

# Soluciones conformemente planas con ecuación de estado no local

A.G. Muñoz S.

Grupo de Investigaciones de Física Teórica (GIFT) Departamento de Física, Facultad de Ciencias,  
La Universidad del Zulia, Maracaibo 4004, Venezuela,  
Postgrado en Física Fundamental, Centro de Astrofísica Teórica (CAT), Facultad de Ciencias,  
Universidad de Los Andes, Mérida, 5101, Venezuela  
e-mail: agmunoz@luz.edu.ve

L.A. Núñez

Centro de Astrofísica Teórica (CAT), Facultad de Ciencias,

Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela,

Centro Nacional de Cálculo Científico Universidad de Los Andes (CeCalCULA),  
Corporación Parque Tecnológico de Mérida, Mérida 5101, Venezuela,  
e-mail: nunez@ula.ve

Recibido el 4 de noviembre de 2003; aceptado el 19 de junio de 2004

Una ecuación de estado no local describe las componentes del tensor de energía-impulso no sólo como función de un punto, sino como un funcional que toma en consideración la contribución de toda la configuración de materia encerrada hasta ese punto. En este trabajo se muestra que es posible obtener distribuciones de materia físicamente aceptables que poseen simultáneamente tanto una métrica conformemente plana como una ecuación de estado no local. Se presenta la evolución de objetos compactos en distintos escenarios, determinando para el caso quasi-estático las condiciones para la aparición de exfoliación térmica.

**Descriptores:** Ecuación de estado no-local; fluidos anisótropos relativistas; métricas conformemente planas; exfoliación térmica.

A non-local equation of state describes the components of the energy-momentum tensor not only as a function of a point, but as a functional throughout the enclosed configuration. In this work, we show that it is possible to obtain physically acceptable conformally flat, anisotropic matter distributions that satisfy a non-local equation of state. The evolution of such objects is presented, determining for the quasi-static case the conditions for thermic-peeling effect.

**Keywords:** Non-local equation of state; relativistic anisotropic matter distributions; conformally flat metrics; thermic peeling.

PACS: 04.20.Ex; 04.20.Jb; 04.40.Dg

## 1. Introducción

Debido al papel fundamental que juegan las fuerzas gravitacionales, la descripción de la estructura y la evolución estelar está basada en el empleo de las ecuaciones de campo de la relatividad general y/o en la teoría newtoniana de gravitación. Sin embargo, no es menos cierto que la comprensión última de su constitución yace firmemente ligada a la física nuclear y en gran medida al conocimiento actual de la física de densidades supranucleares ( $\approx 10^{14} g cm^{-3}$ ). Las propiedades de la materia en tales estados son esencialmente desconocidas, en gran parte debido a la imposibilidad actual de corroborar experimentalmente las teorías que describen la microfísica del sistema [1]. Hoy día se desconoce aún la ecuación de estado *real* que rige la materia nuclear a tan altas densidades. De allí, pues, la importancia de explorar lo que está permitido o no por las leyes de la física en este contexto.

En este trabajo se desea estudiar la aceptabilidad física y propiedades de esferas relativistas que poseen tanto una ecuación de estado no local como una métrica conformemente plana. Estas condiciones resultan de interés en la medida en que proporcionan ligaduras al sistema auto-gravitante que permiten describir relaciones entre componentes del tensor de energía-impulso. La primera toma en consideración el

comportamiento colectivo de las variables físicas de la configuración de materia a la hora de relacionar presiones radiales y densidades. La segunda permite relacionar tres factores de gran relevancia para el estudio de estos sistemas, a saber, el tensor de Weyl, la anisotropía local de presiones y la inhomogeneidad de la distribución de densidad de energía.

### 1.1. Condición métrica conformemente plana

Una condición necesaria y suficiente para que una métrica sea conformemente plana es que su tensor de Weyl se anule en todo punto. Las componentes linealmente independientes de este tensor pueden escribirse a través de

$$W \equiv \frac{r}{2} C_{232}^3 = \frac{e^{-\lambda}}{6} r^3 \left( \frac{e^\lambda}{r^2} + \frac{\nu' \lambda}{4} - \frac{1}{r^2} - \frac{\nu^2}{4} - \frac{\nu'}{2} - \frac{\lambda - \nu'}{2r} \right) + \frac{e^{-\nu}}{12} r^3 \left( \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} \right). \quad (1)$$

Es posible mostrar [2] que para el caso estático la integración de la condición  $W = 0$ , proporciona la igualdad

$$\frac{\nu'}{2} - \frac{1}{r} = \pm \frac{e^{\lambda/2}}{r} \sqrt{1 - \xi^2 r^2 e^{-\nu}}, \quad (2)$$

con  $\xi^2$  una constante de integración que es función del tiempo en el caso cuasi-estático.

Por otra parte, de (1) puede obtenerse [3], incluso para el caso dinámico general, que

$$W = -\frac{4}{3}\pi \int_0^r r^3 (T_0^0)' dr + \frac{4}{3}\pi r^3 (T_2^2 - T_1^1); \quad (3)$$

y si la métrica es conformemente plana se tiene la siguiente expresión para la anisotropía

$$(T_1^1 - T_2^2) = \frac{1}{r^3} \int_0^r \tilde{r}^3 (T_0^0)' d\tilde{r} \quad (4)$$

## 1.2. Ecuación de estado no local

Una ecuación de estado no local describe, para un punto dado de la distribución de materia, las componentes del tensor de energía-impulso como un funcional de la configuración de materia hasta ese punto. En 1999, Hernández, Núñez y Percoco [4] señalan que si en el elemento de línea,

$$ds^2 = he^{4\beta} dt^2 - \frac{1}{h} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (5)$$

que corresponde a un espacio-tiempo esféricamente simétrico, con  $\beta = \beta(r, t)$ ,  $h = h(r, t)$ , y  $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2$ , se introduce la restricción

$$h(r, t) \equiv 1 - \frac{2m(r, t)}{r} = C(t)e^{-2\beta(r, t)},$$

con  $0 < C(t) < 1$ , (6)

es posible escribir, entre dos de las correspondientes componentes del tensor de energía impulso, la siguiente relación:

$$T_0^0 = -T_1^1 - \frac{2}{r} \int_0^r T_1^1 d\tilde{r} + \frac{\mathcal{K}_0}{r}, \quad (7)$$

donde  $\mathcal{K}_0$  es una función de integración arbitraria dependiente del tiempo. Por otra parte, en términos de los parámetros métricos, esta condición implica, en el caso dinámico,

$$\lambda(r, t) = \nu(r, t) - 2 \ln \left( 1 - 2 \frac{M(t)}{A(t)} \right), \quad (8)$$

siendo  $M(t)$  la masa de la configuración,  $A(t)$  su radio,  $e^\nu = he^{4\beta}$  y  $e^\lambda = 1/h$ .

## 2. La métrica

Introduciendo (8) en la Ec. (1), se obtiene, con  $u \equiv e^{-\nu}$ ,

$$12C^4 r \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} r + \frac{\partial u}{\partial r} \left( 1 + \frac{1}{u^2 C^4} \right) \right] + 24 \left( \frac{1}{u} - C^2 \right) + C^2 r^6 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (9)$$

Una posible solución, que reproduce exactamente el caso estático ( $\xi(t) = ctte$ , Ec. (2) con (8)) y cuasi-estático, es

$$e^{-\nu} = \frac{1}{\xi(t)^2 r^2} \sin^2 \left( \frac{\xi(t)}{C} r + \Delta \right), \quad (10)$$

con  $\Delta$  una constante de integración que en virtud de la condición de regularidad de la función masa en el origen debe ser igual a  $n\pi$  con  $n = 0, 2, 4 \dots$  (se tomará aquí  $n = 0$ , por simplicidad); y  $\xi(t)$  es una función del tiempo cuyo perfil se obtiene numéricamente de (9).

Para esta solución las condiciones de acoplamiento proporcionan, en general, un sistema de dos ecuaciones trascendentales con dos incógnitas, que se debe resolver numéricamente. En cuanto a las variables físicas, es posible despejar algebraicamente de las ecuaciones de campo la densidad propia de energía, la presión radial, la presión tangencial y el flujo de calor,  $\rho$ ,  $P_r$ ,  $P_t$  y  $Q$ , respectivamente. Sin embargo, para su determinación completa hace falta (en todos los casos excepto para  $P_t$ ) la velocidad radial del correspondiente elemento del fluido. Nótese que ésta puede obtenerse, en general, de la ecuación de anisotropía (4).

## 3. Evolución lenta

Se dice que una estrella evoluciona cuasi-estáticamente, cuando cambia muy poco en una escala de tiempo muy grande comparada con la escala de tiempo típico en el cual el sistema reacciona a una perturbación del equilibrio hidrostático. En general, para cualquier etapa de la vida de una estrella, este tiempo es muy pequeño; por ejemplo, para el Sol es de unos 27 minutos; 4.5 segundos para una enana blanca y del orden de una parte en diez mil ( $10^{-4}$ ) segundos para una estrella de neutrones de una masa solar y 10 km de radio [5].

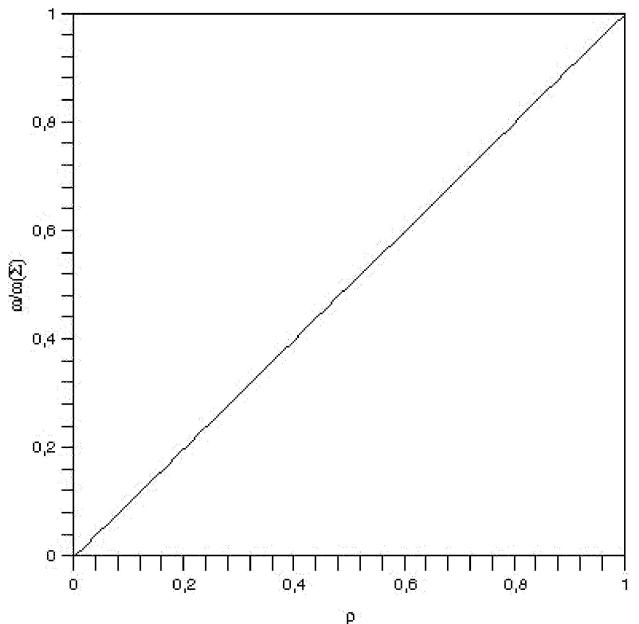


FIGURA 1. Colapso homólogo de una distribución adiabática con  $M = 0,396A$ . ( $\rho \equiv r/a$ ).

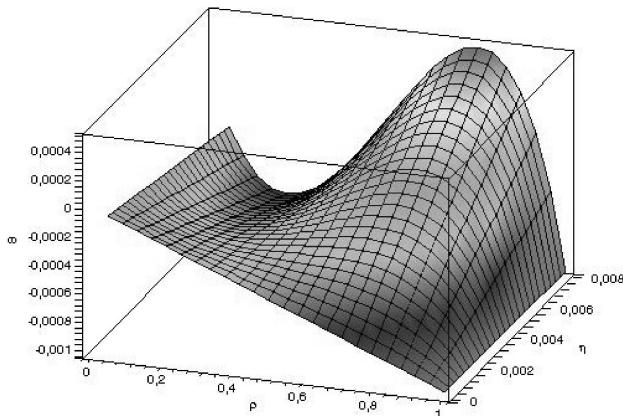


FIGURA 2. Configuración en colapso con  $\omega_{\Sigma} = -10^{-3}$ ,  $M = 0,388A$  ( $\rho \equiv r/a$ ). Exfoliación térmica múltiple.

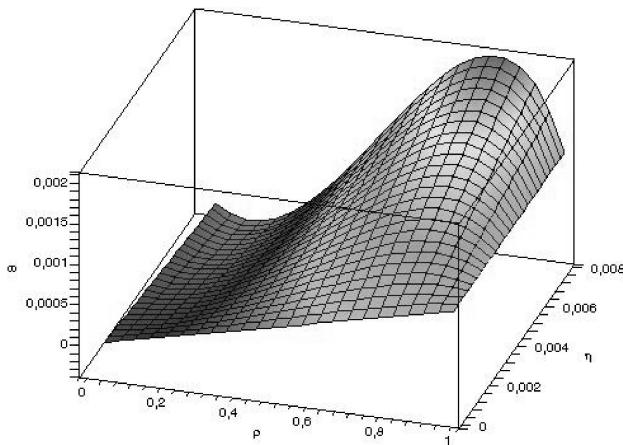


FIGURA 3. Configuración en expansión con  $\omega_{\Sigma} = 10^{-3}$ ,  $M = 0,388A$  ( $\rho \equiv r/a$ ). Exfoliación térmica simple.

En este caso, es posible obtener para la velocidad radial,

$$\omega = -\frac{e^{(\lambda-\nu)/2}}{(\rho + P_r)} \left[ \frac{\dot{m}}{4\pi r^2} + Q e^{\nu/2} \right]. \quad (11)$$

Si el colapso es adiabático, al introducir las correspondientes expresiones, la ecuación anterior resulta en

$$\omega = -\left(\frac{r}{a}\right) \left[ \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\xi}{C}r\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\xi}{C}a\right)} \frac{\Gamma(a)\Pi(r)}{\Gamma(r)\Pi(a)} \right] \omega_{\Sigma}, \quad (12)$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma(r) &\equiv (2M-a) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\xi}{C}r\right) \\ &+ \xi r a \operatorname{sen}\left(\frac{\xi}{C}r\right) \cos\left(\frac{\xi}{C}r\right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Pi(r) \equiv (a-2M) \operatorname{sen}\left(\frac{\xi}{C}r\right) - \xi r a \cos\left(\frac{\xi}{C}r\right). \quad (14)$$

La esfera colapsa así homólogamente, como se muestra en la Fig. 1.

En el caso disipativo, en aras de estudiar la aparición de exfoliación térmica en estos modelos se introducirá un perfil de flujo de calor dado por

$$Q = \frac{\eta e^{-r/a} m}{4\pi r^2 M} e^{-\nu/2}, \quad (15)$$

con  $\eta$  un factor numérico de orden  $\omega$ . Los correspondientes valores de la velocidad radial se ilustran en las Figs. 2 (colapso) y 3 (expansión). Nótese la aparición de exfoliación térmica: dependiendo del valor de la coordenada radial algunas capas se contraen mientras que otras se expanden dentro del mismo objeto compacto.

#### 4. Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado la estructura y evolución de esferas relativistas con métricas conformemente planas y ecuación de estado no local. Estas soluciones proporcionan de manera natural un valor de densidad central típica del orden de  $10^{15} g cm^{-3}$ , cumplen con las condiciones de energía y son regulares en todo punto, por lo que resulta físicamente factible el modelaje de estrellas de neutrones altamente compactas con este tipo de condiciones. Para el caso estático existe un único valor posible de la compactibilidad, a saber  $M/A = 0,396$ , que proporciona un corrimiento al rojo gravitacional  $z = 1,202$ . Se ha hecho aquí énfasis especialmente en la evolución en régimen cuasi-estático de estas configuraciones, tanto el colapso adiabático como el caso con disipación térmica. El primero presenta contracción en régimen homólogo, mientras que el segundo caso, dada una función de prueba para el flujo térmico, presenta una evolución no lineal. El análisis llevado a cabo muestra que es posible obtener exfoliación térmica simple y múltiple (las capas más internas colapsan, las intermedias se expanden y las superficiales colapsan también), según si la configuración está en expansión o en contracción, respectivamente, y según la intensidad del campo gravitacional superficial y la opacidad de la materia constituyente. En general se encontró que distribuciones en colapso gravitacional y con flujo de calor presentan exfoliación térmica para valores extremos de la compactibilidad del objeto estelar; por ejemplo para una configuración con  $\omega_{\Sigma} = -10^{-3}$  y la opacidad del medio caracterizada por  $\eta = 8 \times 10^{-3}$  sólo ocurre exfoliación térmica o bien para  $M/a < 0,17$  o bien para  $M/a > 0,33$ . Similarmente, el fenómeno tiende a ocurrir para valores grandes del flujo. En particular, para una distribución en expansión ( $\omega_{\Sigma} = 10^{-3}$ ) con  $M/a = 0,35$ , el proceso ocurre para  $\eta \geq 6 \times 10^{-3}$ .

1. N.K. Glendenning, *Compact Stars* (New York: Springer Verlag, 2000).
2. L. Herrera, A. Di Prisco, J. Ospino y E. Fuenmayor, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2129 (también en e-print, gr-qc/0102058).
3. L. Herrera y N.O. Santos, *Gen. Rel. Grav.* **27** (1995) 1071.
4. H. Hernández, L. Núñez y U. Percoco, *Class. Quantum Grav.* **16** (1999) 897.
5. R. Kippenhahn y A. Weigert, *Stellar Structure and Evolution* (Berlin: Springer Verlag, 1990).