)$$

donde $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$. Además de la masa total del objeto central, M , aparece un nuevo parámetro a , que es conocido como el *momento angular por unidad de masa* ⁱⁱⁱ.

Para la métrica (5), el horizonte de eventos ocurre cuando $\Delta = 0$, entonces el radio r_+ correspondiente es

$$r_+ = M + (M^2 - a^2)^{1/2}. \quad (6)$$

Tomando que $0 \leq a \leq M$, entonces $r_+ \in [r_h/2, r_h]$.

Por otro lado, la superficie donde $g_{tt} = 0$ yace fuera del horizonte de eventos, y ésta es llamada la *ergoesfera* o superficie del *límite estático*, con radio

$$r_0 = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (7)$$

Las órbitas de partículas de prueba masivas en la métrica (5) son descritas por tres constantes de movimiento. Estas cantidades conservadas son $E = -\partial\mathcal{L}/\partial\dot{t}$, $L = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi}$, y

$$Q = p_\theta^2 + \cos^2 \theta \left[a^2(\mu^2 - E^2) + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right],$$

donde μ es la masa en reposo de la partícula prueba ($\mu = 0$ para fotones), E es la energía total de la partícula prueba, L es la proyección del momento angular de una partícula sobre el eje de rotación del agujero negro, y Q es una integral de movimiento encontrada por Carter en la Ref. 9.

Las ecuaciones que gobiernan la trayectoria orbital de las partículas son

$$\Sigma \frac{dr}{d\lambda} = \pm (V_r)^{1/2}, \quad (8)$$

$$\Sigma \frac{d\theta}{d\lambda} = \pm (V_\theta)^{1/2}, \quad (9)$$

$$\Sigma \frac{d\varphi}{d\lambda} = - \left(aE - \frac{L}{\sin^2 \theta} \right) + \frac{aT}{\Delta}, \quad (10)$$

$$\Sigma \frac{dt}{d\lambda} = -a(aE \sin^2 \theta - L) + (r^2 + a^2) \frac{T}{\Delta}, \quad (11)$$

donde λ es un parámetro afín, y además

$$T \equiv E(r^2 + a^2) - La, \quad (12)$$

$$V_r \equiv T^2 - \Delta \left[\mu^2 r^2 + (L - aE)^2 + Q \right], \quad (13)$$

$$V_\theta \equiv Q - \cos^2 \theta \left[a^2(\mu^2 - E^2) + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right]. \quad (14)$$

Para órbitas circulares, se deben cumplir las condiciones $V_r(r) = 0$ y $V_r'(r) = 0$ (donde $' \equiv \partial_r$), que al resolverlas simultáneamente para E y L , se obtiene

$$\frac{E}{\mu} = \frac{r^{3/2} - 2Mr^{1/2} \pm aM^{1/2}}{r^{3/4}(r^{3/2} - 3Mr^{1/2} \pm 2aM^{1/2})^{1/2}}, \quad (15)$$

$$\frac{L}{\mu} = \frac{\pm M^{1/2}(r^2 \mp 2aM^{1/2}r^{1/2} + a^2)}{r^{3/4}(r^{3/2} - 3Mr^{1/2} \pm 2aM^{1/2})^{1/2}}. \quad (16)$$

El signo superior se refiere a órbitas directas y el signo inferior se refiere a órbitas retrógradas [10].

Ya que no todas las órbitas circulares son estables para cualquier valor de r , es necesario que $V_r'' \leq 0$, lo cual equivale a

$$r^2 - 6Mr \pm 8aM^{1/2}r^{1/2} - 3a^2 \geq 0, \quad (17)$$

ó $r \geq r_{ISCO}$, donde r_{ISCO} separa a las órbitas circulares estables de las inestables, y viene dado por

$$r_{ISCO} = M \{ 3 + Z_2 \mp [(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)]^{1/2} \}, \quad (18)$$

donde además

$$Z_1 = 1 + \left(1 - \frac{a^2}{M^2} \right)^{\frac{1}{3}} \left[\left(1 + \frac{a}{M} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 - \frac{a}{M} \right)^{\frac{1}{3}} \right],$$

$$Z_2^2 = (3a^2/M^2) + Z_1^2. \quad (19)$$

4. Disco de acreción

Con el fin de encontrar los modos de oscilación observados experimentalmente, es necesario considerar un disco de acreción estacionario y axialmente simétrico. La materia en este disco puede ser tratada como un fluido perfecto, $T^{\alpha\gamma} = \rho u^\alpha u^\gamma + p q^{\alpha\gamma}$, donde ρ es la densidad de energía, p es la presión, u^α es la 4-velocidad del fluido, y $q^{\alpha\gamma} = g^{\alpha\gamma} + u^\alpha u^\gamma$.

Escribimos la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist de la forma

$$ds^2 = -\frac{r^2 \Delta^*}{A^*} dt^2 + \frac{A^*}{r^2} (d\phi - \tilde{\omega} dt)^2 + \frac{r^2}{\Delta^*} dr^2 + dz^2, \quad (20)$$

con $\Delta^* \equiv r^2 - 2r + a^2$, $A^* \equiv r^4 + r^2 a^2 + 2ra^2$, y $\tilde{\omega} \equiv (2ar/A^*)$. Las partículas se moverán sobre el plano ecuatorial con una 4-velocidad $u^\alpha = \beta(t^\alpha + \Omega \varphi^\alpha)$, donde $\beta = dt/ds$, $\Omega = d\phi/dt$, φ^α y t^α son las componentes del vector de Killing.

Consideremos ahora las ecuaciones linealizadas para las perturbaciones Eulerianas $\delta\rho$, $\delta p (\ll \delta\rho)$ y δu^α . Por lo tanto, las leyes de conservación de energía, $u_\mu \nabla_\alpha T^{\alpha\mu} = 0$, y las ecuaciones de movimiento de Euler perturbadas, $q^\alpha_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, a primer orden son, respectivamente,

$$u^\alpha \nabla_\alpha \delta\rho + \delta \hat{u}^\alpha \nabla_\alpha \rho + \rho \nabla_\alpha \delta \hat{u}^\alpha = 0, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \rho (q^\alpha_\mu u^\nu \nabla_\nu \delta \hat{u}^\mu + \delta \hat{u}^\mu \nabla_\mu u^\alpha) \\ = -\delta\rho u^\mu \nabla_\mu u^\alpha - q^{\alpha\mu} \nabla_\mu \delta p, \end{aligned} \quad (22)$$

donde $\delta \hat{u}^\alpha = q^\alpha_\mu \delta u^\mu$, $u_\alpha \delta u^\alpha = 0$ (hemos asumido que el disco es delgado y que $p + \rho \approx \rho$). Asumimos que la entropía específica de un elemento del fluido permanece inalterada conforme evoluciona, es decir, $\Delta p = (p\Gamma/\rho) \Delta\rho$, donde Γ es una función arbitraria estacionaria y axialmente simétrica en el equilibrio del fluido.

Las perturbaciones Lagrangianas están relacionadas con sus contrapartes Eulerianas por las ecuaciones $\Delta p = \delta p + \xi^\alpha \nabla_\alpha p$ y $\Delta\rho = \delta\rho + \xi^\alpha \nabla_\alpha \rho$, mientras que para la velocidad perturbada tenemos

$$\delta \hat{u}^\alpha = q^\alpha_\mu (u^\nu \nabla_\nu \xi^\mu - \xi^\nu \nabla_\nu u^\mu). \quad (23)$$

Asumimos ahora que todas las cantidades de perturbación Euleriana tienen dependencia temporal y azimutal, es decir, $\xi^\alpha = \xi^{*\alpha}(r, z) e^{i(m\phi + \sigma t)}$, donde $\omega(r, z) = \sigma + m\Omega$ es la frecuencia corrotante y $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, de esta forma

$$\delta \hat{u}^\alpha = \left(q^\alpha_\mu + \frac{i}{\omega} q^\alpha_\nu \varphi^\nu \nabla_\mu \Omega \right) i\beta \omega \xi^\mu. \quad (24)$$

Después de cierto tratamiento algebraico obtenemos

$$\xi^\alpha = -\frac{i}{\beta\omega} \left[q^\alpha_\mu - \frac{i}{\omega} q^\alpha_\nu \varphi^\nu \nabla_\mu \Omega \right] \delta \hat{u}^\mu, \quad (25)$$

donde hemos fijado la norma en ξ^α haciendo $\xi^\alpha u_\alpha = 0$.

Por otro lado, de las Ecs. (23) y (25), y de la definición de perturbación Euleriana obtenemos

$$\delta\rho = \rho^2 \left(\frac{\delta U}{\Gamma\rho} + \frac{i}{\omega\beta} A_\alpha \delta \hat{u}^\alpha \right), \quad (26)$$

donde $p \ll \rho$, δU es un potencial escalar definido como $\delta U = \delta p/\rho$ y $A_\alpha = \nabla_\alpha \rho/\rho^2 - (1/\rho p\Gamma) \nabla_\alpha p$.

Por otro lado, usando la Ec. (26), y la definición de potencial escalar, podemos transformar la Ec. (21) en

$$\nabla_\alpha [\rho Q^{\alpha\beta} \nabla_\beta \delta U] - Q^{\alpha\beta} \nabla_\alpha p \nabla_\beta \delta U + \Psi \delta U = 0, \quad (27)$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi = \rho^2 \left(\frac{\omega\beta}{p\Gamma} - \rho A_\alpha Q^{\alpha\beta} A_\beta \right) + \nabla_\alpha [\rho^2 Q^{\alpha\beta} A_\beta] \\ - \rho Q^{\alpha\beta} \nabla_\alpha p A_\beta + \frac{i\rho^2}{\sigma\beta} (m + \omega\beta u^\alpha \varphi_\alpha) (Q^{\beta\mu} \\ - Q^{\mu\beta}) \hat{\varphi}_\beta A_\mu. \end{aligned} \quad (28)$$

Aquí, $\hat{\varphi}^\alpha = q^{\alpha\beta} \varphi_\beta / \sigma\beta$ es la combinación lineal de los campos de Killing y

$$Q_{\alpha\beta}^{-1} = \omega\beta q_{\alpha\beta} - 2iq_\beta^\mu \nabla_\mu u_\alpha + i\beta q_{\alpha\mu} \varphi^\mu \nabla_\beta \Omega - \frac{1}{\omega\beta} \nabla_\alpha p A_\beta.$$

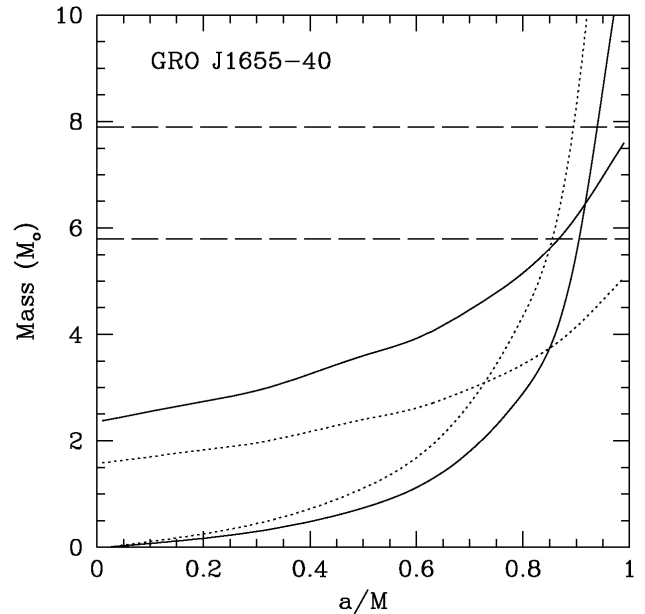


FIGURA 1. La intersección de las líneas sólidas corresponden a la masa y el espín de un candidato a agujero negro, ver Ref. 4, para el cual se han identificado las frecuencias de 450 Hz y 300 Hz QPOs como los modos c y g mencionados en el texto. Las líneas horizontales delimitan el rango de masa determinado dinámicamente. De acuerdo con la figura, el espín del agujero negro es $a/M \sim 0.9$. Las líneas punteadas corresponden al caso en que se han intercambiado los valores de los modos; nótese entonces que la intersección de las mismas está afuera del intervalo estimado para la masa.

En este momento es necesario introducir la métrica $h^{\alpha\beta} = q^{\alpha\beta} - \hat{\varphi}^\alpha \hat{\varphi}^\beta$, de esta manera, de la Ec. (27), obtenemos

$$D_\mu \left[(\Delta^*)^{1/2} \rho H^{\mu\nu} D_\nu \delta V \right] + (\Delta^*)^{1/2} \omega_\beta \Phi \delta V = 0, \quad (29)$$

donde D_α es la derivada covariante asociada con la métrica $h^{\alpha\beta}$, las cuales actúan, por ejemplo, sobre escalares como $D_\alpha f = h^\beta_\alpha \nabla_\beta f$. $\delta V = \delta U / \omega_\beta$ es la perturbación del potencial reescalado,

$$H^{rr} = g^{rr} \omega^2 (\omega^2 - \kappa^2)^{-1}, \quad H^{zz} = \omega^2 (\omega^2 - N_z^2)^{-1} \quad (30)$$

siendo H^{rz} despreciable para discos delgados, κ^2 es la frecuencia epicíclica radial y N_z^2 es la frecuencia de Brunt Väisälä, veáanse en la Ref. 5. Utilizando el método WKB, transformamos la Ec. (29) en

$$0 = g^{rr} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{(\omega^2 - \kappa^2)} \frac{\partial \delta V}{\partial r} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\rho}{(\omega^2 - N_z^2)} \frac{\partial \delta V}{\partial z} \right] + \left\{ \frac{\beta^2}{c_s^2} + \frac{1}{p^{1/\Gamma}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{p^{1/\Gamma}}{(\omega^2 - N_z^2)} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z} \right] \right\} \delta V. \quad (31)$$

Proponemos la siguiente solución $\delta V = V_r(r) V_\eta(r, \eta)$, donde $\eta = z/h(r)$ y V_η es una función de r que varía lentamente, obteniendo así, dos ecuaciones separadas

$$0 = \frac{d^2 V_r}{dr^2} - \frac{1}{(\omega^2 - \kappa^2)} \frac{d}{dr} (\omega^2 - \kappa^2) \frac{dV_r}{dr} + \alpha^2 (\omega^2 - \kappa^2) \left(1 - \frac{\Psi}{\omega_*^2} \right) V_r, \quad (32)$$

$$0 = \frac{d^2 V_\eta}{d\eta^2} - \left(\frac{\eta}{\Gamma g} - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \eta} + \Xi \right) \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} + \frac{\omega_*^2}{\Gamma g} V_\eta + \left[\frac{\Psi - \omega_*^2}{\Gamma} \left(1 + \frac{\eta}{\omega_*^2} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial \eta^2} - \Xi \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \eta} \right] V_\eta, \quad (33)$$

donde $\omega_* \equiv \omega / \Omega_\perp$, ω_\perp es la frecuencia epicíclica vertical[5], y

$$\alpha^2 = \frac{g_{rr}}{\Gamma h^2 \Omega_\perp^2}, \quad \Xi \equiv \Re \left(\eta \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \eta} \right) \\ \Re \equiv \frac{\Omega_\perp^2}{\omega^2 - N_z^2}.$$

5. Mediciones y conclusiones generales

La medición del espín de un agujero negro puede ser hecha identificando las dos QPOs (Quasi-Periodic Oscillations) observadas en las frecuencias de los modos lineales de vibración de los flujos de acreción. En particular, se han identificado tres tipos de modos como fuentes potenciales de variabilidad cuasi-periódica.

- Modos g: Estos son los modos de inercia-gravedad, que ocurren a una frecuencia $f_g \approx \kappa_m \pm m \Omega_m$. Se encuentran en aquellos valores de la función de separación Ψ que satisfacen $\Psi > \omega_*^2$, y los cuales corresponden a $\kappa^2 > \omega^2$.
- Modos c: Estos son los modos de corrugación que ocurren a una frecuencia $f_c \approx \Omega - \Omega_\perp$. Para encontrarlos, es necesario que la Ec. (32) cumpla con $\Psi = \omega_*^2$ en al menos en un valor del radio.
- Modos p: Estos son los modos de inercia-acústica y no se espera que produzcan modulación significativa en el flujo de rayos-X.

Si se identifican dos frecuencias de QPO correspondientes a dos diferentes modos, se puede determinar un único par de valores de la masa y del espín para el agujero negro. Esto se ilustra para un ejemplo particular en la Fig. 1.

La existencia de agujeros negros es predicha por la Relatividad General de Einstein. Pero la existencia real de estos objetos aún está bajo riguroso escrutinio, ya que se cuenta hasta ahora con evidencia indirecta. Sin embargo, se espera que la presencia de un horizonte de eventos, una característica fundamental de los hoyos negros, pueda ser detectada en el futuro próximo[11].

Acknowledgments

LMF-H agradece las becas de maestría otorgadas por CONACYT y CONCYTEG. Otros apoyos parciales para este trabajo son: los proyectos CONACYT (42748, 46195 y 47641); CONCYTEG (05-16-K117-032); PROMEP (UGTO-CA-3) y DINPO (000085).

- i Este es una versión muy simplificada del ciclo de vida de una estrella. Información más detallada puede consultarse en las Refs. 1 y 3.
- ii Mención aparte merece la llamada Radiación de Hawking, la cual puede llevar a la evaporación de un agujero negro. Sin embargo, esto sería un fenómeno importante sólo en agujeros negros de poca masa [12].
- iii Nótese que hemos elegido unidades tales que $G=c=1$.

1. S.L. Shapiro y S.A. Teukolsky, *Blackholes, whitedwarfs, and*

neutronstars: The physics of compact objects (New York, USA: Wiley, 1983) p. 645.

- 2. C.W. Misner, K.S. Thorne y J.A. Wheeler, *Gravitation* (San Francisco: Freeman, 1973) p. 1279.
- 3. S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of blackholes* (Oxford, UK: Clarendon, 1992) p. 646.
- 4. D. Psaltis, *AIPConf. Proc.* **714** (2004) 29, astro-ph/0402213.
- 5. C.A. Perez, A.S. Silbergleit, R.V. Wagoner y D.E. Lehr (1996), astro-ph/9601146.

6. B.F. Schutz, *A first course in general relativity* (Cambridge, Uk:Univ.Pr., 1985) p. 376.
7. H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley: Reading Massachusetts, 1980).
8. L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Course of theoretical physics: Mechanics*, Third Edition (Pergamon Press., 1976).
9. B. Carter, *Phys. Rev.* **174** (1968) 1559.
10. J.M. Bardeen, W.H. Press y S.A. Teukolsky, *Astro-phys.J.* **178** (1972) 347.
11. R. Narayan (2003), astro-ph/0310692.
12. N.D. Birrell y P.C.W. Davies, *Quantum fields in curved space* (Cambridge, Uk:Univ.Pr., 1982) p. 340.