Ondas PP y Curvatura Distribucional

N. Pantoja Y F. Ramírez
Centro de Astrofísica Teórica, Universidad de los Andes,
Mérida 5101,Venezuela

Recibido el 24 de noviembre de 2003; aceptado el 5 de junio de 2004

Realizamos el análisis distribucional de la geometría de un espacio-tiempo asociado a ondas gravitacionales que se propagan en un universo magnético, obteniendo su distribución tensorial de curvatura siguiendo dos procedimientos distintos. Esta curvatura resulta tener partes singulares proporcionales a la distribución δ de Dirac.

Descriptores: Singularidades espacio-temporales; curvatura (distribucional); ondas pp, geometría (distribucional) de Kerr-Schild

We carry out the distributional analysis of the geometry of a spacetime associated to gravitational waves propagating in a magnetic universe, obtaining their distributional curvature tensor following two different approaches. This curvature turns out to have singular parts proportional to Dirac's δ distribution.

Keywords: Spacetimes singulaties; curvature (distributional); pp waves, geometry (distributional) of Kerr-Schild.

PACS: 04.30.-w; 95.85.sz; 04.20.-q; 04.20.Jb

1. Introducción

En la actualidad se cuenta con modelos de gravitación cuántica en (2+1) dimensiones [1], en los cuales persisten las singularidades del espacio-tiempo, lo que nos lleva a pensar que es posible tener singularidades en el caso de mayor dimensionalidad. En relatividad general el manejo de estas singularidades es problemático y frecuentemente eludido, sin embargo nos gustaría disponer de una estructura matemática que permita su tratamiento coherente. La teoría de distribuciones es un fuerte candidato, pero no se trata simplemente de identificar el tensor métrico con una distribución, pues podríamos terminar con un tensor de curvatura mal definido y ecuaciones de campo sin sentido, dada la no linealidad de las ecuaciones.

Considerando las singularidades del espacio-tiempo como aquellas singularidades del tensor métrico que no pueden ser removidas a través de una transformación de coordenadas, que puede incluso no estar definida en la región singular; nos gustaría ver estas singularidades reflejadas en la falta de suavidad del tensor de curvatura. Geroch y Traschen [2] introducen una clase muy restringida de métricas para las cuales el tensor de curvatura tiene sentido como distribución, la de las métricas regulares, que incluye a las métricas de espacio-tiempos con capas delgadas [3]. Gran parte de los espacio-tiempos físicamente interesantes no son regulares, por lo que Garfinkle [4] disminuye las restricciones sobre las métricas para que tengan curvatura con sentido distribucional y las llama semiregulares, siendo las regulares una subclase de éstas. En un acercamiento diferente al problema, Balasin [5,6], propone un tratamiento distribucional de la curvatura, explotando la geometría de Kerr-Schild de algunos espacio-tiempos.

En las teorías de cuerdas en espacio-tiempos curvos existe un gran interés en el estudio de las denominadas ondas pp, pues estos espacio-tiempos son soluciones exactas en estas teorías y su espectro puede ser explícitamente determinado. También, las teorías de cuerdas en fondos de ondas pp, se han estudiado en la búsqueda de una conección entre la gravedad cuántica y teorías de calibre [7]. Por otro lado, los fondos de ondas pp impulsivas han sido considerados en el estudio de la correspondencia ADS/CFT [8,9]. Se han estudiado soluciones clásicas de branas en fondos de ondas pp con la idea de que nuestro universo se encuentra embebido en un mundo de alta dimensionalidad [10,11,12]. Incluso se ha introducido un modelo de mundo-brana en el cual la solución del *bulk* consiste en una onda plana [13].

En lo que sigue estudiaremos la curvatura distribucional de una onda pp de acuerdo a la propuesta de Garfinkle en [4], y al tratamiento que permite su geometría de Kerr-Schild siguiendo [5,6].

2. Métricas semiregulares. Geometría de Kerr-Schild

Un campo tensorial g_{ab} definido sobre una variedad $\mathcal{M}$ es llamado métrica *semirregular* [4] siempre que

1. g_{ab} y $(g^{-1})^{ab}$ existan en casi todas partes y sean localmente integrables.
2. La primera derivada débil $\widetilde{\nabla}_c g_{ab}$ de g_{ab} en alguna métrica suave $\tilde{g}_{ab}$ exista y los tensores

$$C^c{}_{ab} \equiv \frac{1}{2}\left(g^{-1}\right)^{cd}\left(\widetilde{\nabla}_a g_{bd} + \widetilde{\nabla}_b g_{ad} - \widetilde{\nabla}_d g_{ab}\right) \quad (1)$$

y $C^d{}_{m[b}C^m{}_{a]c}$ sean localmente integrables.

Éstas son las condiciones mínimas para que sea definible como distribución el tensor de curvatura dado por

$$R^d{}_{abc} = \widetilde{R}^d{}_{abc} + 2\widetilde{\nabla}_{[b}C^d{}_{a]c} + 2C^d{}_{m[b}C^m{}_{a]c}\,, \quad (2)$$

donde $\widetilde{\nabla}_c$ es el operador derivada compatible con $\tilde{g}_{ab}$ y $\widetilde{R}^d{}_{abc}$ su tensor de curvatura. Contrayendo adecuadamente los indices se tiene para el tensor de Ricci

$$R^a{}_b = (g^{-1})^{ac}\widetilde{R}_{cb} + 2\widetilde{\nabla}_{[c}\left(C^c{}_{d]b}(g^{-1})^{ad}\right)$$
$$+2C^c{}_{b[c}\widetilde{\nabla}_{d]}(g^{-1})^{ad} + 2(g^{-1})^{ad}C^c{}_{m[c}C^m{}_{d]b}. \quad (3)$$

Si la geometría permite una descomposición en la forma de Kerr-Schild [5,6]

$$g_{ab} = \widetilde{g}_{ab} + \widehat{f} k_a k_b \ , \quad k_a = g_{ab} k^b \ , \quad k^a k^b g_{ab} = 0, \quad (4)$$

donde $k^a = \widetilde{g}^{ab} k_b$ es un campo vectorial nulo con respecto a $\widetilde{g}^{ab}$, lo que implica a su vez nulidad respecto de g_{ab}, entonces podemos identificar la región singular con las singularidades de $\widehat{f}$. La expresión para el tensor de Ricci es

$$R^a{}_b = \widetilde{R}^a{}_b - \frac{1}{2}\Big(\widetilde{R}^a{}_c \widehat{f} k^c k_b - \widetilde{R}_{bc} \widehat{f} k^c k^a - 2\widetilde{R}^a{}_{cdb} \widehat{f} k^c k^d + \Big(\widetilde{\nabla}^a \widetilde{\nabla}_c(\widehat{f} k^c k_b) + \widetilde{\nabla}_b \widetilde{\nabla}_c(\widehat{f} k^c k^a) - \widetilde{\nabla}_c \widetilde{\nabla}^b(\widehat{f} k^a k_b)\Big)\Big) \quad (5)$$

que es válida siempre que el lado derecho de (5) tenga sentido como distribución. Las ondas pp son una subclase del tipo Kerr-Schild.

3. Ondas sobre un universo magnético

Consideremos el siguiente tensor métrico que es solución a las ecuaciones de Einstein-Maxwell y representa ondas viajeras cuyo fondo es el denominado universo magnético cilíndrico [14]

$$g_{ab} = \eta_{ab} + (H-1) d\rho_a d\rho_b + (H^{-1}-1)\rho^2 d\theta_a d\theta_b + H^{-1} f(u) \ln\frac{B^2\rho^2}{4} du_a du_b + 2(H-1) du_{(a} dv_{b)}, \quad (6)$$

donde $H = (1+\frac{1}{4}B^2\rho^2)^2$, B es un campo magnético constante y $f(u)$ es alguna función suave de u.

Probaremos que (6) es una métrica semirregular, que se puede descomponer a la forma de Kerr-Schild y calcularemos el tensor de Ricci de ambas formas. La inversa viene dada por

$$(g^{-1})^{ab} = (\eta^{-1})^{ab} + (H^{-1}-1)\partial^a_\rho \partial^b_\rho + (H-1)\rho^{-2}\partial^a_\theta \partial^b_\theta + H^{-3} f(u) \ln\frac{B^2\rho^2}{4} \partial^a_v \partial^b_v + 2(H^{-1}-1)\partial^{(a}_u \partial^{b)}_v. \quad (7)$$

Sea S^{ab} un campo tensorial de prueba en $\mathbb{R}^4$; entonces

$$g_{ab}[S^{ab}] = \int\limits_{\mathbb{R}^4} \eta_{ab} S^{ab}\omega_\eta + \int\limits_{\mathbb{R}^4} 2(H-1) S^{(uv)}\omega_\eta + \int\limits_{\mathbb{R}^4} (H-1)\left(\cos^2\theta S^{xx} + \sin\theta\cos\theta(S^{xy}+S^{yx}) + \sin^2\theta S^{yy}\right)\omega_\eta$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^4} (H^{-1}-1)\left(\cos^2\theta S^{yy} - \sin\theta\cos\theta(S^{xy}+S^{yx}) + \sin^2\theta S^{xx}\right)\omega_\eta + \int\limits_{\mathbb{R}^4} H^{-1} f(u)\ln\frac{B^2\rho^2}{4} S^{uu}\omega_\eta, \quad (8)$$

donde $\omega_\eta = \rho du dv d\rho d\theta$ es el elemento de volumen asociado a η_{ab} y se verifica que (6) es localmente integrable. En forma análoga se prueba que (7) es también localmente integrable.

Calculemos la derivada débil en η_{ab} de g_{ab}:

$$W_{cab} = H\rho^3 B^2 \xi(\rho)\left(d\theta_a d\rho_b d\theta_c + d\rho_a d\theta_b d\theta_c\right) - H^{-\frac{3}{2}} f(u)\left(\ln\frac{B^2\rho^2}{4} B^2\rho - H^{\frac{1}{2}}\frac{2}{\rho}\right) du_a du_b d\rho_c$$
$$+ H^{\frac{1}{2}}\rho B^2\left(dv_a du_b d\rho_c + du_a dv_b d\rho_c\right) - H^{\frac{3}{2}}\rho^3 B^2 d\theta_a d\theta_b d\rho_c + f'(u)\ln\frac{B^2\rho^2}{4} H^{-1} du_a du_b du_c, \quad (9)$$

donde $\xi(\rho)$ es una función de potencias positivas de ρ por lo que W_{cab} es localmente integrable. Se calcula también el tensor de Christoffel y de éste se construye $2C^d{}_{m[b}C^m{}_{a]c}$, ambos son tensores localmente integrables.

Partiendo de (3) podemos calcular el tensor de Ricci con los índices mixtos, tomando en cuenta que $\widetilde{R}_{cb} = 0$ y $2C^c{}_{b[c}\widetilde{\nabla}_{d]}(g^{-1})^{ad} = 0$. Sea $S_a{}^b$ un campo tensorial de prueba sobre $\mathbb{R}^4$, tenemos

$$R^a{}_b[S_a{}^b] = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^4 - B_\epsilon}\left(\widetilde{\nabla}_d(C^c{}_{cb}(g^{-1})^{ad}S_a{}^b) - \widetilde{\nabla}_c(C^c{}_{db}(g^{-1})^{ad}S_a{}^b)\right)\omega_\eta\right.$$
$$\left. - \int\limits_{\mathbb{R}^4 - B_\epsilon}\left(\widetilde{\nabla}_c(C^c{}_{db}(g^{-1})^{ad}) - \widetilde{\nabla}_d(C^c{}_{cb}(g^{-1})^{ad})\right) S_a{}^b\omega_\eta\right] + \int\limits_{\mathbb{R}^4} 2(g^{-1})^{ad} C^c{}_{m[c}C^m{}_{d]b} S_a{}^b\omega_\eta, \quad (10)$$

donde el primer término provee la contribución tipo delta del Ricci. Los otros términos proporcionarán el tensor de Ricci "tradicional" $\widehat{R}^a{}_b$, esto es, el obtenido en geometría diferencial estándar. El primer término es

$$-\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^4 - B_\epsilon}\left(\widetilde{\nabla}_c(C^c{}_{db}(g^{-1})^{ad}S_a{}^b) - \widetilde{\nabla}_d(C^c{}_{cb}(g^{-1})^{ad}S_a{}^b)\right)\omega_\eta = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{S_\epsilon}\left(C^c{}_{db}(g^{-1})^{ad}d\rho_c - C^c{}_{cb}(g^{-1})^{ad}d\rho_d\right) S_a{}^b\sigma$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{S_\epsilon} du dv d\theta \frac{4096 f(u)\epsilon\left(-4 - B^2\epsilon^2 + ln\frac{B^2\epsilon^2}{4}B^2\epsilon^2\right)}{(4+B^2\epsilon^2)^7\epsilon} S_v{}^u = -2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty} du \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv f(u)\partial^a_v du_b S_a{}^b(u,v,0,0), \quad (11)$$

donde se ha usado que B_ϵ es la esfera de radio ϵ alrededor del origen, S_ϵ es su superficie, $\sigma = \rho\, dudvd\theta$ es el elemento de superficie y $-d\rho_c$ es la normal externa a la superficie. De (10) y (11) se sigue que

$$R^a{}_b = -2\pi f(u)\delta(x)\delta(y)\partial^a_v du_b + \widehat{R}^a{}_b\,, \tag{12}$$

entonces, si $f(u)$ tiene soporte compacto, el espaciotiempo es una onda viajera con una singularidad tipo δ que se propaga con la onda.

Por otro lado, la métrica (6) puede ser escrita en la forma generalizada de Kerr-Schild como

$$\begin{aligned} g_{ab} &= H\left(du_{(a}dv_{b)} + d\rho_a d\rho_b\right) + H^{-1}\rho^2 d\theta_a d\theta_b \\ &+ H^{-1}f(u)\ln\frac{B^2\rho^2}{4}du_a du_b\,, \end{aligned} \tag{13}$$

donde los vectores nulos y la función $\widehat{f}$ que satisfacen las condiciones (4) son

$$k_a = \frac{du_a}{1+\frac{1}{4}B^2\rho^2}\,, \qquad \widehat{f} = f(u)\ln\frac{B^2\rho^2}{4}, \tag{14}$$

y se identifica la métrica de fondo con

$$\widetilde{g}_{ab} = H\left(du_{(a}dv_{b)} + d\rho_a d\rho_b\right) + H^{-1}\rho^2 d\theta_a d\theta_b\,. \tag{15}$$

Se puede verificar que los términos de (5) que involucran Ricci y Riemann de la métrica de fondo, son tensores localmente integrables y por lo tanto tienen sentido como distribución. El término que dará la contribución tipo delta del tensor de Ricci es

$$\begin{aligned} &-\mathrm{lím}_{\epsilon\to 0}\tfrac{1}{2}\textstyle\int_{\mathbb{R}^4-B_\epsilon}\widehat{f}k^a k_b\widetilde{\nabla}^c\widetilde{\nabla}_c S_a{}^b\omega_\eta \\ &= -\mathrm{lím}_{\epsilon\to 0}\tfrac{1}{2}\Big[-\textstyle\int_{S_\epsilon}\widehat{f}k^a k_b dr_c\widetilde{\nabla}^c S_a{}^b\sigma \\ &\quad + \int\limits_{S_\epsilon}\widetilde{\nabla}^c(\widehat{f}k^a k_b)dr_c S_a{}^b\sigma \\ &\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^4-B_\epsilon}\widetilde{\nabla}_c\widetilde{\nabla}^c(\widehat{f}k^a k_b)S_a{}^b\omega_\eta\Big]\,, \end{aligned} \tag{16}$$

donde

$$\begin{aligned} &-\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{S_\epsilon}\widetilde{\nabla}^c(\widehat{f}k^a k_b)dr_c S_a{}^b\sigma \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\int\limits_{S_\epsilon}dudvd \\ &\times\theta\epsilon\frac{du_b\partial^a_v 512\xi(u)(2\ln\frac{\epsilon^2B^2}{4}\epsilon^2B^2 - 4 - \epsilon^2B^2)}{(4+\epsilon^2B^2)^5\epsilon}S_a{}^b \\ &= -2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}dudv\xi(u)\partial^a_v du_b S_a{}^b(u,v,0,0), \end{aligned} \tag{17}$$

los otros términos proporcionarán el Ricci usual $\widehat{R}^a{}_b$ obteniendo

$$R^a{}_b = -2\pi f(u)\delta(x)\delta(y)\partial^a_v du_b + \widehat{R}^a{}_b\,. \tag{18}$$

4. Conclusiones

Para la onda pp que se propaga en el universo magnético cilíndrico [14], encontramos en la aproximación de Garfinkle un tensor de Ricci distribucional, proporcional a una delta de Dirac 2-dimensional con soporte en el origen $x = y = 0$ más el tensor de Ricci usual, este último justificado por la presencia de una fuente de campo magnético. Se sigue que el Ricci distribucional es equivalente al usual, excepto en el origen, justo donde el tensor métrico es singular. En el enfoque de Balasin, usando la forma generalizada de Kerr-Schild de este espaciotiempo, se obtuvo el mismo resultado. Es de hacer notar que el hecho de que ambos tratamientos del problema arrojen el mismo resultado está lejos de ser trivial, ya que a la fecha no se ha podido demostrar su equivalencia.

1. E.A. Minassian, *Class. Quant. Grav.* **19** (2002) 5877, gr-qc/0203026.
2. R. Geroch y J. Traschen, *Phys. Rev. D* **36** (1987) 1017.
3. W. Israel, *Nuovo Cimento. B* **44** (1966)1, Erratum: **48** (1967) 463.
4. D. Garfinkle, *Class. Quantum Grav.* **16** (1999) 579, gr-qc/9906053.
5. H. Balasin y H. Nachbagauer, *Class. Quantum Grav* **11** (1994) 1453, gr-qc/9312028.
6. H. Balasin, *Class. Quantum Grav.* **14** (1997) 3353, gr-qc/9702060.
7. G.T. Horowitz y A.A. Tseytlin, *Phys. Rev. D* **51** (1995) 2896, hep-th/9409021.
8. J. Maldacena, *Adv. Theor. Math.Phys.* **2** (1998) 231.
9. D. Berenstein, J. Maldacena y H. Nastase, *JHEP.* **0204** (2002) 013, hep-th/0202021.
10. V. Rubakov y M. Shaposhnikov, *Phys. Lett. B* **125** (1983) 139.
11. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos y G. Dvali, *Phys. Lett. B* **429** (1998) 263, hep-ph/9803315.
12. L. Randall y R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370, hep-ph/9905221; *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4690, hep-th/9906064.
13. G.T. Horowitz, I. Low y A. Zee, *Phys. Rev. D* **62** (2002) 086005, hep-th/0004206.
14. D. Garfinkle y M.A. Melvin, *Phys. Rev. D* **45** (1992) 1188.