

## Identificación del sistema de Rössler: enfoque algebraico y algoritmos genéticos

C. Aguilar Ibáñez, J. Sánchez H., M.S. Suárez C. y F. Flores A.  
CIC-IPN, Av. Juan de Dios Bátiz s/n Esq. Manuel Othón de M.  
Unidad Profesional Adolfo López Mateos, Col. Nueva Industrial Vallejo,  
México, D.F., 07700, México  
e-mail: caguilar@cic.ipn.mx

R. Garrido M. y R. Martínez G.  
CINVESTAV-IPN, Departamento de Control Automático

Recibido el 25 de mayo de 2004; aceptado el 7 de julio de 2005

En este artículo se presenta un método para determinar los parámetros del atractor de Rössler de forma muy aproximada, por medio de la observación de una variable disponible. Se demuestra que el sistema es algebraicamente observable e identificable con respecto a la salida elegida. Este hecho permite construir una parametrización diferencial de la salida y de sus respectivas derivadas. A partir de esta parametrización, se establece un esquema de identificación basado en el método de mínimos cuadrados y la solución es encontrada por un algoritmo genético.

**Descriptores:** Sistemas caóticos; problema inverso; estimación de parámetros y estados.

This article presents a method to determine the parameters of Rössler's attractor in a very approximated way, by means of observations of an available variable. It is shown that the system is observable and identifiable algebraically with respect to the chosen output. This fact allows to construct a differential parametrization of the output and its derivatives. Using this parametrization an identification scheme based on least mean squares is established and the solution is found with a genetic algorithm.

**Keywords:** Chaotic systems; inverts problem; parameters and states estimation.

PACS: 05.45.Gg; 05.45.Pq; 05.45.Xt

### 1. Introducción

En las décadas recientes se ha prestado gran atención al problema de la identificación y/o reconstrucción de los sistemas caóticos a partir del conocimiento de una o más de sus variables; el interés se debe a que estos sistemas pueden ser aplicados en una amplia variedad de problemas de la física, la ingeniería, la ecología y la biología, por mencionar algunas [6, 7, 12, 14, 15]. La reconstrucción de un sistema caótico a partir del conocimiento o disponibilidad de una o algunas de sus variables (mensurables), consiste, *grosso modo*, en encontrar el modelo inverso de tal sistema. Dicho de otra forma, al tener un conocimiento parcial del atractor, se desean extraer las variables y parámetros desconocidos de éste. Cabe resaltar que la motivación para buscar solución a este problema se debe a que, en muchas aplicaciones prácticas o reales, no todas las variables se pueden medir ni todos los parámetros están disponibles. Generalmente este problema puede ser resuelto a través de dos enfoques: el primero se basa en el teorema de la reconstrucción de Takens o sistemas embebidos [1–3, 15], y el otro se basa en el uso de observadores de estado y sistemas de identificación, desarrollados por la teoría de control [8–10, 13]. Ambos enfoques permiten reconstruir o estimar las variables faltantes, asumiendo que se dispone de una o algunas de sus variables.

En este trabajo resolvemos el problema de la identificación de parámetros y la estimación de variables de estado para el sistema de Rössler, mediante el conocimiento de una

salida en particular (*variable y* del modelo de Rössler). El esquema propuesto se basa en las propiedades algebraicas de observabilidad e identificabilidad que el sistema de Rössler satisface. Estas propiedades permiten encontrar una parametrización diferencial de la salida y un número finito de sus respectivas derivadas. La parametrización nos permite proponer un esquema de identificación no lineal en los parámetros, basado en el método de mínimos cuadrados, el cual es resuelto eficientemente por un algoritmo genético (**GA**).

El trabajo se organiza como sigue: en la Sec. 2 se estudian las propiedades algebraicas del sistema de Rössler, en la Sec. 3 se propone un observador proporcional integral de orden reducido (**OPIOR**), que permite estimar las derivadas de la salida. Las conclusiones se presentan en la Sec. 4, y en el apéndice se incluye una breve introducción de **GAs** y la demostración de la proposición.

### 2. Propiedades del sistema de Rössler

Consideremos el sistema de Rössler (**RS**) [11] descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c).\end{aligned}\tag{1}$$

Se sabe que en una vecindad de los parámetros  $\{a = b = 0.2, c = 5\}$  este sistema presenta comportamiento caótico (nótese que sólo se cuenta con un término no-lineal) [12].

**Definición 1:** Considérese un sistema indeterminado de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$G(t, x_i, y, \dot{y}, \dots, y^{(m)}, P) = 0, \quad (2)$$

donde  $X^T = [x_1, \dots, x_n] \in R^n$  es un vector de estado y  $P^T = [p_1, \dots, p_l] \in R^l$  es un vector de parámetros constantes. Supóngase que existe una correspondencia suave, local y uno a uno entre la solución  $X(t)$  del sistema (2) y una función arbitraria  $y(t) = h(t, X(t)) \in R$ , entonces se dice que el estado  $x_i$  es observable algebraicamente con respecto a  $y(t)$ , si satisface la siguiente relación algebraica:

$$x_i = \frac{f_i(y, \dots, y^{(m)}, P)}{g_i(y, \dots, y^{(s)}, P)}; \quad m \leq s; \text{ con coeficientes en } R,$$

donde  $f_i, g_i$  y  $h$  son mapas suaves,  $l$  y  $m$  son enteros,  $y^{(k)}$  es la  $k$ -ésima derivada de  $y$ . La variable  $y$  es la salida. Si  $x_i$  es observable para todo  $i = 1, \dots, n$ , entonces se dice que el sistema es completamente observable.

**Definición 2:** Considérese nuevamente el sistema (2) bajo las mismas condiciones de la Definición 1. Si se puede encontrar un mapa suave  $W : R^j \rightarrow R^l$  tal que

$$0 = W(y, \dot{y}, \dots, y^{(j)}, P),$$

entonces se dice que el vector de parámetros  $P$  es identificable algebraicamente con respecto a la salida  $y$ .

Una interpretación intuitiva de lo anterior es que un sistema es algebraicamente observable si existe una variable medible  $y$ , tal que todas las variables del sistema se puedan expresar como parametrizaciones diferenciables exclusivamente en términos de  $y$ . Si el vector  $P$  es raíz de una función paramétrica diferencial de la salida  $y$ , decimos que el sistema es identificable con respecto a dicha salida [10, 13].

A continuación verificamos que **RS** satisface las definiciones previas cuando tomamos  $y = F$ . Este sistema es algebraicamente observable con respecto a  $y$ , ya que las variables  $x$  y  $z$  pueden reescribirse como,

$$x = \dot{F} - aF \quad ; \quad z = -\ddot{F} + a\dot{F} - F. \quad (3)$$

De  $\dot{z}$  obtenemos  $F^{(3)}$  :

$$F^{(3)} = -b + (\ddot{F} - a\dot{F} + F)(\dot{F} - aF - c) + a\ddot{F} - \dot{F}. \quad (4)$$

Por lo tanto, el sistema (1) es identificable con respecto a la salida  $F$ , porque la última parametrización diferencial puede ser escrita como

$$0 = W(F, \dot{F}, \ddot{F}, F^{(3)}, P); \text{ con } P \triangleq [a, b, c]. \quad (5)$$

### 3. Estimación de estados e identificación de parámetros

Antes de abordar los problemas de identificación y estimación se deben establecer las siguientes suposiciones.

**S1.** Los estados del sistema no-lineal (1) se mueven alrededor de cero.

**S2.** Se dispone del conjunto de variables

$$V_F = \{F(t_k), \dots, F^{(3)}(t_k)\}$$

en los instantes  $t_k \in \mathfrak{S} = (t_\tau, t_{2\tau}, \dots, t_N)$ , con un tiempo de muestreo  $\tau$ , seleccionado de tal manera que

$$\tau = t_{j+1} - t_j; j = \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Dado que el conjunto de variables  $\{F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}\}$  no están disponible, se propone un observador de estado reducido para estimar estas variables, como se presenta a continuación.

#### 3.1. Observador de orden reducido (OPIOR)

Basándonos en el trabajo de la Ref. 10 se presenta el siguiente estimador:

$$\hat{F}^{(k)} = \gamma_k + k_p \hat{F}^{(k-1)}; \quad k = \{1, \dots, m\}, \text{ con } \hat{F}^{(0)} = y, \quad (6)$$

donde

$$\dot{\gamma}_k = -k_p(\gamma_k + k_p \hat{F}^{(k-1)}) + \rho_k + k_i \hat{F}^{(k-1)}, \quad (7)$$

$$\dot{\rho}_k = -k_i(\gamma_k + k_p \hat{F}^{(k-1)}). \quad (8)$$

Sea el error  $\xi_k = F^{(k)} - \hat{F}^{(k)}$ ,  $k = \{1, 2, \dots, m\}$ , la siguiente proposición nos permite calcular el error.

**Proposición 1:** Sea el sistema (1) bajo la suposición **S1**, entonces el estimador propuesto en (6) a (8) es capaz de recuperar las derivadas de la salida con un error,

$$|\xi_k(t)| \leq \beta_k n_{(k+2)} / \lambda^* \quad (9)$$

donde  $\lambda^*$  está dada por

$$\lambda^* = \frac{1}{2} \mathcal{R}[-k_p + \sqrt{k_p^2 - 4k_i}],$$

$\beta_k$  es una constante positiva que depende de las condiciones iniciales  $\xi_k(0)$  y  $\xi_k(0)$ , y  $n_k$  satisface  $|F^{(i)}(t)| \leq n_k$ ,  $k = \{1, 2, \dots, m\}$ . (Ver el Apéndice para la demostración).

##### 3.1.1. Simulaciones numéricas

La eficiencia del **OPIOR** se verificó mediante simulaciones, usando el algoritmo de Runge-Kutta-4. El cálculo se realizó con una precisión de 8 dígitos decimales, desde  $t = 0$  a  $t = 10$  segundos. Se usó un paso de integración de 0.0001. Los valores de los parámetros del **RS** se eligieron como  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$  y  $c = 4$ , y las condiciones iniciales se establecieron como  $x(0) = -1$ ,  $y(0) = 1$  y  $z(0) = 0$ . Las ganancias del observador fueron tomadas como  $k_p = 1000$  y  $k_i = 250100$ , con condiciones iniciales igual a cero. Después de  $t \approx 0.5$  segundos se observó que los errores promedios de estimación estaban alrededor de  $\xi_1(t) \approx 0.1 \times 10^{-5}$ ,  $\xi_2(t) \approx 0.5 \times 10^{-5}$ , y  $\xi_3(t) \approx 5 \times 10^{-5}$ .

### 3.2. Identificación de parámetros por medio de mínimos cuadrados

La estimación del vector  $p$  está basada en la parametrización diferencial propuesta en (4) y la minimización de la siguiente función cuadrática:

$$S(N) = \min_{p \in R^3} \sum_{j=0}^{k=N} \left( \hat{F}^{(3)}(t_j, p) - F^{(3)}(t_j) \right)^2; \quad \text{con } t_k \in \mathfrak{S}, \quad (10)$$

donde el símbolo " $\hat{F}^{(3)}(\cdot)$ " denota al estimador paramétrico de la tercera derivada con respecto al tiempo de  $F$  dado por

$$\begin{aligned} \hat{F}^{(3)}(t, p) = & -p_1 + (\ddot{F}(t) - p_0 \dot{F}(t) + F(t))(\dot{F}(t) \\ & - p_0 F(t) - p_3) + p_0 \ddot{F}(t) - \dot{F}(t), \end{aligned} \quad (11)$$

con  $p = [p_0, p_1, p_2] \in R^3$ .

Enfatizamos que si el vector  $p$  toma los valores reales dados por  $p_r = [a, b, c]$ , entonces  $S(N) = 0$ . Esto significa que encontrar vector de parámetros desconocidos  $p$  es equivalente a resolver un problema de mínimos cuadrados.

Cabe resaltar que para poder calcular los puntos críticos de la función de costo (10), es necesario resolver tres ecuaciones paramétricas no-lineales con respecto a los parámetros  $\{a, b, c\}$ , las cuales no presentan una solución algebraica; esto conduce a un problema de optimización complejo. Si únicamente se cuenta con la salida  $y = F$ , no es posible obtener analíticamente los parámetros del sistema de Rössler. Sin embargo, es posible obtener una expresión algebraica para los parámetros  $a, b$  y  $c$  siempre y cuando los estados  $x, y$  y  $z$  estén disponibles [14]. Para superar este problema, utilizamos un **GA** para calcular el vector  $p$  que minimiza la expresión (10). Este método es *ad-hoc*, porque evitamos la necesidad de calcular las derivadas con respecto a los parámetros y tener que encontrar las raíces de la función paramétrica no-lineal. Además, se pretende evitar caer en mínimos locales [16–18].

#### 3.2.1. Simulaciones numéricas del GA

Para evaluar la eficiencia del método de identificación, el **GA** estimó el vector  $p$  minimizando (10). Empleando los mismos valores utilizados en la simulación anterior, se estableció un tiempo de muestreo dado en segundos  $\tau = 0.08$ , número de muestras  $N = 25$ , la aptitud (función de costo) fue elegida como  $\alpha = 10^{-9}$ . Las muestras se tomaron en el intervalo de 8 a 10 segundos<sup>ii</sup>. El espacio de búsqueda del vector  $p$  se estableció dentro de un cubo  $R^3$  con centro en  $\bar{p} = [0, 0, 0]$  con aristas de longitud 10.

La Fig. 1 muestra el proceso de evolución de los parámetros  $a, b$  y  $c$ .

Finalmente, en la Tabla I se muestra la evolución de cada parámetro a lo largo de cada generación.

TABLA I. Los mejores individuos de algunas generaciones.

| Generación | a      | b      | c      |
|------------|--------|--------|--------|
| 1          | 0.1675 | 0.0541 | 3.6851 |
| 3          | 0.1972 | 0.3352 | 4.7275 |
| 10         | 0.1973 | 0.1624 | 3.7922 |
| 32         | 0.2000 | 0.2005 | 4.0067 |
| 100        | 0.2000 | 0.1999 | 3.9999 |

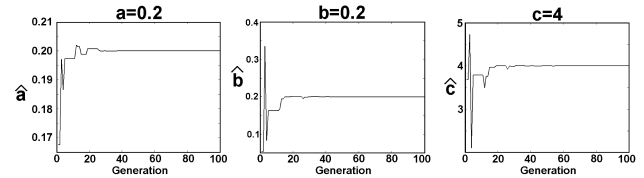


FIGURA 1. Parámetros  $a, b$  y  $c$ .

## 4. Conclusiones

El enfoque algebraico diferencial nos permite resolver el problema de identificación para el sistema de Rössler. Basándonos en el hecho que el sistema Rössler es algebraicamente observable e identificable respecto a la variable  $y$ , hace posible obtener una parametrización diferencial de la salida y sus respectivas derivadas con respecto al tiempo. Cabe resaltar que esta parametrización contiene la información necesaria para recuperar los estados restantes y los parámetros desconocidos. A partir de esto se propone un esquema de identificación que utiliza el método tradicional de mínimos cuadrados, el cual fue resuelto por medio de un **GA**. Es importante mencionar que la parametrización depende de combinaciones no-lineales de los parámetros, la salida y las derivadas de ésta. Estas últimas no están disponibles, sin embargo pueden estimarse con mucha precisión a través de un observador de orden reducido.

## Agradecimientos

Esta investigación fue respaldada por la Coordinación de Posgrado e Investigación del IPN (CGPI-IPN), con número de referencia 20040877.

## Apéndice A

### Breve introducción a GA [17]

1. Los individuos en el **GA** son vectores en  $(R^3)$  de la forma  $q_i = [q_{0,i}, q_{1,i}, q_{2,i}]$ . Se entiende que la codificación en este **GA** es real (en contraste con la codificación binaria).
2. Todas las poblaciones están formadas por 500 individuos.

3. El individuo con la mejor aptitud  $I_m$  (evidentemente clasificado en 1° lugar), de la generación  $P_j$  pasa a la generación  $P_{j+1}$ , sin cambios.

4. La creación de una generación  $P_{j+1}$  incluye los siguientes pasos: i) selección; ii) apareamiento; iii) mutación.

i) La mitad superior de  $P_j$  pasa a la población  $P'_{j+1}$  mientras que la mitad inferior es descartada. Obsérvese que  $P'_{j+1}$  únicamente tiene a los 250 mejores individuos de  $P_j$ .

ii) Para lograr el apareamiento de parejas, los padres son generados de la siguiente manera: a cada individuo en  $P'_{j+1}$  se le asigna una probabilidad que es calculada proporcionalmente de acuerdo a su aptitud. La selección de los individuos se realiza mediante la generación de números aleatorios dentro del rango  $[0, 1]$  (digamos  $\alpha_i$ ) y se comparan con la probabilidad acumulada,  $Ap(q_i)$ , de cada individuo. El individuo  $q_i$  es seleccionado para ser parte de  $P'_{j+1}$  cuando  $\alpha_i \leq Ap(q_i)$ . En una primera ronda un determinado miembro de cada pareja es seleccionado, mientras que en una segunda ronda el otro miembro es elegido. El algoritmo de apareamiento empleado en este **GA** es una ligera modificación del algoritmo conocido como *operador de apareamiento plano* (o *apareamiento aritmético*). Un “descendiente”  $h = [h_0, h_1, h_2]$  es generado como

$$h_i = \beta q_{i,1} + (1 - \beta) q_{i,2}$$

donde los “padres” son

$$q_1 = [q_{0,1}, q_{1,1}, q_{2,1}] \quad ; \quad q_2 = [q_{0,2}, q_{1,2}, q_{2,2}] ,$$

$q_1$  es mejor individuo que  $q_2$  (i.e.  $q_1$  hace la función de error mas pequeña que  $q_2$ ) y  $\beta$  es un número aleatorio elegido uniformemente dentro del intervalo  $[0.5, 1]$ . Este intervalo es utilizado con el objeto de marcar como más “influyente” la información acarreada por el mejor de los padres. Este proceso se repite hasta que un conjunto  $P''_{j+1}$  con 249 “descendientes” es completado. Entonces una nueva población a sido creada:  $P'''_{j+1} = P'_{j+1} + P''_{j+1}$ .

iii) El operador de mutación toma únicamente el 15 % de la población  $P'''_{j+1}$  y modifica un componente de cada uno de estos individuos de forma aleatoria dentro

de la vecindad especificada. Este es el paso final en la creación de la generación  $P_{j+1}$ .

5. La aptitud de cada individuo fue calculada mediante  $S(N)$  donde  $N$  es el número de muestras. El algoritmo se detiene cuando un individuo logra una “aptitud” denominada  $\alpha$ , donde  $\alpha$  se fija tan pequeña como sea necesario.

6. Los componentes del vector  $q = [q_0, q_1, q_2]$  fueron buscados en una “caja” previamente definida; esto significa

$$|q_i - \bar{q}_i| \leq \varepsilon_i, i = \{0, 1, 2\},$$

donde  $\bar{q}_i$  es el centro elegido y  $\varepsilon_i$  es el radio que puede ser elegido tan grande como sea necesario.

**Demostración de la Proposición 1:**(únicamente para  $k = 1$ ) Usando la derivada respecto al tiempo de (6), en combinación con las Ecs. (7) y (8); y después de algunas manipulaciones obtenemos

$$\hat{F}^{(3)} = -k_p(\ddot{\hat{F}} - \ddot{y}) - k_i(\dot{\hat{F}} - \dot{y}).$$

Al restar  $y^{(3)}$  en ambos lados de la ecuación diferencial anterior y sustituyendo el error  $\xi_1 = \hat{F} - y$ , llegamos a

$$\dot{w} = Aw + \delta_y, \quad (12)$$

donde

$$w = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_i & -k_p \end{bmatrix}; \quad \delta_y = \begin{bmatrix} 0 \\ -y^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Entonces es claro que el error  $w(t)$  satisface

$$w(t) = e^{A(t-t_0)} \left( w(0) + \int_{t_0}^t e^{A(t_0-s)} \delta_y(s) ds \right).$$

Puesto que  $A$  es exponencialmente estable y la señal  $y(t)$  es acotada, tenemos la siguiente desigualdad:

$$\|w(t)\| \leq \beta e^{-\lambda^* t} \|w(0)\| + \beta n_3 (1 - e^{-\lambda^* t}) / \lambda^* \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \beta n_3 / \lambda^*,$$

donde  $n_3$  se elige de tal forma que  $|y^{(3)}(t)| \leq n_3$ . Los otros casos donde  $k = \{2, \dots, m\}$  pueden hacerse de la misma forma.

i. Debemos notar que  $n_k$  se puede tomar como  $\max_{t \in [t_i, t_f]} |F^{(i)}(t)|$ . Aun así, en la mayoría de los casos no es necesario calcularla.

ii. Las muestras fueron tomadas después de ocho segundos, debido a las características asintóticas del estimador (**OPIOR**) i.e., el estimador recupera con mayor exactitud a mayor tiempo

transcurrido.

1. K.T. Alligood, T.D. Sauer y J.A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems* (Springer-Verlag, New York, 1997).  
2. D. Hand y M. Berthold, *Intelligent Data Analysis: An introduction*, 2nd edition (Springer-Verlag, 2002).

3. T. Sauer, J. Yorke y M. Casdagli, *J. Stat. Phys.* **65** (1991) 579.
4. T. Stojanovski, U. Parlitz, L. Kocarev y R. Harris, *Physics Letters A* **233** (1997) 355.
5. U. Feldmann, M. Hasler y Schwarz, *International Journal of Circuit Theory and Applications* **24** (1996) 551.
6. D.S. Broomhead y G.P. King, *PhysD* **20** (1986) 217.
7. J.F. Gibson, J.D. Farmer, M. Casdagli y S. Eubank, *Physica D* **57** (1992) 1.
8. G. Cheng y X. Dong, "Identification and control of chaotic systems", in *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Systems* (Seattle, WA, 1995).
9. M.S. Suárez-Castañón, C. Aguilar-Ibáñez y R. Barrón-Fernandez, *Physics Letters A* **308** (2003) 47.
10. R. Martínez-Guerra y J. Mendoza-Camargo, *IMA Journal Mathematical Control and Information* (2004) p. 493.
11. O.E. Rossler, *Physics Letter A* **57** (1976) 397.
12. S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Perseus Publishing, 1994).
13. M. Fliess y Sira-Ramirez, *ESAIM Contr. Opt. Calc. Variat.* **9** (2003).
14. G.L. Baker, J.P. Gollub y J.A. Blackburn, American Institute of Physics, *Chaos*, **6** (1996) 528.
15. C. Lainscsek y I. Gorodnitsky, "Reconstructing Dynamical Systems from Amplitude Measures of Spiky Time-Series", 8th Joint Symposium on Neuronal Computation at the Salk Institute, La Jolla, California (May 19, 2001).
16. D. Goldberg, *Genetic Algorithms: Search and Optimization Algorithm* (Addison-Wesley Publishing, Massachusetts, 1989).
17. M. Mitchel, *An Introduction to Genetic Algorithms* (MIT Press, London, 1998).
18. T. Back, D. Fogel y Z. Michalewicz, *Evolutionary Computation 1: Basic Algorithms and Operators* (Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2000).