El problema del tiempo en la relatividad general

Merced Montesinos*
Departamento de Física, Cinvestav,
Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, San Pedro Zacatenco, 07360,
Gustavo A. Madero, Ciudad de México, México,
e-mail: merced@fis.cinvestav.mx.

Recibido el 18 de julio de 2005; aceptado el 14 de marzo de 2005

Se introduce al lector en el llamado "problema del tiempo" inherente a la relatividad general. Se realiza primero una revisión de los fundamentos conceptuales de la relatividad especial y general con el fin de fijar las bases conceptuales y técnicas necesarias para la descripción del "problema del tiempo". Una vez hecho lo anterior, se enfatiza el hecho de que en el contexto de la relatividad general las coordenadas (o el atlas $\mathcal{A}$) que etiquetan los puntos de la variedad no tienen siginificado físico *per se* y que este hecho requiere una forma (distinta de la que se usa en la relatividad especial) de describir la evolución de las variables dinámicas involucradas en una forma compatible con la covarianza bajo difeomorfismos de la teoría.

Descriptores: Problema del tiempo; evolución relacional; observador.

The reader is introduced to "the problem of time" present inherently in general relativity. A review of the conceptual fundamentals of both special and general relativity is done with the aim of fixing the conceptual and technical bases required to make the description of the "problem of time". Once this done, it is emphasized the fact that in the context of general relativity the coordinates (or better, the atlas $\mathcal{A}$) which label the points of the manifold do not have *per se* physical meaning and that this fact requires a suitable form (distinct to the one used in special relativity) of describing the evolution of the degrees of freedom of the dynamical variables involved in a way compatible with the diffeomorphism covariance of the theory.

Keywords: The problem of time; relational evolution; observer.

PACS: 04.20.-q; 04.20.Cv

1. Introducción

Se puede decir, sin exagerar, que la teoría general de la relatividad del movimiento exhibe naturalmente el hecho de que ciertos conceptos físicos fundamentales, empleados en la formulación de las leyes de la naturaleza, que se habían aceptados como correctos en el contexto de la relatividad especial, simplemente dejan de tener validez en el contexto de la relatividad general. Como su nombre lo indica, la relatividad general *no* es únicamente una teoría que provea las nociones necesarias para la descripción del campo gravitacional. En particular, las bases conceptuales sobre los cuales yace la teoría implican que la forma en que debe entenderse la dinámica en ésta sea completamente distinta de la forma en que se entiende en la relatividad especial. Es la *comparación* de las formas de entender la dinámica en ambas teorías lo que da origen al *problema del tiempo* en la relatividad general. De hecho, el problema del tiempo no es una particularidad de la relatividad general únicamente sino de toda teoría covariante bajo difeomorfismos. Basta pues hacer la descripción del caso de la relatividad general para familiarizarse con la esencia del hecho.

La covarianza bajo difeomorfismos de la relatividad general está íntimamente relacionada con la noción de "observador". En la mecánica newtoniana, en la relatividad especial, en la mecánica cuántica no relativista y en la mecánica cuántica relativista el "observador" es un elemento ajeno al "sistema"que "observa.ªl "sistema". En el contexto conceptual de cada una de las cuatro teorías mencionadas, la existencia del observador se establece de manera verbal únicamente. El observador "está incluido" en el formalismo de cada teoría únicamente por afirmación. Se trata de un "observador ideal" en el sentido de que su dinámica *no* está incorporada dentro de los diversos formalismos previamente mencionados. Su aparente presencia se establece por decreto bajo el pretexto de que "no contribuye a la dinámica del sistema". Estas situaciones constituyen una idealización, que no corresponde a la realidad desde un punto de vista conceptual, puesto que todo observador está hecho de materia.

El lector pragmático podría decir que se está adoptando una posición fundamentalista para hacer la descripción de los fenómenos físicos... y se equivocaría. Al analizar los límites de aplicabilidad de una teoría física no se pueden dar concesiones, mucho menos de carácter conceptual, como en el caso que nos ocupa.

Volviendo al papel del observador, digámoslo claramente. En el contexto conceptual de la relatividad general, la dinámica del observador no puede soslayarse, no puede omitirse, no se puede establecer una distinción entre "sistema" y "observador" pues existe una *sola entidad dinámica*. Lo más que está permitido, dentro de los límites conceptuales de la teoría, es hacer una descripción de una parte de esta entidad dinámica respecto de la parte restante de la misma, división que es, por lo demás, arbitraria y que da origen a la descripción relacional de la física, siendo la evolución relacional de los grados de libertad de un sistema sólo un caso particular, correspondiente a la visión relacionista de la dinámica. La evolución relacional es conceptualmente compatible con la covarianza bajo difeomorfismos de la relatividad general. El hecho de que las bases conceptuales de la relatividad general *no* permitan la existencia de estructuras (materiales) de referencia fijas, es decir, sin dinámica, no tiene parangón en la física previa a la relatividad general. Este hecho, a su vez, coloca a todos los campos materiales (incluyendo el campo gravitacional en el término materia) en el mismo *status ontológico*.

De hecho, la relatividad general está basada en la observación de que todo lo que existe en el universo son campos de materia, independientemente de la manifestación concreta de estos campos. No existe "espacio" ni "tiempo" *a priori*, *i.e.*, sin la presencia de materia. La materia da origen, por decirlo así, a las nociones de tiempo y espacio. Los campos de materia no existen en el "espacio" y "tiempo", sino que la existencia objetiva de ésta genera tales nociones. El aspecto fundamental es simplemente la existencia de la materia. La variedad y las coordenadas, que etiquetan los puntos de ésta, son sólo herramientas auxiliares en la descripción de los fenómenos físicos, y deben ser eliminados cuando se requiera hacer predicciones de la teoría compatibles con la covarianza bajo difeomorfismos de la relatividad general.

Con base en lo anteriormente expresado, el "problema del tiempo" en la relatividad general *no* es en sí un problema en el contexto de la teoría, sino una propiedad, una característica de la misma. Se presenta como un "problema" cuando se pretende, erróneamente, asociar esta característica de la teoría con nociones que se encuentran fuera de la estructura conceptual de la misma. De esta forma, para disminuir al mínimo las posibles interpretaciones erróneas, he decidido explicar ciertas nociones, que son familiares a los investigadores involucrados con la relatividad general, pero cuya exposición resulta necesaria en aras de la claridad y completez del tema del presente artículo, el cual está dirigido a estudiantes.

2. Relatividad especial

La esencia de la teoría especial de la relatividad del movimiento o, simplemente, relatividad especial, *no* se expresa diciendo que el movimiento es relativo sino es aquella contenida en las observaciones siguientes:

1. La rapidez de propagación de la luz en el vacío, c, es *absoluta*, *i.e.*, es la misma para todos los observadores inerciales.

2. Las leyes de la física deben ser covariantes (invariantes de forma) bajo transformaciones (de Lorentz) entre los sistemas de referencia inerciales, *i.e*, la covarianza es *absoluta*.

Es un hecho notable que la reestructuración, por parte de Einstein, de la mecánica newtoniana haya sido el reemplazo de los dos entes absolutos de esa formulación, la *aceleración* $\vec{a}$ y el *tiempo newtoniano* t, por dos nuevos *entes absolutos* en la teoría de la relatividad especial, que son los listados en los puntos 1 y 2 anteriores. En efecto, en la mecánica newtoniana se tiene

$$t = t' , \quad \vec{a} = \vec{a'}, \tag{1}$$

donde las primas se refieren al sistema de referencia inercial S' y las cantidades sin primas al sistema de referencia inercial S. Dicho de otra forma, tanto la mecánica de Newton como la relatividad especial tienen entes absolutos en su formulación, la diferencia entre ambas reside en que los entes absolutos de la Ec. (1) contradicen la experiencia, mientras que los entes absolutos de los puntos 1 y 2 tienen, en cierto régimen de aplicabilidad, sustento experimental.

Para proseguir conviene definir el espacio-tiempo de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \eta)$. Se trata del conjunto $\mathbb{R}^4$ dotado de una estructura de variedad y una estructura métrica $\eta = -d(ct)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Basta elegir una 4-carta $(\mathbb{R}^4, Id)$ para "cubrir"todo $\mathbb{R}^4$. El atlas $\mathcal{A}$ está formado por todas las 4-cartas compatibles con tal 4-carta [1]. De esta forma $(x^\mu) = (ct, x, y, z)$ son coordenadas que etiquetan (globalmente) los puntos o eventos p del espacio-tiempo de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \eta)$. El "observador inercial" es toda una red de relojes colocados en todo el espacio (véase, por ejemplo, la Ref. 2). Esta serie de relojes son de prueba y a pesar de estar hechos de materia su contenido material *no* afecta, por hipótesis y consistencia de la relatividad especial, el espacio-tiempo de Minkowski.

2.1. La "obra de teatro" y el "escenario"

Aún cuando la relatividad especial difiere radicalmente de la mecánica newtoniana, la primera tiene la característica de que la métrica de Minkowski η está fija, no es determinada por la materia en forma alguna. En el marco conceptual de la relatividad especial, da lo mismo desde el punto de vista teórico si una partícula se encuentra en la vecindad de una hormiga o de una estrella supermasiva, no importa la magnitud de la masa, pues ésta no afecta al espacio-tiempo de Minkowski, las relaciones causales no se ven afectadas por la presencia de materia, independientemente de la naturaleza de esta última. De esta forma sólo los campos materiales, denotados genéricamente por ϕ, a diferencia de la métrica, son entes dinámicos, y su dinámica viene dada por alguna acción

$$S_{matter}[\phi] = \int \mathcal{L}_{matter}[\phi], \tag{2}$$

invariante bajo transformaciones de Lorentz, la cual proporciona las ecuaciones de movimiento

$$\mathcal{E}[\phi] = 0, \tag{3}$$

de los campos materiales ϕ. De esta forma, el espacio-tiempo de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \eta)$ es un "escenario" fijo donde los campos de materia ϕ existen representando la "obra de teatro" correspondiente a la dinámica dada por la Ec. (3). Si se pudieran, de alguna manera, "remover" los campos de materia ϕ aún quedaría el espacio-tiempo de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \eta)$ como remanente. Como veremos después, en la relatividad general el espacio-tiempo no está fijo, sino que es determinado dinámicamente. A diferencia de lo que sucede en la relatividad especial, la eliminación hipotética de los campos de materia (incluyendo en el término materia el campo gravitacional caracterizado por el tensor métrico g) en el contexto de la relatividad general *no* implicaría una variedad suave como remanante, ni siquiera el aspecto topológico de la misma, no habría *algo* remanente [3].

2.2. Tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ no nulo

Por otra parte, la existencia de observadores privilegiados en la relatividad especial, que son los observadores inerciales, se traduce en que éstos observan y asocian un tensor de energía-momento *no nulo*, $T_{\mu\nu}$, con los campos de materia ϕ. Por el contrario, como veremos a continuación en la subsección 3.2, en la relatividad general, debido a la covarianza general de la misma, *no* pueden existir observadores privilegiados, por lo que el tensor *total* de energía-momento (incluida la contribución del campo gravitacional g) tiene que ser *idénticamente nulo*.

3. Relatividad general

3.1. Espacio-tiempo dinámico: el escenario se vuelve actor

Las ecuaciones de Einstein pueden obtenerse del principio de acción de Einstein-Hilbert

$$S[g,\phi] = \frac{c^3}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\mathcal{R} + \int_{\mathcal{M}} d^4x\mathcal{L}_{matter}[\phi], \qquad (4)$$

donde $\mathcal{R}$ es la curvatura escalar y $\mathcal{L}_{matter}[\phi]$ denota la contribución de materia (no gravitacional), el cual proporciona las ecuaciones de movimiento

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \qquad (5)$$

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/2)\mathcal{R}g_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein. Así pues, en la relatividad general la métrica g del espacio-tiempo $\mathcal{M}$ es dinámicamente determinada mediante las ecuaciones de Einstein mismas. Para ser más precisos, la terna $(g,\phi,\mathcal{M})$ tiene que ser dinámicamente determinada (hasta transformaciones de norma: difeomorfismos $f:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}$ del espacio-tiempo $\mathcal{M}$ sobre sí mismo $\mathcal{M}$, como veremos después).

3.2. Tensor total de energía-momento $t_{\mu\nu}$ nulo

Debido a que la acción (4) es invariante bajo difeomorfismos $f:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}$ del espaciotiempo $\mathcal{M}$ sobre sí mismo $\mathcal{M}$, el tensor total de energía-momento $t_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - (c^4/8\pi G)G_{\mu\nu}$ de los campos de materia (incluida la contribución del tensor métrico g) es idénticamente nulo [4]

$$t_{\mu\nu} = 0, \qquad (6)$$

debido a las ecuaciones de movimiento (5). De esta forma, respecto al "observador ideal" asociado al atlas $\mathcal{A}$ existe un "balance energético" entre el "flujo" asociado a la materia ϕ (contenido en $T_{\mu\nu}$) y el asociado al campo gravitacional g (contenido en $-(c^4/8\pi G)G_{\mu\nu}$) en forma tal que ambos "flujos"se cancelan debido a las ecuaciones de Einstein. En el contexto conceptual de la relatividad general no puede existir un tensor total $t_{\mu\nu}$ de energía-momento no nulo, puesto que, si así fuera, se tendrían observadores (ideales) privilegiados; lo cual iría en contra de la covarianza general de la relatividad general. Desde este punto vista las ecuaciones de Einstein (5) tiene un doble papel: por una parte son ecuaciones de movimiento y por otra reflejan el hecho de que el tensor de energía-momento total es nulo. Es importante enfatizar que por razones conceptuales no se pueden hacer modificaciones al tensor total de energía-momento usando el método de Belinfante, puesto que tal hecho implicaría, debido al doble papel de las ecuaciones de Einstein, modificar las ecuaciones de Einstein y no hay, actualmente, sustento experimental para ello [4].

4. Gravedad en el formalismo de tétradas

Para facilitar al autor la discusión y en aras de incluir fermiones dentro de los campos de materia es necesario introducir el formalismo de primer orden (o de tétradas) de la relatividad general. La acción que describe el campo gravitacional es la acción de Palatini:

$$S[e,\omega] = \frac{c^3}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \mathbf{L}[e,\omega] = \frac{c^3}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} *(e^I\wedge e^J)\wedge R_{IJ}[\omega], \qquad (7)$$

donde $R_{IJ}[\omega] = d\omega_{IJ} + \omega_I{}^K\wedge\omega_{KJ}$ es la curvatura de la conexión $\omega_I{}^J$ con valores en el álgebra de Lie del grupo de Lorentz $SO(3,1)$, $*T^{IJ} := (1/2)\varepsilon^{IJKL}T_{KL}$ es el tensor dual interno (respecto a los índices de Lorentz $I,J=0,1,2,3$) del tensor T_{IJ}, $e^I = e^I_\mu dx^\mu$ es un conjunto de cuatro 1-formas, base dual de la base del espacio tangente $e_I = e^\mu_I(\partial/\partial x^\mu)$, $\mu = 0,1,2,3$. El símbolo $\wedge$ indica el producto tensorial antisimétrico [1].

La variación de la acción respecto a la tétrada e^I proporciona la ecuación de movimiento

$$\mathcal{E}_J[e,\omega] := e^I\wedge *R_{IJ}[\omega] = 0, \qquad (8)$$

mientras que la variación respecto a la conexión $\omega_I{}^J$ proporciona

$$\mathcal{E}^{IJ}[e,\omega] := D(*(e^I\wedge e^J)) = 0, \qquad (9)$$

donde

$$Dv^I := dv^I + \omega^I{}_K \wedge v^K.$$

4.1. Covarianza bajo difeomorfismos

Si se realiza un difeomorfismo $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ de la variedad $\mathcal{M}$ sobre sí misma $\mathcal{M}$, el efecto de éste (del difeomorfismo) se puede considerar como que los puntos *no* se mueven y lo que cambia es la configuración de los campos respecto al *mismo* atlas $\mathcal{A}$. De esta forma, si $(e^I, \omega_J{}^K)$ representan las configuraciones de los campos respecto al atlas $\mathcal{A}$ *antes* de realizar el difeomorfismo, entonces $(f^* e^I, f^* \omega_J{}^K)$ representan las configuraciones (respecto al mismo atlas $\mathcal{A}$) *después* de realizar el difeomorfismo $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$. Por lo tanto, el efecto del difeomorfismo sobre el principio de acción es el siguiente:

$$\begin{aligned} S[f^*e, f^*\omega] &= \frac{c^3}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \mathbf{L}[f^*e, f^*\omega] \\ &= \frac{c^3}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} f^*\left(\mathbf{L}[e,\omega]\right) \\ &= \frac{c^3}{16\pi G}\int_{f(\mathcal{M})} \mathbf{L}[e,\omega] \\ &= \frac{c^3}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \mathbf{L}[e,\omega] = S[e,\omega], \end{aligned} \tag{10}$$

lo cual indica que la acción (7) es invariante bajo difeomorfismos. Pero, ¿cuál es el efecto de los difeomorfismos sobre las ecuaciones de movimiento y las soluciones de éstas?

Proposición. Si el par de campos $(e^I, \omega_J{}^K)$ satisfacen las ecs. de Einstein en vacío, (8) y (9), entonces $(f^* e^I, f^* \omega_J{}^K)$ también.

Prueba. En efecto,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_J[f^*e, f^*\omega] &= f^*\left(\mathcal{E}_I[e,\omega]\right), \\ \mathcal{E}^{IJ}[f^*e, f^*\omega] &= f^*\left(\mathcal{E}^{IJ}[e,\omega]\right), \end{aligned} \tag{11}$$

$\forall f \in \mathrm{Diff}(\mathcal{M})$. Por lo tanto, los dos términos en el lado izquierdo en (11) se anulan si se cumplen (8) y (9). QED. [Véase el Apéndice A].

Por supuesto que se puede acoplar una lagrangiana de campos de materia ϕ y la prueba en el caso de incluir materia sería esencialmente la misma, simplemente habría que agregar los campos de materia ϕ antes y después del difeomorfismo y usar, en vez de (8) y (9), las ecuaciones de Einstein del campo gravitacional acopladas con los campos de materia.

4.2. El argumento del hoyo

Del análisis desarrollado en la subsección anterior se desprende que $(e^I, \omega_J{}^K)$ y $(f^* e^I, f^* \omega_J{}^K)$ son configuraciones (*funcionalmente distintas entre sí*) respecto al mismo atlas $\mathcal{A}$, que satisfacen las *mismas* ecuaciones de movimiento (8) y (9) [véase la subsección 4.1 y el Apéndice A]. Este hecho perturbó a Einstein durante varios años a tal punto que su primera reacción a tal hecho fue *rechazar* la covarianza bajo difeomorfismos, lo cual hizo empleando el llamado "argumento del hoyo". Es decir, Einsten inventó el "argumento del hoyo"para concluir que *no* podía existir una teoría de la gravedad covariante bajo difeomorfismos. El argumento es el siguiente: [5]

Supongamos que se tiene una variedad $\mathcal{M}$ con una región $\mathcal{H}$ donde *no* hay materia, es decir, hay un hoyo $\mathcal{H}$ de materia. Dentro del hoyo $\mathcal{H}$ sólo existe campo gravitacional $(e_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$. Fuera del hoyo $\mathcal{H}$, existen tanto campo gravitacional $(e_{fuera}, \omega_{fuera})$ como materia ϕ_{fuera}. Las ecuaciones de Einstein acopladas con los campos de materia ϕ son satisfechas dentro y fuera del hoyo, obviamente. En la frontera del hoyo, $\partial\mathcal{H}$, las configuraciones de campo gravitacional y material dentro y fuera del hoyo $\mathcal{H}$ se pegan de manera suave. Ahora realizemos un difeomorfismo $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ tal que sólo mueve los puntos *dentro* del hoyo $\mathcal{H}$ y tiende de manera suave a la identidad en la frontera del hoyo y fuera de éste. Como ya hemos visto, el efecto del difeomorfismo se codifica en que los puntos dentro del hoyo no se mueven y todo lo que cambia es la configuración de los campos. En resumen:

Antes de realizar el difeomorfismo. Dentro del hoyo $\mathcal{H}$ la configuración es $(e_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}}, \phi_{\mathcal{H}} = 0)$ mientras que fuera del hoyo $\mathcal{H}$ es $(e_{fuera}, \omega_{fuera}, \phi_{fuera})$.

Después de realizar el difeomorfismo. Dentro del hoyo $\mathcal{H}$ la configuración es $(f^*e_{\mathcal{H}}, f^*\omega_{\mathcal{H}}, f^*\phi_{\mathcal{H}} = 0)$ mientras que fuera del hoyo $\mathcal{H}$ es la originalmente dada $(e_{fuera}, \omega_{fuera}, \phi_{fuera})$ puesto que ahí el difeomorfismo es la identidad.

Con base en lo anterior, Einstein concluyó que el hecho de tener soluciones analíticas distintas, $(e_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$ y $(f^*e_{\mathcal{H}}, f^*\omega_{\mathcal{H}})$ para un $f \in \mathrm{Diff}(\mathcal{M})$, dentro del hoyo no tenía sentido y que por lo tanto no podía existir una teoría covariante bajo difeomorfismos para el campo gravitacional. Sin embargo, después de varios años Einstein se retractó cuando se percató que había cometido un error en la *interpretación* de los resultados involucrados en el "argumento del hoyo". Apelando al determinismo, Einstein concluyó que las dos configuraciones, $(e_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$ y $(f^*e_{\mathcal{H}}, f^*\omega_{\mathcal{H}})$ para un $f \in \mathrm{Diff}(\mathcal{M})$, representan la *misma solución física* (el mismo estado físico de campo gravitacional) debido al hecho de que las coordenadas[i] *no* tienen siginificado físico *per se*. En palabras de Einstein: [2]

"Now it came to me: ... the independence of the gravitational acceleration from the nature of the falling substance, may be expressed as follows: In a gravitational field (of small spatial extension) things behave as they do in a space free of gravitation... This happened in 1908. Why were another seven years required for the construction of the general theory of relativity? The main reason lies in the fact that it is not so easy to free oneself from the idea that coordinates must have an immediate metrical meaning".

Desafortunadamente, la referencias estándares sobre la relatividad general no incluyen un análisis claro y conceptualmente correcto de la covarianza bajo difeomorfismos, lo cual ha llevado a generaciones de investigadores y estudiantes de la relatividad general a subestimar este hecho e interpretarlo, erróneamente, como un cambio de coordenadas. Por si hiciera falta, enfatizamos una vez más: el atlas $\mathcal{A}$ es la estructura matemática asociada con la definición de coordenadas. Un difeomorfismo $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ *no* tiene nada que ver con elegir o no coordenadas sobre la variedad $\mathcal{M}$ [1]. Afortunadamente, se puede consultar ya un texto moderno, reciente, que transpira física y que analiza, más detalladamente que el presente artículo, las bases conceptuales de la relatividad general [6].

5. Evolución de los grados de libertad

Tenemos, finalmente, los elementos necesarios para discutir el "problema del tiempo.[en] la relatividad general.

5.1. Evolución carente de significado físico: evolución respecto al observador ideal $\mathcal{A}$

Aún cuando no todos los espacio-tiempos tienen la topología $\mathcal{M} = \Sigma \times \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ corresponde con la "coordenada temporal x^0z Σ corresponde al "espacio", nos restringiremos a este caso. De lo discutido en la Sec. 4 debería resultar claro que, debido a la covarianza bajo difeomorfismos, x^0 es sólo una etiqueta, un parámetro, y que *no* representa una cantidad con significado físico por sí misma. Este hecho es enfatizado aún más cuando se considera la formulación $3+1$ de la relatividad general. En cualesquiera de esas formulaciones, por ejemplo en variables ADM [7], x^0 *no* puede ser identificado *a priori* (con anticipación), en forma alguna, con el "tiempo"puesto que una noción de tiempo coordenado tiene sentido una vez que se tiene *todo* el espacio-tiempo $\mathcal{M}$, es decir, no puede definirse una noción de tiempo coordenado con antelación cuando apenas se está evolucionando el espacio-tiempo a partir de la configuración inicial de los campos sobre Σ. Inicialmente, pues, x^0 es sólo un parámetro, que al final, cuando se tiene el espacio-tiempo completo, puede ser identificado con un tiempo coordenado, el cual a su vez carece de significado físico por sí mismo. Supongamos que se tiene una configuración de las variables de espacio fase $(g_{ij}, \widetilde{\pi}^{ij})$ que satisfacen al valor inicial $x^0 = x^0_{inical}$ del parámetro x^0 las constricciones de primera clase de la teoría, $\widetilde{C} \approx 0, \widetilde{C}_i \approx 0$. El hecho de que se satisfagan las constricciones no es suficiente para evolucionar la configuración inicial, se requiere especificar la configuración de los multiplicadores de Lagrange N, N^i, $i = 1, 2, 3$ para ello. Sin embargo, la "evolución.[a]sí obtenida es una "transformación de normaz no tiene significado físico. Es decir, la configuración de las variables de espacio fase al tiempo coordenado $x^0_{inicial}$ y la configuración al tiempo coordenado x^0_{final} están relacionadas por una transformación de norma: por un difeomorfismo. Más aún, la configuración generada con la elección particular de la configuración de los multiplicadores de Lagrange (N, N^i) *no* tiene nada de especial, otra elección de la configuración de éstos es igualmente posible, digamos (N_2, N_2^i). De esta forma, las dos configuraciones de las variables de espacio fase al tiempo coordenado x^0_{final}, obtenidas mediante el uso de (N, N^i) y de (N_2, N_2^i) a partir de la *misma* configuración inicial a $x^0_{inicial}$, representan la *misma* configuración física de campo gravitacional a pesar de diferir funcionalmente entre sí, la razón de ello es que ambas configuraciones están relacionadas mediante un difeomorfismo. Toda historia o "evolución.[o]btenida de la misma configuración inicial mediante diferentes elecciones de los multiplicadores de Lagrange representan el mismo estado físico, *i.e.*, *el mismo punto en el espacio de estados físicos del campo gravitacional*.

5.2. Evolución provista de significado físico: evolución relacional

Hemos visto pues que la especificación analítica de la configuración de campo gravitacional, (e, ω) en el formalismo de tétradas, respecto al atlas $\mathcal{A}$ sobre la variedad $\mathcal{M}$ tiene un "contenido de norma", puesto que una configuración dada puede ser transformada en otra, matemáticamente distinta a la primera, mediante un difeomorfismo. Este hecho implica que la evolución respecto del parámetro x^0 de las variables de espacio fase *carece* de signicado físico alguno: la evolución respecto de x^0 es un difeomorfismo, una transformación de norma. Este hecho plantea entonces la pregunta: *¿Es posible, en una teoría covariante bajo difeomorfismos, describir la evolución de las variables involucradas en una forma que la evolución sea invariante bajo difeomorfismos o, equivalentemente, invariante de norma?* La respuesta es sí, y la propuesta se conoce como *evolución relacional* [6, 8–10].

La evolución relacional de los grados de libertad del campo gravitacional (o del campo gravitacional acoplado a campos de materia ϕ si se desea) está íntimamente basada en la ausencia de una estructura de referencia fija respecto a la cual los campos "cambien" y "evolucionen". A pesar de que la covarianza bajo difeomorfismos implica que tal estructura de referencia fija no existe, es posible hablar de "evolución"de los campos gravitacionales y materiales. Lo que cambia, por supuesto, es la noción de evolución. En el presente contexto, evolución significa cómo cambian unos campos respecto de algún otro que se toma como reloj T. La diferencia entre la variable reloj T y el tiempo coordenado x^0 reside en que la primera T está asociada a un campo material (incluyendo dentro del término materia al campo gravitacional) y por lo tanto tiene dinámica, la cual afecta al espacio-tiempo, mientras que la segunda x^0 *no* tiene dinámica, su existencia, asociada a relojes de prueba, se establece únicamente de manera verbal al asociarse con el atlas $\mathcal{A}$.

6. Comentarios finales

Es claro que la inclusión de observadores realistas (por ejemplo, los aceleradores de partículas) en el formalismo de la teoría, los cuales estén definidos por campos de materia y con dinámica acoplada al campo gravitacional es necesario para tener predicciones que sean covariantes (invariantes) bajo difeomorfismos y que tengan por lo tanto contenido físico. También es claro que tal hecho sucede siempre (de manera experimental) cada vez que los aparatos de medida toman mediciones, por lo cual no hay ningún problema desde el punto de vista experimental. El problema radica en cómo incorporar de manera teórica este hecho experimental. Finalmente, en este artículo he desarrollado la parte clásica de la evolución relacional. El lector interesado en explorar las consecuencias a nivel cuántico de este hecho en modelos con un número finito de grados de libertad, pero que mimetizan conceptualmente la relatividad general, puede consultar las Refs. 11-13 para una discusión clara de los conceptos involucrados. Hay, todavía, muchas cosas que podemos decir acerca de las bases conceptuales de la relatividad y sus implicaciones, pero no en este trabajo.

Agradecimientos

Mi agradecimiento a C. Rovelli y G.F. Torres del Castillo por conversaciones sobre los temas del presente artículo. También quiero expresar mi agradecimiento al comité organizador local del V Taller de la División de Gravitación y Física-Matemática de la Sociedad Mexicana de Física por darme la oportunidad de impartir una charla sobre este tópico. Finalmente, agradezco el apoyo del Sistema Nacional de Investigadores del CONACyT. Este Trabajo ha sido desarrollado con apoyo del proyecto 43939-F del CONACyT.

Apéndice A: La clase de Minkowski

La métrica de Minkowski η sobre $\mathbb{R}^4$ está dada por

$$\eta = -d(ct)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{12}$$

donde $(x^\mu)=(ct, x, y, z)$ son las coordenadas minkowskianas usuales. Ahora tomemos la métrica

$$\eta_1 = -a^2 d(ct)^2 + b^2 dx^2 + d^2 dy^2 + e^2 dz^2, \tag{13}$$

con a, b, d, e constantes reales no nulas, definida también sobre $\mathbb{R}^4$ y respecto al mismo atlas $\mathcal{A}$, al igual que (12). Ambos tensores métricos, (12) y (13), satisfacen las ecuaciones de Einstein en el vacío y además son planas, en el sentido de que sus correspondientes tensores de curvatura se anulan. Sin embargo, a pesar de diferir funcionalmente (respecto al mismo atlas), las métricas (12) y (13) representan, en el contexto conceptual de la relatividad general, la *misma solución física*, puesto que $\eta_1 = f_1^* \eta$, con f_1 un difeomorfismo de $\mathbb{R}^4$ sobre sí mismo, definido por

$$(ct, x, y, z) \longmapsto (\frac{ct}{a}, \frac{x}{b}, \frac{y}{d}, \frac{z}{e}). \tag{14}$$

Dicho de otra forma, las métricas (12) and (13) son sólo dos elementos representativos de todos aquellos que forman la misma solución física, la cual es la *clase de Minkowski*, en el ejemplo mencionado. Todos los elementos de la clase de Minkowski son $\{\mathbb{R}^4, f^*\eta\}$, $\forall f \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^4)$. De esta forma, existe un número infinito de métricas, funcionalmente distintas entre sí respecto al mismo atlas $\mathcal{A}$, en tal clase. Todos los elementos de la clase tienen la propiedad de que su curvatura se anula, lo cual nos dice que el espacio-tiempo es plano. Consideremos ahora la métrica

$$\eta_2 = d(ct)^2 - dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{15}$$

la cual se puede obtener de (12) mediante el difeomorfismo $f_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$(ct, x, y, z) \longmapsto (x, ct, y, z). \tag{16}$$

Es decir, $\eta_2 = f_2^* \eta$; por lo que (15) es otro elemento de la clase de Minkowski. El lector seguramente dirá que ya hemos llegado demasiado lejos, puesto que la coordenada ct "no es temporal" en (15)... y se equivocará. Las métricas (12), (13) y (15) exhiben una de las características esenciales de la relatividad general: las coordenadas $(x^\mu) = (ct, x, y, z)$ *no* tienen, debido a la covarianza bajo difeomorfismos, significado físico *per se*, como ya se ha mencionado previamente. El atlas $\mathcal{A}$ *no* representa, en forma alguna, por ejemplo, los aceleradores de partículas tomando mediciones. Dicho de otra forma, las métricas de la clase de Minkowski sólo reflejan el hecho de que la dinámica de los relojes y reglas de prueba *no* ha sido incorporada matemáticamente en el formalismo.

$*$. Associate Member of the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

i. Con mayor precisión, el atlas $\mathcal{A}$ *no* representa, en forma alguna, un conjunto de observadores materiales. Por supuesto que usualmente se asocia el atlas $\mathcal{A}$ con conjunto de relojes sincronizados colocados en la "red" del espacio. Sin embargo, tales relojes son ideales en el sentido de que *no* contribuyen al campo gravitacional. Por lo tanto, en base a lo anterior, es correcto llamar al atlas $\mathcal{A}$ un "observador ideal".

1. G.F. Torres del Castillo, *Notas sobre variedades diferenciables* (Monografía del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N., México, 1981).

2. E.F. Taylor and J.A. Wheeler, *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity* (Mexico City: Addison Wesley Longman, 2000).

3. A. Einstein, "Relativity and the problem of space", in *Ideas and Opinions* (New York: Crown Publishers, 1954) p. 375.

4. M. Montesinos, "The double role of Einstein's equations: as equations of motion and as vanishing energy-momentum tensor", in *Topics in Mathematical Physics, General Relativity and Cosmology in Honor of Jerzy Plebański*, edited by H. García-

Compeán, B. Mielnik, M. Montesinos, and M. Przanowski (World Scientific, Singapore, 2006) p. 325; gr- qc/0311001.

5. J. Stachel, "Einstein's Search for General Covariance, 1912-1915", in *Einstein and the History of General Relativity, Vol. 1 of Einstein Studies*, edited by D. Horward and J. Stachel (Birkhäuser, Boston, 1989).
6. C. Rovelli, Quantum Gravity (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
7. R. Arnowitt, S. Desser, and C.W. Misner, "The dynamics of general relativity"in *Gravitation: An Introduction to Current Research* edited by L. Witten (New York: Wiley, 1962).
8. C. Rovelli, *Phys. Rev. D* **42** (1990) 2638.
9. C. Rovelli, *Phys. Rev. D* **43** (1991) 442.
10. C. Rovelli, *Phys. Rev. D* **44** (1991) 1339.
11. M. Montesinos, C. Rovelli, and T. Thiemann, *Phys. Rev. D* **60** (1999) 044009.
12. M. Montesinos, *Gen. Rel. Grav.* **33** (2001) 1.
13. M. Montesinos, and C. Rovelli, *Class. Quantum Grav.* **18** (2001) 555.