

Formación de paredes de dominio en transiciones de fase de primer orden

J.L. García

Postgrado en Física Fundamental, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela

A. Melfo y N. Pantoja

Centro de Astrofísica Teórica, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela

Recibido el 24 de noviembre de 2003; aceptado el 5 de junio de 2004

Se estudia la formación de paredes de dominio en transiciones de fase de primer orden producidas por un campo escalar que rompe espontáneamente una simetría Z_2 . Se implementa un algoritmo que permite simular la nucleación y colisión de burbujas de la nueva fase, e identificar el número de paredes cerradas y abiertas formadas. Se estudia el caso de simetría Z_2 aproximada, relevante en recientes propuestas de solución al problema de las paredes de dominio en un contexto cosmológico.

Descriptores: Relatividad general; defectos topológicos; paredes de dominio.

We study formation of domain wall in first order phase transition triggered by a scalar field that breaks spontaneously a Z_2 symmetry. An algorithm that allows simulation of bubble nucleation and collision, and counting of open and closed walls formed, is implemented. The case of an approximate Z_2 symmetry, relevant to recent proposals of solutions to the domain wall problem in cosmology is considered.

Keywords: General relativity; topological defects; domain walls.

PACS: 11.27.+d

1. Introducción

Los defectos topológicos como las paredes de dominio surgen como consecuencia del rompimiento espontáneo de un determinado grupo de simetría. En un contexto cosmológico donde las simetrías son restauradas por efecto de altas temperaturas [1], el rompimiento espontáneo de simetrías puede dar lugar a transiciones de fase [2] durante las cuales los defectos topológicos, que son soluciones clásicas a las ecuaciones de movimiento del campo responsable de la ruptura, se crean efectivamente, debido a la presencia de regiones causalmente disconexas en el espacio-tiempo [3].

En este tipo de transiciones de fase, el parámetro de orden es el valor de expectación en el vacío del campo, $\langle\phi\rangle$, que pasa de tener un valor nulo, en el estado simétrico, a tener uno distinto de cero, rompiendo la simetría. Para ciertos tipos de potenciales, esta transición es de primer orden, procediendo mediante nucleación de burbujas. Si la simetría rota espontáneamente es discreta, es decir si existe una multiplicidad de vacíos (típicamente se considera el caso con simetría Z_2), el valor de $\langle\phi\rangle$ dentro de cada burbuja será independiente. Esto trae como consecuencia la formación de paredes de dominio cuando las burbujas logran percolar y cubrir todo el espacio-tiempo.

En simulaciones estándar de producción de defectos topológicos, se toman redes bidimensionales donde a cada celda que representa las regiones desconectadas causalmente, se le asignan al azar valores positivos o negativos y se estudian la formación de grupos de celdas de un vacío determinado [4]. Es deseable estudiar un escenario más real, prescindiendo del uso de redes preestablecidas y estudiando la probabilidad de formar paredes cuando el sistema efectivamente consiste de burbujas que crecen y colisionan. En el contexto similar de ruptura de simetría $U(1)$ para producir vórtices, se

han estudiado el efecto de la geometría de la colisión [5] y de la velocidad de expansión de las burbujas [6]. En el caso de las paredes de dominio, es de particular interés estudiar la situación en que la simetría discreta no es exacta sino aproximada, ya que esto podría proporcionar una solución al llamado problema de las paredes de dominio. Zel'dovich, Kobsarev y Okun [7], sugirieron que si la simetría discreta no es exacta, la diferencia de energía entre los dos vacíos podría causar que las regiones de falso vacío desaparecieran, posiblemente antes de que las paredes comienzen a dominar la densidad de energía del universo.

En este trabajo estudiaremos la probabilidad de formación de paredes de dominio en este caso. Para ello, se estudia en primer lugar la formación de paredes en una red amorfá, formada por burbujas nucleadas en diferentes momentos y a distancias determinadas por las probabilidades de nucleación. En segundo lugar se considera el caso de un potencial no degenerado, donde las probabilidades de nucleación son distintas. Se estudia la dependencia del número de paredes formadas con la asimetría del potencial.

2. Nucleación de burbujas

La dinámica del campo escalar está dada por el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (1)$$

La probabilidad de que el campo haga túnel entre el mínimo local y el global será [5]

$$\Gamma = Ae^{-S_E}, \quad (2)$$

donde S_E es la acción euclídea. Se puede demostrar que a temperatura cero, en un espacio-tiempo plano, las soluciones

que minimizan la acción son invariantes bajo el grupo de rotaciones euclídeas cuadridimensional es $O(4)$ [6]. De manera que se buscan soluciones a las ecuaciones de movimiento donde ϕ es sólo función de la coordenada radial. Haciendo la extensión analítica al espacio tiempo minkowskiano, puede verse que esta solución representa una burbuja que se expande, alcanzando asintóticamente la velocidad c .

Consideramos un potencial de la forma

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\phi^2(|\phi| - v)^2 - \frac{\varepsilon v}{3}(|\phi|^3 - v^3) + \frac{\eta v}{3}\phi^3. \quad (3)$$

Los mínimos de este potencial son

$$\phi_{\pm} = v[1 + 2(\frac{\varepsilon \mp \eta}{\lambda})], \quad \phi_0 = 0, \quad (4)$$

y la diferencia de energía entre los mínimos en $\phi = 0$ (V_0) y $\phi = \phi_{\pm}$ (V_{\pm}) será

$$\Delta V_{\pm} = V_0 - V(\pm) = v^4 \left(\frac{\varepsilon \pm \eta}{3} \right);$$

$$\Delta V_+ - \Delta V_- = -\frac{2}{3}\eta v^4. \quad (5)$$

Con objeto de implementar la simulación, es necesario estimar el radio inicial de las burbujas y determinar si puede ser comparable a la distancia media entre los puntos de nucleación. Utilizando la acción euclídea en la aproximación de pared fina, es posible calcular [6] los radios iniciales de las diferentes burbujas que se nuclean dependiendo de la transición hecha por el campo escalar. Para una transición entre ϕ_0 y ϕ_{\pm} , tendremos

$$R_{\pm} = 6\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{v(\varepsilon \pm \eta)}. \quad (6)$$

Nos referiremos a estas burbujas como “positivas” y “negativas”. Por otra parte, el campo escalar puede decaer desde el falso vacío ϕ_- hasta el verdadero vacío ϕ_+ , en este caso el radio inicial será

$$R_3 = 3\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{\eta v}. \quad (7)$$

Las probabilidades de nucleación van a depender de la diferencia de energía entre los vacíos. Específicamente, se encuentra que la probabilidad por unidad de volumen por unidad de tiempo de que se forme una burbuja positiva o negativa es:

$$\Gamma_{\pm} = A_{\pm} e^{-B_0/(1 \pm \eta/\varepsilon)^3}, \quad (8)$$

Donde B_0 es la acción euclídea en el caso degenerado, mientras que la probabilidad que se forme una burbuja de radio R_3 es

$$\Gamma_3 = A_3 e^{-S_{E3}} = A_3 e^{-D_0/\eta^3}. \quad (9)$$

Es razonable despreciar los coeficientes A_{\pm} , ya que la mayor contribución a la probabilidad de decaimiento la hace el término exponencial. Despreciando los términos cuadráticos en (η/ε) :

$$\frac{\Gamma_+}{\Gamma_-} \simeq 1 + \frac{6B_0\eta}{\varepsilon}. \quad (10)$$

Puede verse que el campo escalar prefiere decaer al verdadero vacío del potencial. Siguiendo un procedimiento análogo, se puede demostrar que $\Gamma_+/\Gamma_{tot} \gg 1$, donde $\Gamma_{tot} = \Gamma_+ \Gamma_-$ corresponde a la probabilidad de que el campo escalar decaiga desde ϕ_0 hasta ϕ_- y luego hasta ϕ_+ :

$$\Gamma_{tot} = e^{-a(R_-^3 + R_3^3)}. \quad (11)$$

y por ende

$$\frac{\Gamma_+}{\Gamma_{tot}} = e^{-a(R_+^3 - R_-^3 - R_3^3)} \quad (12)$$

Es claro que $R_3 \gg R_+$ y por lo tanto el decaimiento Γ_{tot} es menos probable que los anteriores.

De esta manera, la probabilidad de que se forme una burbuja dentro de un volumen ξ^3 por unidad de tiempo ξ viene dada por

$$\Gamma_{\pm} = \frac{1}{\xi_{\pm}^4}. \quad (13)$$

De modo que:

$$\xi_{\pm} = e^{\alpha R_{\pm}^{3/4}} \gg R_{\pm}, \quad (14)$$

donde α es una constante. La expresión anterior indica que las burbujas formadas tienen un radio inicial mucho menor que las dimensiones del volumen en donde “nace” cada burbuja.

Queremos investigar cómo depende la formación de paredes de dominio con la diferencia de energía entre los dos vacíos; para ello, hemos implementado una simulación de formación de paredes de dominio en transiciones de fase de primer orden con un algoritmo diseñado bajo las siguientes suposiciones:

- El decaimiento Γ_3 es menos probable que los otros dos decaimientos (Γ_{\pm}) y por tanto despreciable.
- Las burbujas nacen con un radio mucho menor que las dimensiones de la celda, luego $R_{0+} = R_{0-} = 0$.
- Debido al punto anterior, se puede asumir también que en el momento en que colisionan las burbujas se expanden con una velocidad $v \sim c$.

3. Implementación del algoritmo

Consideraremos, por razones de limitaciones de cómputo, formación de burbujas en un espacio-tiempo (2+1) dimensional, lo que permite elegir una escala de longitud

$$\xi_{\pm} = \left(\frac{1}{\Gamma_{\pm}} \right)^{1/3}. \quad (15)$$

El programa implementado parte de una distribución aleatoria de burbujas + y -, separadas por una distancia cuya media es ξ_{\pm} , y cuyas paredes se expanden a velocidad 1. Para cada par de burbujas, y tomando en cuenta su signo, se calcula la ecuación que describe la posición de las paredes de dominio formadas, registrando las intersecciones entre ellas con los bordes de la simulación. Una vez completada la transición

de fase (cuando las burbujas llenan la simulación), se cuenta el número de paredes formadas, que serán de tipo “infinito” (aquellas que tocan los bordes de la simulación) o cerrado. El algoritmo se escribió en el lenguaje del programa Maple. Para cada caso, se promediaron 100 simulaciones.

3.1. Caso simétrico

Se consideró primero la formación de paredes en el caso de burbujas nucleadas aleatoriamente siguiendo una distribución normal en torno a los centros de cada una de las n^3 celdas de dimensión ξ^3 en la red de simulación, para un potencial con simetría Z_2 ($\eta = 0$). Los eventos quedan especificados como $B_i \equiv (\vec{x}_i, t_i, s_i)$, donde \vec{x}_i , t_i y s_i corresponden a la posición inicial, el tiempo y el signo de la burbuja i . Se eliminan los eventos de nucleación que representan burbujas que nacen en lugares ya ocupados por otras nucleadas anteriormente. De esta manera, el número de burbujas formadas es aproximadamente igual a n^2 , la dimensión espacial de la red.

Se estudió el efecto de la dispersión en la formación de burbujas y consecuentemente, en la formación de paredes, encontrándose que las variaciones no son significativas. Posteriormente se estudió la formación de paredes con el cambio de la cantidad de burbujas colocadas en la red entre un cierto rango dado por las limitaciones del programa (Fig. 1), de modo de estimar el número de burbujas mínimo necesario para obtener resultados confiables. Se encuentra que el número de paredes “infinitas” como función del número de burbujas tiende a una constante.

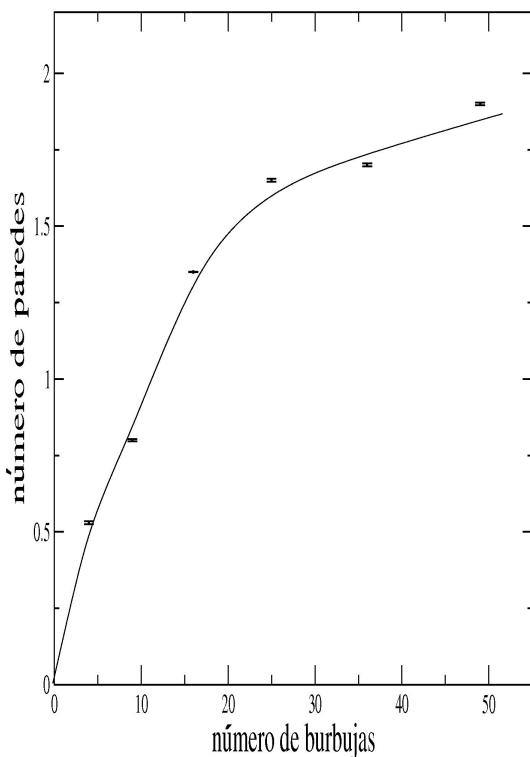


FIGURA 1. Estabilización en la formación de paredes con el número de burbujas.

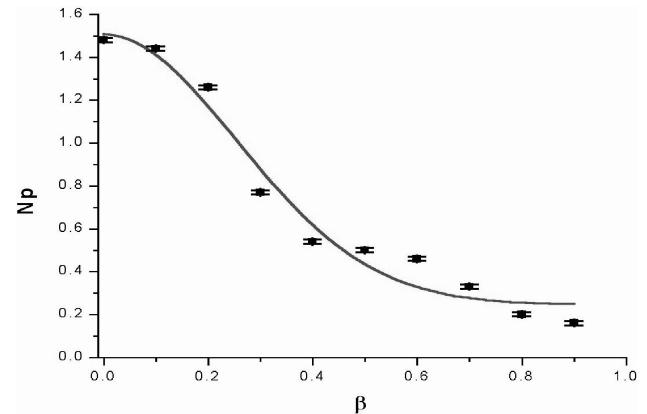


FIGURA 2. Decaimiento en el número de paredes con el parámetro de asimetría.

3.2. Caso asimétrico

Para poder estudiar el caso de potenciales asimétricos, se procedió a colocar dos redes superpuestas con celdas de distintas dimensiones, ξ_+^3 y ξ_-^3 , respectivamente, especificando los eventos de nucleación del mismo modo que en el caso simétrico, independientemente para cada. Es conveniente parametrizar:

$$\xi_- = (1 + \beta)\xi_+, \quad (16)$$

de modo que

$$\frac{\Gamma_+}{\Gamma_-} = (1 + \beta)^3 \simeq (1 + 3\beta). \quad (17)$$

Comparando con la Ec. (10), puede verse que el parámetro β será el que regula la asimetría del potencial en la simulación, y se tomaron valores entre $0 < \beta < 0.8$. La variación en la distribución de paredes con parámetro de asimetría β es mostrada en la Fig 2.

4. Conclusiones

El estudio detallado de las probabilidades de túnel en un potencial con simetría aproximada Z_2 permite justificar la aproximación de radio inicial cero para las burbujas, así como de velocidad de colisión c . Se determina también que la probabilidad de nucleación de burbujas del verdadero vacío dentro de burbujas con vacío aproximado es despreciable.

Con estas aproximaciones se implementó un algoritmo que permite estimar el número de paredes formadas como función del parámetro de asimetría que cuantifica la no-degeneración de los vacíos, β . La distribución de paredes se approxima a una curva gaussiana centrada en $\beta = 0$ con dispersión $\sigma = (0.266 \pm 0.014)$. Se encontró poca variabilidad con el número inicial de burbujas a partir de ~ 32 , por lo que se espera que estos resultados no varíen significativamente en simulaciones mayores.

1. S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **9** (1974) 3357; L. Dolan y R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **9** (1974) 3320.
2. D. Kirzhnits y A. Linde, *Phys. Lett. B* **42** (1972) 47.
3. T.W. Kibble, *Journal. Phys. A* **9** (1976) 1387.
4. T. Vachaspati y A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **30** (1984).
5. S. Coleman, *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2929.
6. T.W. Kibble, T. Vachaspati y A. Vilenkin, *Phys. Rev D* **51** (1995) 1934; A. Melfo y L. Perivolaropoulos, *Phys. Rev. D* **52** (1995) 992; T. Vachaspati, A. Vilenkin, Kibble y Borrill, *Phys. Rev.*
7. Y.B. Zeldovich, I.Y. Kobsareb y L.B. Okun, *Soviet Phys. JETP.* **40** (1975).