

Dualidad masiva en 7 dimensiones

M. Betancourt y A. Khoudeir
*Centro de Astrofísica Teórica, Universidad de los Andes,
 Mérida 5101, Venezuela*

Recibido el 24 de noviembre de 2003; aceptado el 24 de abril de 2004

Este trabajo se estudia las teorías masiva topológica y auto dual en siete dimensiones y se muestra la equivalencia dual entre ellas.

Descriptor: Teoría de campos de calibre; términos de Chern-Simons.

We will show the dual equivalence between the massive topologically and self dual theories in seven dimensions.

Keywords: Gauge field theory; Chern-Simons term.

PACS: 11.10.-z

1. Introducción

En tres dimensiones, tenemos la posibilidad de introducir términos de Chern Simons para la construcción de teorías masivas invariantes de calibre de espín 1 y espín 2 [1]. Además es posible construir teorías no invariantes de calibre de espín 1 [2] y espín 2 [3], conocidas como teorías autoduales. Es bien conocido que ambas descripciones son equivalentes por dualidad [4,5].

En este trabajo, se presentan las formulaciones masiva topológica y auto dual para un campo antisimétrico de tercer orden C_{mnp} en siete dimensiones. Se muestra la equivalencia de ambas teorías desde un punto de vista canónico, después de realizar los respectivos análisis hamiltonianos. La equivalencia dual puede ser vista covariantemente a través de la existencia de una acción maestra. Es de resaltar que esta equivalencia es local y, si uno considera una variedad con una estructura topológica no trivial, se deben esperar algunas diferencias en la equivalencia [6], como ocurre en tres dimensiones [7] y en la equivalencia dual de campos masivos antisimétricos en cuatro dimensiones [8].

2. Teoría masiva topológica

La acción de segundo orden para la teoría masiva topológica en 7 dimensiones es

$$I_{MT} = \int d^7x \left[-\frac{1}{48} G_{mnpq} G^{mnpq} - \frac{\mu}{72} \varepsilon^{mnpqrst} C_{mnp} \partial_q C_{rst} \right], \quad (1)$$

donde

$$G_{mnpq} = (\partial_m C_{npq} + \partial_n C_{pmq} + \partial_p C_{mnq} + \partial_q C_{nmp}) \quad (2)$$

y es invariante bajo transformaciones de calibre

$$\delta C_{mnp} = \partial_m \lambda_{np} + \partial_n \lambda_{pm} + \partial_p \lambda_{mn}. \quad (3)$$

Ahora procedemos con el análisis hamiltoniano. Los momentos canónicos son

$$\pi_{ijk} = \frac{1}{6} (\dot{C}_{ijk} + \partial_i C_{j0k} + \partial_j C_{0ik} + \partial_k C_{i0j}) - \frac{1}{72} \mu \varepsilon^{ijklmn} C_{lmn}, \quad (4)$$

$$\pi_{0ij} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{C}_{0ij}} = 0 \equiv \phi_{1ij}. \quad (5)$$

Este último es un vínculo primario. El hamiltoniano canónico tomando en cuenta el vínculo primario es

$$H = \int d^6y (\mathcal{H} + \chi_{ij} \phi_{1ij}). \quad (6)$$

Preservando el vínculo primario ϕ_{1ij} : $\dot{\phi}_{1ij} = \{\phi_{1ij}, H\} \approx 0$, se obtiene

$$\dot{\pi}_{0jk} = 3\partial_i \pi_{ijk} - \frac{1}{24} \mu \varepsilon^{ijklmn} \partial_i C_{lmn} \approx 0 \equiv \phi_{2jk}; \quad (7)$$

es decir, aparece un vínculo secundario. La preservación de éste vínculo da como resultado

$$\dot{\phi}_{2ij} = \{\phi_{2ij}, H\} \approx 0, \quad (8)$$

lo que indica que no aparecen más vínculos. La densidad hamiltoniana extendida con vínculos es

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{MT} = & 3\pi_{ijk}\pi_{ijk} + \frac{1}{48}\mu^2 C_{lmn}C_{lmn} \\ & + \frac{1}{48}G_{ijkl}G_{ijkl} + \frac{1}{12}\mu\varepsilon^{ijklmn}C_{lmn}\pi_{ijk} \\ & + \lambda_{ij}(3\partial_k\pi_{ijk} - \frac{1}{24}\mu\varepsilon^{ijklmn}C_{lmn}) + \chi_{ij}\pi_{0ij}, \end{aligned} \quad (9)$$

donde λ_{ij} y χ_{ij} son los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos ϕ_{2ij} y ϕ_{1ij} , respectivamente.

Las ecuaciones canónicas de movimiento son

$$\dot{C}_{0jk} = \{C_{0jk}(x), H(y)\} = \chi_{jk}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_{ijk} = & \{C_{ijk}(x), H(y)\} = 6\pi_{ijk} + \frac{1}{12}\mu\varepsilon^{ijklmn}C_{lmn} \\ & - (\partial_i\lambda_{jk} + \partial_j\lambda_{ki} + \partial_k\lambda_{ij}), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_{ijk} = & \{\pi_{ijk}(x), H(y)\} - \frac{1}{24}\mu^2 C_{ijk} + \frac{\mu}{12}\varepsilon^{ijklmn}\pi_{lmn} \\ & + \frac{1}{24}\mu\varepsilon^{ijklmn}\partial_l\lambda_{mn} + \frac{1}{6}\partial_l G_{lijk}\end{aligned}\quad (12)$$

y

$$\dot{\pi}_{0jk} = \{\pi_{0jk}(x), H(y)\} = 0. \quad (13)$$

El álgebra de los vínculos encontrados es de primera clase. Ahora procedemos a fijar calibre. Usaremos el calibre de radiación, definido por las siguientes condiciones:

$$\phi_{3jk} \equiv C_{0jk} = 0, \quad (14)$$

$$\phi_{4ij} \equiv \partial_k C_{ijk} = 0. \quad (15)$$

Ahora, podemos considerar los vínculos y las fijaciones de calibre como un conjunto de vínculos de segunda clase que permitirán resolver los vínculos y determinar los multiplicadores. Los únicos paréntesis de Dirac relevantes son

$$\{C_{0ij}(x), \pi_{0lm}(y)\}_D = \delta_{lm}^{ij}\delta^6(x-y), \quad (16)$$

$$\begin{aligned}\{C_{ijk}(x), \pi_{lmn}(y)\}_D = & \delta_{lmn}^{ijk}\delta^6(x-y) \\ & - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} \left(\frac{1}{\pi^3|x-y|^4} \right).\end{aligned}\quad (17)$$

De la Ec. (10) se obtiene que $\chi_{ij} = 0$. Realizando una descomposición transversa longitudinal

$$(A_{ij} = A_{ij}^T + \rho_i A_j^T - \rho_j A_i^T$$

y

$$B_{ijk} = B_{ijk}^T + \rho_i B_{jk}^T - \rho_j B_{ik}^T + \rho_k B_{ij}^T,$$

donde $\rho_i = \partial_i / \sqrt{-\nabla^2}$, a la ecuación canónica de movimiento (11), se determina el otro multiplicador, $\rho\lambda_{ij}^T = 6\pi_{ij}^T - (1/12)\mu\varepsilon^{ijklmn}\rho_k C_{lmn}^T$. Ahora procedemos a resolver $\phi_{2ij} \approx 0$ y obtenemos $\pi_{ij}^T = -(1/72)\varepsilon^{ijklmn}\rho_k C_{lmn}^T$.

El vínculo (15) nos dice que $C_{ijk} = C_{ijk}^T$ y $C_{ij}^T = 0$. Determinados χ_{ij} , λ_{ij}^T , π_{ij}^T y C_{ij}^T el lagrangiano se reduce a

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \pi_{ijk}^T \dot{C}_{ijk}^T - 3\pi_{ijk}^T \pi_{ijk}^T \\ & - \frac{1}{12}\mu^2 C_{ijk}^T C_{ijk}^T + \frac{1}{12}c_{ijk}^T \nabla^2 C_{ijk}^T.\end{aligned}\quad (18)$$

Variaciones con respecto a las variables independientes C_{ijk}^T y π_{ijk}^T originan la ecuación de movimiento

$$(\square - \mu^2)C_{ijk}^T = 0, \quad (19)$$

mostrando que la teoría propaga 10 grados de libertad contenidos en C_{ijk}^T .

3. Teoría Auto Dual

La acción de la teoría auto dual es de primer orden y está dada por

$$\begin{aligned}I_{SD} = & \int d^7x \left[\frac{1}{72\mu}\varepsilon^{mnpqrst}C_{mnp}\partial_q C_{rst} \right. \\ & \left. - \frac{1}{12}C_{mnp}C^{mnp} \right].\end{aligned}\quad (20)$$

Esta acción no es invariante de calibre. Los momentos canónicos son

$$\pi_{ijk} = \frac{\partial \mathcal{L}_{SD}}{\partial \dot{C}_{ijk}} = \frac{1}{72\mu}\varepsilon^{ijklmn}C_{lmn}, \quad (21)$$

$$\pi_{0ij} = \frac{\partial \mathcal{L}_{SD}}{\partial \dot{C}_{0ij}} = 0, \quad (22)$$

Entonces, tenemos los siguientes vínculos primarios:

$$\phi_{ijk} = \pi_{ijk} - \frac{1}{72\mu}\varepsilon^{ijklmn}C_{lmn} \approx 0, \quad (23)$$

$$\phi_{ij} = \pi_{0ij} \approx 0. \quad (24)$$

La densidad hamiltoniana extendida es, entonces,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{SD} + \lambda_{ijk}\phi_{ijk} + \lambda_{ij}\phi_{ij}. \quad (25)$$

Preservando el vínculo primario ϕ_{ij} se obtiene

$$\dot{\phi}_{ij} = -6\partial_k \pi_{ijk} - \frac{1}{2}C_{0ij} \equiv \psi_{ij} \approx 0, \quad (26)$$

es decir, se encuentra un vínculo secundario. Preservando el otro vínculo primario ϕ_{ijk} , obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_{ijk} = & \frac{1}{6}C_{ijk} + \frac{1}{12\mu}\varepsilon^{ijklmn}\partial_n C_{0lm} \\ & + \frac{1}{36\mu}\varepsilon^{ijklmn}\lambda_{lmn} = 0,\end{aligned}\quad (27)$$

la cual nos permite determinar el multiplicador $\lambda_{pqr} = (1/6)\mu\varepsilon^{pqrijk}C_{ijk} - (\partial_p C_{0qr} + \partial_q C_{0rp} + \partial_r C_{0pq})$.

Preservando el vínculo secundario se encuentra el otro multiplicador $\lambda_{ij} = \partial_k C_{ijk}$. Se han resuelto dos de los vínculos, ya que son de segunda clase. En efecto, el álgebra de los vínculos es

$$\{\phi_{ijk}(x), \phi_{lmn}(y)\} = -\frac{1}{36\mu}\varepsilon^{ijklmn}\delta^6(x-y), \quad (28)$$

$$\{\psi_{lm}(x), \phi_{ijk}(y)\} = \frac{1}{72\mu}\varepsilon^{ijklmn}\partial_n \delta^6(x-y), \quad (29)$$

$$\{\psi_{lm}(x), \phi_{ij}(y)\} = \frac{1}{12}\delta_{ij}^{lm}\delta^6(x-y). \quad (30)$$

Ahora, resolvemos el vínculo $\phi_{ijk} \approx 0$. La parte longitudinal de este vínculo permite determinar π_{ij}^T en términos de C_{ijk}^T :

$\pi_{jk}^T = -(1/72\mu)\varepsilon^{ijklmn}\rho_i C_{lmn}^T$. Mientras que la parte transversa nos permite obtener $C_{ij}^T = (2\mu/\rho)\varepsilon^{ijklmn}\partial_k\pi_{lmn}^T$. El lagrangiano para la teoría auto dual se reduce a

$$\mathcal{L}_{SD} = 2\pi_{ijk}^T \dot{C}_{ijk}^T - \frac{1}{12}\mu^2 C_{ijk}^T C_{ijk}^T - 12\pi_{ijk}^T \pi_{ijk}^T - \frac{1}{12}\rho^2 C_{ijk}^T C_{ijk}^T. \quad (31)$$

Variaciones con respecto a π_{ijk}^T y C_{ijk}^T dan las ecuación de movimiento,

$$(\square - \mu^2)C_{ijk}^T = 0. \quad (32)$$

Resultando el mismo número de grados de libertad que la Teoría Masiva Topológica.

4. Equivalencia entre las teorías masiva topológica y la auto Dual

Hemos realizado el estudio hamiltoniano de la teoría masiva topológica y la auto dual en siete dimensiones. Ahora podemos mostrar la equivalencia canónica entre ellas. Tenemos que la densidad hamiltoniana para la teoría masiva topológica es:

$$\mathcal{H}_{MT} = 3\pi_{ijk}\pi_{ijk} + \frac{\mu^2}{48}C_{ijk}C_{ijk} + \frac{1}{48}G_{ijkl}G_{ijkl} + \frac{\mu}{12}\varepsilon^{ijklmn}C_{lmn}\pi_{ijk}, \quad (33)$$

con el siguiente conjunto de vínculos de primera clase:

$$\phi_{1ij} = \pi_{oij} \approx 0,$$

$$\phi_{2ij} = 3\partial_i\pi_{ijk} - \frac{1}{24}\mu\varepsilon^{ijkpqr}\partial_i C_{pqr} \approx 0. \quad (34)$$

Mientras para la teoría auto dual, la densidad hamiltoniana

$$\mathcal{H}_{SD} = \frac{1}{12,12}(\varepsilon^{ijklmn}\partial_k C_{lmn})^2 + \frac{\mu^2}{12}C_{ijk}C_{ijk}, \quad (35)$$

con los vínculos de segunda clase,

$$\psi_{ij} = -6\partial_k\pi_{ijk} - \frac{1}{2}C_{0ij} \approx 0, \quad (36)$$

$$\phi_{ij} = \pi_{0ij} \approx 0 \quad (37)$$

$$\phi_{ijk} = \pi_{ijk} - \frac{1}{72\mu}\varepsilon^{ijklmn}C_{lmn}, \approx 0. \quad (38)$$

Es fácil ver que ambos hamiltonianos están relacionados de la siguiente manera:

$$\mathcal{H}_{MT} = \mathcal{H}_{SD} + 3\phi_{ijk}(\phi_{ijk} + \frac{\mu}{18}\varepsilon^{ijklmn}C_{lmn}). \quad (39)$$

Es decir, que difieren por una combinación de los vínculos de segunda clase de la teoría auto dual. Así que uno puede considerar que la teoría auto dual es una versión fijada de calibre de la masiva topológica, como ocurre en tres dimensiones[5].

La equivalencia física que hemos presentado puede ser vista desde un punto de vista covariante, por medio de una acción maestra. En efecto, se puede mostrar la equivalencia considerando la siguiente acción

$$I_M = \int d^7x [\frac{1}{36}\chi^{mnp}C_{mnp} - \frac{\mu}{72}\chi^{mnp}C_{mnp} - \frac{1}{12}C_{mnp}C^{mnp}], \quad (40)$$

donde

$$\chi^{mnp} = \varepsilon^{mnpqrst}\partial_q C_{rst}. \quad (41)$$

En esta acción, C_{mnp} y C^{mnp} son campos independientes. Si se realiza variaciones con respecto a la variable C_{mnp} se obtiene que $C_{mnp} = (1/6)\chi_{mnp}$ y sustituyendo en la acción maestra se obtiene la teoría masiva topológica.

Por otro lado, variaciones independientes con respecto a C_{mnp} , nos dice que $\varepsilon^{mnpqrst}(\partial_q C_{rst} - \mu C_{rst}) = 0$, la cual puede ser resuelta localmente como

$$C_{mnp} = \frac{1}{\mu}C_{mnp} + \partial_m A_{np} + \partial_n A_{pm} + \partial_p A_{mn}.$$

Sustituyendo en la acción maestra, se obtiene la acción auto dual.

5. Conclusiones

En este trabajo, se ha presentado el análisis dinámico hamiltoniano de las teorías masiva topológica y auto dual en siete dimensiones. Ambas teorías describen la propagación dinámica y local de diez grados de libertad. Después de haber obtenido los hamiltonianos, se pudo establecer una relación entre ellas, mostrando así la equivalencia dual entre estas teorías. Esta equivalencia también se refleja a través de la acción maestra(40). La equivalencia establecida es local.

1. S.J. Deser y R.S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 975; *Ann of Phys.* **140** (1982) 372; Erratum *Ann of Phys.* **185** (1988) 406.
2. P.K. Townsend, K. Pilch y Van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett. B* **136** (1984) 38.
3. C. Aragone y A. Khoudeir, *Phys. Lett. B* **173** (1986) 141.
4. S.J. Deser, *Phys. Rev. Lett. B* **139** (1984) 371.
5. R. Gianvittorio, A. Restuccia y J. Stephany, *Mod. Phys. Lett. A* **6** 2121 (1991); J. Stephany, *Phys. Lett. B* **390** (1997) 128; J. Stephany y P.J. Arias *J. Math. Phys.* **36** 1968 (1995).
6. M. Caicedo, I. Martin y A. Restuccia, *Ann of Phys.* **300** (2002) 32.
7. P.J. Arias y A. Restuccia, *Phys Lett.* **B347** (1995) 241.
8. P.J. Arias y L. Leal, *Phys Lett.* **B404** (1997) 49.