

¿Ayuda la teoría de errores a diseñar experimentos?

J. L. Haza

Departamento de Física, Universidad Pedagógica "Félix Varela"

Calle 2da, Edif. 8, Apto. 2, Villa Clara, CUBA.

e/ E y G, Rpto. Sta Catalina

Sta Clara, 50300, V. C., CUBA

e-mail: cdip@varela.esivc.colombus.cu

Recibido el 21 de septiembre de 2000; aceptado el 01 de marzo de 2002

La teoría de errores, aplicada a las mediciones físicas, constituye una de las herramientas que ayuda al científico a resolver la contradicción modelo-realidad durante la realización de experimentos como parte del proceso constante de producción de nuevos conocimientos. La escuela, como proceso simulado de construcción de conocimientos, debe usar esta herramienta, en las condiciones más adecuadas, para el diseño de experimentos docentes correctamente concebidos que logren que el alumno se convenza de la veracidad de las construcciones teóricas. En la práctica escolar, la teoría de errores aplicada a los experimentos de física habitualmente se convierte en una práctica formal y se reduce a una larga serie de operaciones de cálculo para obtener, finalmente, un número que acompañará al valor hallado de la magnitud para expresar el resultado. El artículo que presentamos ofrece, tomando como ejemplo la tarea experimental consistente en la determinación del valor de la aceleración de la gravedad usando la máquina de Atwood, un análisis acerca de cómo el criterio de calidad de las mediciones físicas, derivado del error relativo, influye en el diseño correcto del experimento y determina el intervalo de los valores que deben tomar las magnitudes en la experiencia a realizar para garantizar su fuerza informativa.

Descriptores: Experimento, errores, mediciones, enseñanza.

The theory of errors, applied to physical measurements, is one of the useful tools to aid scientists to solve the reality-model contradiction during the realization of experiments as part of the constant process of production of new knowledge. The school as a simulated process of knowledge construction must use this tool, in the most adequate conditions, for the design of properly conceived experiments in the classroom, which would favor the conviction in the student of the veracity of the theoretical constructions. In school practice, the "theory of errors" applied to experiments in physics, usually constitutes formal practice and is reduced to a long series of calculations to finally obtain a number that would go with the calculated value of the magnitude to express the result. The present article offers an analysis of the criterion of quality in the physical measurements, derived from relative error, taking as example the experimental task that consists in the determination of the value of acceleration of gravity using the Atwood machine. This would influence the correct design of the experiment and determine the relative value interval. It would also influence the correct design of the experiment and determine the interval of values that magnitudes should take in the experience, in order to guarantee its informative force.

Keywords: Experiment, errors, measurements, teaching.

PACS: 01.40.Gm; 06.20.Dk

1. El experimento en la ciencia y en la asignatura de física

En física, como en otras ciencias, las construcciones científicas se expresan en modelos que son una representación simplificada de la realidad. La descripción de sus propiedades y sus relaciones esenciales se expresan, en esta ciencia, a través del lenguaje de la matemática.

Toda teoría física, que pretenda establecerse como tal, debe soportar con éxito el rigor del experimento. Sin embargo, cualquier experimento no tiene fuerza suficiente como para validar o refutar una teoría científica.

"El experimento sólo se convierte en arma de penetración en la esencia del objeto, en medio de la demostración de la veracidad del conocimiento, cuando el investigador lo plantea concretamente y hace deducciones correctas de él, cuando toma en cuenta todas las influencias posibles, todas las fallas que pueden producirse al encarnar el esquema teórico del razonamiento en una determinada estructura material" [1]. Es decir, cuando se está seguro de haber enfren-

tado correctamente la confrontación modelo – realidad (con mayor profundidad la contradicción modelo – realidad en la solución de tareas experimentales docentes fue abordada por el autor en "La contradicción modelo-realidad en los problemas experimentales". *Ethos educativo* N° 20, agosto de 1999. Michoacán, México). Una de las herramientas que posee el científico para abordar dicha contradicción es la teoría de errores, entendida en toda la amplitud de su alcance.

Uno de los medios que utiliza la escuela para que el alumno asimile la cultura científica es el experimento y la asignatura de física es uno de sus exponentes más representativos. Es lógico pensar entonces que la cultura científica que adquiera el estudiante será incompleta, si no se abordan determinados aspectos de la confrontación modelo – realidad, haciendo uso de aquellos elementos de la teoría de errores, que para su nivel de desarrollo intelectual sean apropiados. Ignorarlo, al acometer la solución de las tareas experimentales propuestas por el profesor de física, provocará que el alumno, con toda seguridad, se forme una visión un tanto distorsionada del experimento, manifiesta en su carácter absoluto como

verdad científica, e inclusive todo lo contrario; si el maestro no ha logrado preparar con rigor el experimento que va a poner a consideración de sus educandos, al obtenerse resultados que no son los esperados, los alumnos pueden caer en estados de escepticismo científico.

A este respecto plantea Veniamín Usanov: “Los resultados del experimento deben ser claros y tener un valor único para los alumnos. Si los alumnos tienen dudas en lo que se refiere a los resultados o algún alumno obtuvo resultados incorrectos, el maestro está en la obligación de ayudar al alumno a encontrar el error, a eliminarlo con vistas a que pueda obtener el resultado necesario”[2] [El término valor se ha usado en el sentido del alcance de la significación que pueda tener el resultado para el alumno y está en correspondencia con los objetivos del maestro].

2. La teoría de errores en el experimento físico escolar

¿Qué problemática existe en cuanto a la aplicación de determinados elementos de la teoría de errores en la práctica escolar?[Entiéndase por este vocablo, en este caso, todos los niveles de enseñanza del sistema nacional de educación].

La teoría de errores se construye a partir de una matemática compleja que actualmente, en Cuba, no es tratada en la escuela media ni en muchas de las especialidades universitarias en que se imparte la física. Tal situación provoca rechazo en aquellos que se ven obligados a hacer uso de ella, incluyendo a muchos profesores.

Por otro lado, su aplicación a la solución de tareas experimentales frecuentemente se hace bastante formal y se reduce a una larga serie de operaciones de cálculo para obtener, finalmente, un número que acompañará al valor hallado de la magnitud para expresar el resultado.

Nos referiremos aquí, como sugiere la pregunta que hemos elegido para encabezar estas líneas, al papel de algunos elementos de la teoría de errores: para diseñar adecuadamente el experimento y para que los instrumentos de medición y los equipos y accesorios que sean seleccionados para dar solución a la tarea propicien mejores resultados y, a la vez, nos libren de operaciones innecesarias que, por desconocimiento, frecuentemente se ejecutan.

Haremos esto, no con argumentaciones teóricas que muchas veces no pueden ser interpretadas en su justa medida, sino que trataremos de ilustrar estas ideas con un ejemplo de nuestra práctica pedagógica a través de la solución de una tarea experimental concreta perteneciente al curso de mecánica que se imparte en la formación de profesores de física y posteriormente formularemos algunas conclusiones generalizadoras.

3. Solución de una tarea experimental

El enunciado de la tarea es el siguiente:

Determine el valor de la aceleración de la gravedad en el lugar haciendo uso de la máquina de Atwood.

Se conoce que la máquina de Atwood es un sistema mecánico formado por dos cuerpos de masas diferentes, en el caso más general, unidos por un hilo, que puede desplazarse por una polea fija, de la que cuelga.

Al resolver teóricamente la tarea, considerando a la polea y al hilo de masas despreciables, desestimando el rozamiento entre la polea y el eje, y el de los cuerpos con el aire, y tomando al hilo como inextensible, se obtiene la ecuación de la medición siguiente:

$$g = \frac{2h}{t^2} \frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1}, \quad (1)$$

donde h , t , m_1 y m_2 pueden ser medidos directamente. Al obtener esta ecuación se ha considerado que $m_2 > m_1$.

Parecería que en este momento se debe proceder inmediatamente a ejecutar el experimento para realizar las mediciones, procesar los datos y obtener el resultado que pone fin a la tarea. Pero, por empezar a correr más temprano no siempre se llega más lejos.

Más arriba se ha relacionado una serie de idealizaciones teóricas realizadas durante la solución que, como bien indica el término, no se corresponden con la realidad del experimento. Para reducir la contradicción modelo – realidad debe garantizarse, tanto como sea posible, que el sistema experimental del que se va a hacer uso, cumpla con las idealizaciones, que ahora son condiciones. Un análisis más profundo del fenómeno, para lograr una descripción más exacta a través de la ecuación de la medición, no corresponde con esta etapa en que el estudiante sólo ha estudiado la dinámica de la traslación.

Prosigamos el análisis. ¿Cómo lograr concebir correctamente el experimento haciendo uso de la teoría de errores?

Una vez elegidos los equipos y accesorios que posibilitarán la reproducción del fenómeno teniendo en cuenta las idealizaciones, pasamos a elegir los instrumentos de medición. Supongamos que los instrumentos de medición de que disponemos, los más precisos, tienen una escala cuya precisión es la siguiente:

- Balanza: $e_m = 0.1$ g.
- Cronómetro: $e_t = 0.2$ s.
- Regla: $e_h = 1$ mm.

Si nos regimos por el criterio de que en los experimentos docentes se consideran de calidad todas las mediciones cuyo error relativo es igual o menor que el 10 %, entonces la calidad de las mediciones que tenemos que hacer se garantiza para las condiciones siguientes:

1. $m \geq 1$ g,
2. $t \geq 2$ s,
3. $h \geq 10$ mm,

Las condiciones 1 y 3 pueden ser cumplidas fácilmente, pero qué implicaciones trae cumplir con la condición 2. Ésta nos dice que para que la medición del tiempo tenga la calidad requerida es necesario que el tiempo que demore el sistema en su recorrido sea igual o mayor que 2 s; éste es el valor límite. Mientras mayor sea el tiempo, de mayor calidad será la medición.

Es decir, en el experimento que llevemos a cabo tenemos que lograr que el sistema esté en movimiento 2 s como mínimo. Según la ecuación de la medición, esto puede ser logrado de dos formas, que explicaremos después de realizar, en ella, cierta transformación necesaria.

El tiempo, en este caso, está ligado cinemáticamente al desplazamiento y a la aceleración del sistema. Examinemos la situación física presentada para establecer una dependencia más clara entre las magnitudes involucradas en la Ec. (1).

Como indica la segunda ley de Newton, la causa de la aceleración de un cuerpo es la acción de una fuerza resultante no nula por parte de otros cuerpos sobre él. La ecuación de la medición, que describe el fenómeno, relaciona cuatro magnitudes cuyos valores pueden ser diferentes (h, t, m_1, m_2 ; g es una constante del lugar). Durante el transcurso del fenómeno (movimiento del sistema máquina de Atwood), los valores de las masas de los cuerpos se mantienen constantes todo el tiempo, mientras que los valores de h y t varían. Si el fenómeno se reproduce varias veces sin cambiar los valores de las masas, la aceleración del sistema siempre será la misma. En cambio, si al reproducir el fenómeno sustituimos los cuerpos por otros de masas diferentes (que se mantienen a su vez constantes, mientras el fenómeno tiene lugar), es probable que la aceleración del sistema, aunque constante, tome ahora otro valor.

Esto significa que para masas invariables la altura determina el tiempo y viceversa pero no la aceleración del sistema, es decir, ellas varían, una en correspondencia con la otra, de modo tal que la aceleración siempre permanece constante.

Sin embargo, podemos preguntarnos: ¿cualesquiera pares de cuerpos de masas diferentes a los que se usaron para reproducir el fenómeno la vez anterior provocarán que al repetir nuevamente el fenómeno éste transcurra con otro valor de aceleración? Para responder a esta pregunta encontremos, a partir de la ecuación de la aceleración del sistema, si existen determinados pares de valores de las masas que dan como resultado un mismo valor de aceleración. La ecuación de la aceleración es

$$a = g \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}. \quad (2)$$

Despejando, por ejemplo, m_2 (despejar m_1 es equivalente) se obtiene

$$m_2 = \frac{a + g}{g - a} m_1. \quad (3)$$

Como a y g son constantes, el gráfico de esta expresión es una recta, expresada como $m_2 = f(m_1)$, en que todos los puntos sobre ella determinan pares de valores correspondientes de las masas para los cuales la aceleración que adquiere el

sistema es la misma. De esta solución matemática sólo tienen sentido físico con relación al modelo los valores en el primer cuadrante, y sentido físico para las condiciones de la tarea aquellos que satisfagan las idealizaciones.

Podemos concluir entonces que la aceleración del sistema depende no directamente de los valores de las masas sino de su relación.

Designemos por R la relación de la masa 2 con respecto a la 1. La ecuación de la medición queda expresada ahora en función de 3 variables:

$$g = \frac{2h}{t^2} \frac{R + 1}{R - 1}, \quad (4)$$

donde $R = m_2/m_1$, y como al obtener la Ec. (1) se consideró que $m_2 > m_1$, entonces R es un número mayor que 1.

Atendiendo a que el valor límite del tiempo quedó fijado al plantearse la condición 2, son 2 los factores que pueden garantizarla, el primero es el valor de la altura y el segundo la relación entre las masas.

Primera variante

Prefijando R en la Ec. (4) queda determinado el valor mínimo de h que cumple con la condición 2.

Por ejemplo, tomemos $R = 1.20$ (hay infinitos pares de valores de las masas que satisfacen esta igualdad). Sustituyendo este valor en (4) y tomando un valor aproximado de g (9.8 m/s^2 en este caso), el conjunto de valores que satisfacen la condición 2 está determinado por la desigualdad

$$h \geq 1.78 \text{ m}. \quad (5)$$

Según la condición 3, el recorrido del sistema no puede ser menor que 10 mm, sin embargo hemos visto que para cumplir con la condición 2, como t y h están relacionados según la ecuación de la medición, el intervalo de valores permisibles para h se reduce y, para el valor prefijado de R en el ejemplo, queda determinado por la condición (5). La condición 3 se sustituye entonces por una nueva que de modo general se expresa a través de la siguiente desigualdad:

$$h \geq \frac{t_{\min}^2 g (R - 1)}{2(R + 1)}. \quad (6)$$

Al aumentar el valor mínimo de la altura podemos replantearnos la cuestión relativa a la precisión del instrumento que garantiza mediciones de la calidad requerida. Ahora la calidad se garantiza para $e_h \leq 17.8 \text{ cm}$, y esto significa que si la precisión de la regla es de 10 cm, la medición mantiene su calidad; es decir, la medición de la altura puede hacerse con reglas graduadas en decímetros. Esto facilita la medición de h .

Segunda variante

Si la magnitud que se fija es el desplazamiento, la condición 2 quedará determinada por el parámetro R . Para que se vea claramente cómo varía t en función de R , despejemos t de la Ec. (4) y hallemos el límite de t para los valores extremos de R :

$$\lim_{R \rightarrow 1} \sqrt{\frac{2h}{g} \frac{R+1}{R-1}} = \infty$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2h}{g} \frac{R+1}{R-1}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2h}{g} \frac{1+1/R}{1-1/R}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Es decir, que cuando la relación entre las masas aumenta en el intervalo desde 1 hasta infinito, t disminuye desde infinito hasta $\sqrt{2h/g}$. El gráfico de la Fig. 1 representa la dependencia $t = f(R)$. De aquí podemos inferir que mientras menor sea la diferencia entre las masas de los cuerpos mejor se cumple la condición 2 y mayor calidad tendrá la medición del tiempo.

Por ejemplo, tomemos $h = 2.00$ m. Para este valor, siguiendo un procedimiento análogo al de la primera variante,

$$R \leq 1.23. \quad (7)$$

Si tomamos $m_1 = 50.0$ g, entonces en correspondencia con la Ec. (7), m_2 debe ser tomada no mayor que 61.5 g.

Después de un análisis detallado del transcurso del fenómeno, vemos que la calidad de la medición de la masa no depende solamente del valor de la masa de cada uno de los cuerpos, sino, además, de su relación, y a la condición 1 hay que agregar la condición (7), que en forma general se expresa como

$$\frac{m_2}{m_1} \leq \frac{t_{\min}^2 g + 2h}{t_{\min}^2 g - 2h}.$$

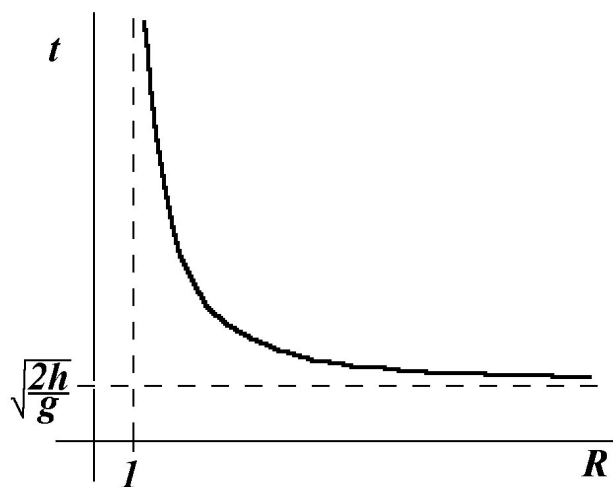


FIGURA 1.

Finalmente, las condiciones generales para garantizar la calidad de las mediciones directas quedan expresadas del siguiente modo:

1. $m \geq 1$ g
2. $t \geq 2$ s
3. Si se fija R , entonces

$$h \geq \frac{t_{\min}^2 g (R-1)}{2(R+1)},$$

si no $h \geq 10$ mm.

4. Si se fija h , entonces

$$\frac{m_2}{m_1} \leq \frac{t_{\min}^2 g + 2h}{t_{\min}^2 g - 2h}.$$

Desde el punto de vista práctico es más sencillo disminuir la relación entre las masas que aumentar la longitud.

4. Conclusiones

El análisis de una parte de la solución de la tarea experimental planteada nos ha servido como medio para introducir las generalizaciones siguientes:

1. Los valores de las magnitudes a medir durante el experimento se expresan por intervalos determinados por la condición que se deriva de la precisión del instrumento, y ésta se plantea como

$$x \geq 10 e_x,$$

donde x es la magnitud que se mide y e_x es la precisión del instrumento con que se mide la magnitud x .

2. Si las magnitudes a medir en el transcurso del experimento están relacionadas por la ecuación de la medición, entonces la precisión de los instrumentos de medición condiciona no sólo el valor de la magnitud que con cada uno de ellos se cuantifica, sino también al resto de ellas.
3. Las restricciones puestas a los valores de las magnitudes a medir pueden llevar al replanteo de la precisión de los instrumentos de medición.

Vemos pues que la teoría de errores no es solamente una herramienta matemática cuyos procedimientos de cálculo nos indican la medida de la precisión del resultado obtenido en la solución de la tarea experimental, sino que ellos imponen un análisis al diseñar el propio experimento que no puede ser desdeñado en aras de garantizar la calidad del experimento propuesto. Como se indicó al inicio, la veracidad del resulta-

do radica no sólo en la magnitud de los errores que se han cuantificado, sino también en cómo ellos se han tenido en cuenta al concebir el experimento.

El análisis propuesto propicia, en definitiva, la solución de la contradicción modelo – realidad y es un aspecto que se debe tener en cuenta en su continuo ajuste.

El análisis de la contradicción modelo – realidad, que exige la solución de una tarea experimental, es más amplio que el que aquí se ha mostrado. De todas sus aristas, solo hemos mostrado una con la intención de ilustrar cómo la definición del error relativo, que determina la calidad de la medición, influye en el diseño del experimento.

-
1. P.V. Kopnin, *Pueblo y Educación*. La Habana (1983) 542.
 2. V. Usanov, *Conferencias. Pueblo y Educación*. La Habana (1982) 91.