Covariancia de la teoría autodual vectorial*

P.J. Arias [a,b] y M.A. García-Ñustes[a]
[a]*Centro de Física Teórica y Computacional,Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela,*
Apartado Postal 47270, Caracas 1041-A, Venezuela
[b]*Centro de Astroísica Teórica, Facultad de Ciencias ULA,*
La Hechicera, Mérida 5101, Venezuela

Recibido el 24 de noviembre de 2003; aceptado el 30 de enero de 2004

A partir de la acción reducida de la teoría autodual vectorial en 2+1 se obtiene el álgebra de Poisson entre los campos que intervienen en la acción original. Las cargas conservadas asociadas a la invariancia bajo el grupo inhomogéneo de Lorentz son calculados así, como su acción sobre los campos. El álgebra de Schwinger es obtenida y con ella se muestra la covariancia de la teoía. Se discute el spin de las excitaciones.

Descriptores: Formulación lagrangiana; álgebra de Poincaré.

The Poisson algebra between the fields involved in the vectorial selfdual action is obtained by means of the reduced action. The conserved charges associated with the invariance under the inhomogeneous Lorentz group are obtained and its action on the fields. The covariance of the theory is proved using the Schwinger-Dirac algebra. The spin of the excitations is discussed.

Keywords: Lagrangian formulation; Poincaré algebra.

PACS: 11.10.Ef; 03.70.+k; 11.30.Cp

El estudio de teorías vectoriales y tensoriales en 2+1 dimensiones estuvo inicialmente motivado por su conexión con el comportamiento de modelos, en 3+1 dimensiones, a altas temperaturas [1]. Sin embargo, en la actualidad, la física planar posee un interés real intrínseco, ya que presenta características propias que hacen sumamente atractivo su estudio y análisis en el contexto de la teoría cuántica de campos. En el presente trabajo analizamos la teoría autodual vectorial masiva en 2+1 dimensiones, obteniéndose su espectro físico, se obtienen los generadores de las transformaciones infinitesimales y analizamos su covariancia. La covariancia de la teoría es mostrada usando el álgebra de Schwinger-Dirac.

La teoría autodual vectorial está descrita por la acción [2]

$$S = -\frac{\mu}{2}\int d^3x\,\left(\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda + \mu A_\mu A^\mu\right). \qquad (1)$$

Esta acción no posee invariancia local y puede mostrarse que corresponde a una fijación de calibre de la teoría topológica masiva vectorial [3-7]. Además, ambos modelos puede probarse que son duales uno del otro [7-9]. Las ecuaciones de movimiento son

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda + \mu A^\mu = 0, \qquad (2)$$

de donde $A_o = (1/\mu)\varepsilon_{ij}\partial_i A_j$ con $\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{oij}$.

Si hacemos la descomposición 2+1 de la acción, utilizando la metrica $\eta_{\mu\nu} = (-++)$, obtenemos

$$S = -\frac{\mu}{2}\int d^3x\,\left(\varepsilon^{oij}\left(A_o\partial_i A_j - A_i\dot{A}^j + A_i\partial_j A_o\right)\right) + \int d^3x\left(\mu A_i A^i - \mu A_o A_o\right), \qquad (3)$$

de donde utilizando la descomposición transverso-longitudinal

$$A_i = \varepsilon_{ij}\partial_j A_T + \partial_i A_L \equiv A_i^T + A_i^L,$$

con A_i^T es la parte transversal de A_i y A_i^L es la parte longitudinal de A_i, y junto con la expresión (3) llegamos a,

$$S = \int d^3x\left(-\frac{1}{2}(-\Delta)A_T(-\Delta)A_T - \frac{\mu^2}{2}A_T(-\Delta)A_T\right) - \int d^3x\left(\frac{\mu^2}{2}A_L(-\Delta)A_L - \mu\dot{A}_T(-\Delta)A_L\right), \qquad (4)$$

donde $\Delta = \partial_i\partial_i$.

Si hacemos las definiciones,

$$Q = (-\Delta)^{1/2}A_T \qquad (5)$$

$$\Pi = -\mu(-\Delta)^{1/2}A_L, \qquad (6)$$

podemos llegar a la acción reducida,

$$S = \int d^3x\,\left(\dot{Q}\,\Pi - \frac{1}{2}Q(-\Delta+\mu^2)Q - \frac{1}{2}\Pi\,\Pi\right), \qquad (7)$$

que corresponde a la acción de una excitacón de masa μ y con hamiltoniano definido positivo.

La ventaja de (7) es que permite obtener directamente los corchetes de Poisson entre las variables originales. Postulando los corchetes fundamentales entre el campo $Q(x)$ y su momentos conjugado $\Pi(x)$, usando (3) y (6) obtenemos

$$\{A_o(x)\,, A_o(y)\} = 0, \qquad (8)$$

$$\{A_o(x)\,, A_i(y)\} = \frac{1}{\mu^2}\partial_i\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \qquad (9)$$

$$\{A_i(x)\,, A_j(y)\} = -\frac{1}{\mu}\varepsilon_{ij}\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \qquad (10)$$

los cuales son consistentes con (3).

Veamos, ahora, las cantidades conservadas asociadas a invariancias de la teoría bajo el grupo inhomogéneo de Lorentz. Asociado a las traslaciones tenemos el tensor de energía-momento canónico de la teoría

$$T^{\mu}{}_{\nu}=L\delta^{\mu}{}_{\nu}-\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}A_{\rho})}\partial_{\nu}A_{\rho}, \tag{11}$$

$$T^{\mu}{}_{\nu}=-\frac{\mu}{2}\varepsilon^{\beta\mu\sigma}\left(A_{\nu}\partial_{\sigma}A_{\beta}-A_{\beta}\partial_{\sigma}A_{\nu}\right)-\frac{\mu^2}{2}A^{\nu}A_{\nu}\delta^{\mu}{}_{\nu}, \tag{12}$$

éste satisface $\partial_{\mu}T^{\mu\nu}=0$ sobre (2). De igual forma, asociadas a las rotaciones espacio-temporales tenemos el tensor de densidad de momento angular

$$M^{\mu\alpha\beta}=-\varepsilon^{\alpha\beta\rho}\left[\varepsilon_{\rho\sigma\mu}T^{\mu\sigma}x^{\lambda}+\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}A_{\theta})}\varepsilon_{\rho\theta}{}^{\nu}A_{\nu}\right] \tag{13}$$

el cual satisface $\partial_{\mu}M^{\mu\alpha\beta}=0$ sobre (2).

Se sabe que a partir de $T^{\mu}{}_{\nu}$, podemos construir el tensor simétrico, de Belifante, $\Theta_B^{\mu\nu}$[10], el cual resulta ser "*on shell*".

$$\Theta_B^{\mu\nu}=m^2A^{\mu}A^{\nu}-\frac{m^2}{2}\eta^{\mu\nu}A^{\alpha}A_{\alpha} \tag{14}$$

$\Theta_B^{\mu\nu}$ es conservado y sus cargas asociadas son las mismas de $T^{\mu\nu}$.Además, podemos construir un tensor equivalente al tensor de densidad de momento angular $M^{\mu\alpha\beta}$ utilizando el tensor $\Theta_B^{\mu\nu}$,

$$M_B^{\mu\alpha\beta}=x^{\beta}\Theta_B^{\mu\alpha}-x^{\alpha}\Theta_B^{\mu\beta} \tag{15}$$

$M_B^{\mu\alpha\beta}$ es trivialmente conservado debido a la conservación de $\Theta_B^{\mu\nu}$ y sus cargas asociadas son las mismas que $M^{\mu\alpha\beta}$.

Las cargas conservadas asociadas al $\Theta_B^{\mu\nu}$ y al $M_B^{\mu\alpha\beta}$ son

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_B^{\mu}&=\int d^2x\Theta_B^{o\mu}\equiv\int d^2x\,\mathcal{P}^{\mu}\\&=\int d^2x\left(m^2A^{o}A^{\nu}-\frac{m^2}{2}\eta^{o\mu}A^{\alpha}A_{\alpha}\right)\end{aligned} \tag{16}$$

y

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_B^{\alpha\beta}&=\int d^2x\left(\Theta_B^{o\mu}x^{\nu}-\Theta_B^{o\nu}x^{\mu}\right)\\&=-\int d^2x\varepsilon^{\alpha\beta\rho}\varepsilon_{\rho\sigma\lambda}\mathcal{P}_B^{\sigma}x^{\lambda},\end{aligned} \tag{17}$$

respectivamente. Ahora deseamos comprobar que éstas efectivamente generan las transformaciones de los campos. Para esto calculamos, los corchetes de Poisson, usando (10) y (16),

$$\{A_o(x)\,,\varepsilon\,P_B^{o}(y)\}=\varepsilon\partial_iA_i, \tag{18}$$

$$\left\{A_o(x)\,,\varepsilon_i\,P_B^{i}(y)\right\}=-\varepsilon_i\partial_iA_o, \tag{19}$$

$$\{A_i(x)\,,\varepsilon\,P_B^{o}(y)\}=\varepsilon\left(\partial_iA_o-\mu\,\varepsilon_{ij}A_j\right), \tag{20}$$

$$\left\{A_i(x)\,,\,\varepsilon_j\,P_B^{j}(y)\right\}=-\varepsilon_j\partial_jA_i. \tag{21}$$

Usando las ecuaciones de movimiento (2) es inmediato ver que

$$\{A_{\mu},\varepsilon_{\nu}P_B^{\nu}\}=-\varepsilon_{\nu}\partial^{\nu}A_{\mu},$$

con $\varepsilon_{\mu}=(\varepsilon,\varepsilon_j)$. Análogamente calculamos con (10) y (15)

$$\begin{aligned}\left\{A_i(x)\,,\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{J}_B^{\alpha\beta}(y)\right\}&=\omega_{ol}x^{o}\left(\partial_iA_l-\mu\varepsilon_{il}A_o\right)\\&+\omega_{ol}x^{l}\left(\partial_iA_o-\mu\varepsilon_{ik}A_k+\delta_i{}^{l}A_o\right)\\&+\frac{1}{2}\omega_{kl}\varepsilon_{kl}\left(\varepsilon_{ij}A_j-\mu x^{i}A_o-\varepsilon_{mn}x^{n}\partial_iA_m\right),\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\left\{A_o(x)\,,\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{J}_B^{\alpha\beta}(y)\right\}&=\frac{1}{2}\omega_{kl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}x^{i}\partial_jA_o\\&+\omega_{ol}\left(A_l+x^{o}\partial_lA_o+x^{l}\partial_kA_k\right),\end{aligned} \tag{23}$$

que con (2) nos lleva a,

$$\begin{aligned}&\left\{A_{\mu}(x)\,,\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{J}_B^{\alpha\beta}(y)\right\}\\&\quad=-\frac{1}{2}\omega_{\delta\theta}\varepsilon^{\delta\theta\lambda}\left[\varepsilon_{\lambda\mu}{}^{\nu}A_{\nu}+\varepsilon_{\lambda\rho}{}^{\nu}x^{\rho}\partial_{\nu}A_{\mu}\right],\end{aligned} \tag{24}$$

que corresponde a la transformación infinitesimal del campo A_{μ} para una transformación de Lorentz. Para una transformación combinada tendremos entonces que

$$\delta A_{\mu}=\left\{A_{\mu}\,,\,-\varepsilon_{\nu}P^{\nu}+\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{J}^{\alpha\beta}\right\}. \tag{25}$$

Prosiguiendo con nuestro análisis, deseamos comprobar que la teoría es invariante relativista para esto observamos (3) y utilizando el reemplazo $\{\quad\}\rightarrow-i[\quad]$, tenemos

$$[\Theta^{oo}(x),\Theta^{oo}(y)]=-i\left(\Theta^{oi}(x)+\Theta^{oi}(y)\right)\partial_i\delta^2(\vec{x}-\vec{y}), \tag{26}$$

$$\begin{aligned}[\Theta^{oo}(x),\Theta^{oi}(y)]=-i\,&\left(\Theta^{ij}(x)\right.\\&\left.+\,\Theta^{oo}(y)\delta^{ij}\right)\partial_j\delta^2(\vec{x}-\vec{y}),\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}[\Theta^{oi}(x),\Theta^{oj}(y)]=-i\,&\left(\Theta^{oj}(x)\partial_i\right.\\&\left.+\,\Theta^{oi}(y)\partial_j\right)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}),\end{aligned} \tag{28}$$

que es justamente el álgebra de Schwinger-Dirac, para una teoría vestorial masiva. Ésta garantiza que las cargas conservadas asociadas P^{μ} y $\mathrm{J}^{\alpha\beta}$ obedezcan el álgebra de Poincaré [11]. Para ver esto, notamos que

$$\begin{aligned}\left[\mathrm{P}^{o}\,,\,\Theta^{oi}(x)\right]&=\int d^2y[\Theta^{oo}(y),\Theta^{oi}(x)]\\&=\int d^2y\left(\Theta^{ij}(y)+\eta^{ij}\Theta^{oo}(x)\right)\partial_j{}^{y}\delta^2(\vec{x}-\vec{y})\\&=-i\partial_o{}^{x}\Theta^{io}(x),\end{aligned}$$

como $\dot{\mathrm{P}}^{\mu}$=0, entonces $\left[\mathrm{P}^{o},\Theta^{oi}\right]$=0, de donde $[\mathrm{P}^0,\mathrm{P}^j]=0$.

Así mismo,

$$\left[\mathrm{J}^{oi}\,,\,\mathrm{P}^{o}\right] = \int d^2y\, d^2x[\Theta^{oo}(x)x^i - \Theta^{oi}(x)t, \Theta^{oo}(y)]$$
$$= \int d^2yx^i\left[\Theta^{oo}(x), \mathrm{P}^o\right] - t\left[\Theta^{oi}(x), \mathrm{P}^o\right]$$
$$= -i\int d^2xx^i\partial_j{}^x\Theta^{oj} = i\int d^2x\Theta^{oi} = i\mathrm{P}^i.$$

Procediendo de manera análoga obtenemos

$$[\mathrm{J}^{ij}, \mathrm{P}^k] = i\left(\delta^j_k\mathrm{P}^i - \delta^i_k\mathrm{P}j\right),\ [\mathrm{J}^{ij}, \mathrm{P}^o] = 0,$$
$$[\mathrm{J}^{oi}, \mathrm{P}^j] = i\delta^{ij}\mathrm{P}^o,$$
$$[\mathrm{J}^{oi}, \mathrm{J}^{oj}] = i\mathrm{J}^{ij},\ [\mathrm{J}^{oi}, \mathrm{J}^{kl}] = i\left(\mathrm{J}^{ol}\eta^{ik} - \mathrm{J}^{ok}\eta^{il}\right),$$
$$[\mathrm{J}^{ik}, \mathrm{J}^{ml}] = i\left(\mathrm{J}^{il}\eta^{km} + \mathrm{J}^{lk}\eta^{im} - \mathrm{J}^{mk}\eta^{il} - \mathrm{J}^{im}\eta^{kl}\right).$$

Todos los corchetes se escriben así de manera covariante como

$$[\mathrm{P}^\mu, \mathrm{P}^\nu] = 0, \tag{29}$$
$$[\mathrm{J}^{\mu\nu}, \mathrm{P}^\lambda] = i\left(\mathrm{P}^\mu\eta^{\nu\lambda} - \mathrm{P}^\nu\eta^{\mu\lambda}\right), \tag{30}$$
$$[\mathrm{J}^{\mu\nu}, \mathrm{J}^{\sigma\rho}] = i\left(\mathrm{J}^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho} + \mathrm{J}^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \mathrm{J}^{\nu\rho}\eta^{\mu\sigma} - \mathrm{J}^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\right). \tag{31}$$

Esto último es el álgebra de ISO(2,1) en 2+1 dimensiones, quedando así mostrada la invariancia de la teoría autodual vectorial bajo transformaciones del grupo de Poincaré.

Por último analicemos la contribución del espín en la teoría realizando el siguiente procedimiento sobre el espacio de momento. Haciendo la siguiente expansión en modos para Q(x)[3]:

$$\mathrm{Q}(x) = \int \frac{d^2\vec{k}}{2\pi\sqrt{2\omega(\vec{k})}}\left[e^{ik.x}a(\vec{k}) + e^{-ik.x}a^\dagger(\vec{k})\right], \tag{32}$$

donde $k^\mu = (\omega(\vec{k}), \vec{k})$, con $\omega(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2}$ y $[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k'})] = \delta(\vec{k} - \vec{k'})$. Encontramos que los generadores son como los del campo escalar, excepto para los *boosts* de Lorentz, en donde se encuentra un termino extra, el cual introduce lo que parece una anomalía a la teoría

$$\mathrm{J}^{oi} = \frac{i}{2}\int d^2\vec{k}\,\omega(\vec{k})[a^\dagger(\vec{k})\overleftrightarrow{\partial_i}\,a(\vec{k})] - \mu\int d^2\vec{k}\varepsilon^{ij}\frac{k^i}{\vec{k}^2}a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}). \tag{33}$$

Esto proviene del hecho de que el campo que describe la única excitación posible, no es realmente un escalar. A fin de evitar esta “anomalía” se redefine la fase de los operadores de creación y aniquilación de la forma $a(\vec{k}) \to e^{i(\mu/|\mu|)\theta}a(\vec{k})$. De esta forma el generador de rotaciones adquiere un termino de espín,

$$\mathrm{J} = \int d^2\vec{k}\,a^\dagger(\vec{k})\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}a(\vec{k}) + \frac{\mu}{\mid\mu\mid}\int d^2\vec{k}a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}), \tag{34}$$

mientras que los generadores de los *boosts* toman la forma

$$\mathrm{J}^{oi} = \frac{i}{2}\int d^2\vec{k}\,[a^\dagger(\vec{k})\overleftrightarrow{\partial_i}\,a(\vec{k})] + \frac{\mu}{\mid\mu\mid}\int d^2\vec{k}\frac{1}{\omega(\vec{k}) + \mid\mu\mid}\varepsilon^{ij}k^ja^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}), \tag{35}$$

en el cual la “anomalía” ya no se encuentra.

Lo anterior pone en evidencia un espín $\mu/\mid\mu\mid$, cuyo signo depende del termino de Chern-Simons de la acción, el cual no afecta la positividad del hamiltoniano. Este resultado se obtiene exactamente como con el caso de la teoría topológica masiva [3].

Para concluir hemos observado que la teoría autodual vactorial es covariante de Poincaré y que las cargas asociadas a la invariancia bajo este grupo son las generadoras de las transformaciones infinitesimales como era de esperarse. La discusión en relación al espín de las excitaciones se da de igual manera que en la teoría topológica masiva. Toda la discusión partió de llevar la acción a sus grados físicos de libertad sin necesidad de hacer el procedimiento de Dirac para lagrangianos singulares.

∗ Poster presentado en el IV Congreso de S.V.F

1. D. Gross, R.D. Pisarski y L.G. Yaffe, *Rev. Mod. Phys* **53** (1981) 43.
2. P.K. Townsend, K. Pilch y P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett.* **136B** (1984) 38.
3. S. Deser, R. Jackiw y S. Templeton, *Annals Phys***140** (1982) 372.
4. S. Deser y R. Jackiw, *Phys. Lett. B***139** (1984) 371.
5. R. Gianvittorio, A Restuccia y J. Stephany, *Mod. Phys. Lett. A* **6** (1991) 2121.
6. P.J. Arias, A. Restuccia, *Phys. Lett. B* **347** (1995) 1868.
7. P.J. Arias, L. Leal y A. Restuccia, *Phys. Lett. B* **404** (1997) 49.
8. J. Stephany *Phys. Lett. B* **390** (1997) 128.
9. E. Harikumar y M. Sivakumar *Mod. Phys. Lett. A* **15** (2000) 121
10. S. Weinberg, *The quantum theory of fields* **I** (2000) 316.
11. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **127** (1962) 324.