

Modos de oscilación en cuerdas homogéneas por tercios

G. Rodríguez Zurita

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

72000, Puebla, Pue. México.

Ramón Alvarado Bustos, Rubén Alvarado Bustos, L. E. Zavala Ramírez

Facultad de Física e Inteligencia Artificial

Universidad Veracruzana

91000, Xalapa, Ver. México.

Recibido el 22 de junio de 2001; aceptado el 14 de marzo de 2002

En este trabajo se estudian algunas soluciones propias de una cuerda, caracterizada por una densidad de masa constante en cada uno de sus tres tercios (homogénea por tercios), sujeta por sus dos extremos y sometida a una tensión constante. La solución buscada admite el uso de métodos de empalme de soluciones, como los usuales en mecánica cuántica introductoria. Para comparación con los resultados teóricos, se realizan experimentalmente cuerdas por tercios con segmentos de alambres de cobre de calibres conocidos añadidos por soldadura. Este caso resulta análogo al del planteamiento de la ecuación de Schrödinger para una barrera de potencial. Se discuten los resultados encontrados y su posible utilización con fines de enseñanza.

Descriptores: Vibraciones y ondas mecánicas; demostraciones experimentales; resonancia, atenuación y estabilidad mecánica.

Along this work, some solutions for string oscillation modes with constant linear mass density each third (homogeneous in thirds) fixed in both ends and under constant tension are shown. Solutions are found following well-known methods for piecewise constant potentials in one dimension as is usual in introductory Quantum Mechanics. The analysis justifies the procedure to construct piecewise homogeneous strings from copper wires of adequate gauges by soldering wire pieces together. This case have similarities with the Schrödinger equation for a potential barrier. Experimental results are presented and possibilities of use for pedagogical purposes are discussed.

Keywords: Vibrations and mechanical waves; experimental demonstration; resonance, damping and dynamic stability.

PACS: 46.40.-f; 07.10.-h; 46.40.Ff; 43.75.+a

1. Introducción

En esta comunicación, en complemento a un trabajo previo referente a cuerdas homogéneas por mitades [1], se plantea la posibilidad de inspeccionar el caso de cuerdas homogéneas por tercios, empleando el método de empalme de soluciones, muy usado en mecánica cuántica para la determinación de soluciones a la ecuación de Schrödinger cuando el potencial es constante por tramos [2, 3]. Como resultado se encuentran modos estacionarios de oscilación [4] caracterizados por longitudes de onda diferentes en cada segmento de cuerda. En particular se consideran cuerdas consistente en tres segmentos (tercios) con densidades diferentes. Se han analizado cuerdas con densidades iguales en sus extremos y diferente en su tercio intermedio; así como también el caso de tres densidades diferentes. El análisis se compara con los resultados experimentales obtenidos de analizar cuerdas homogéneas por tercios uniendo por soldadura tramos de alambre de cobre de diferentes calibres.

2. Cuerdas homogéneas en tres tramos sujetas por sus extremos

2.1. Planteamiento general

Supóngase una cuerda de longitud $2L$ compuesta de tres segmentos iguales de densidades lineales de masa ρ_I , ρ_{II} y ρ_{III} ,

correspondientes a tres regiones con fronteras en los puntos $z = -L$, $z = -a$, $z = a$ y $z = L$ (Fig. 1). La ecuación a resolver es una ecuación de onda, de la forma

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\rho(z)}{T_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

con T_0 la tensión, supuesta constante, a la cual está sujeta la cuerda. En general la solución de la ecuación debe resultar de la inspección de la ecuación diferencial resultante tras la substitución de $\rho(z)$. Como un ejemplo de ello, en la Ref. 5 puede verse el caso en que $\rho(z)$ sea dependiente de z^2 . En el caso a discutir, sin embargo, la densidad puede expresarse como una función de valores constantes por tramos, esto es,

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_I, & -L \leq z \leq -a \\ \rho_{II}, & -a \leq z \leq a \\ \rho_{III}, & a \leq z \leq L \end{cases},$$

de modo que la solución puede buscarse como la unión de tres soluciones, cada una de las cuales es solución de la ecuación de onda con densidad constante en el tramo correspondiente. Gran parte del problema se reduce a empalmar las tres soluciones con base en las condiciones de frontera. Este método es muy bien conocido en mecánica cuántica al abordar el caso de potenciales unidimensionales constantes por tramos empleando la ecuación de Schrödinger [2] y es el propuesto en este trabajo.

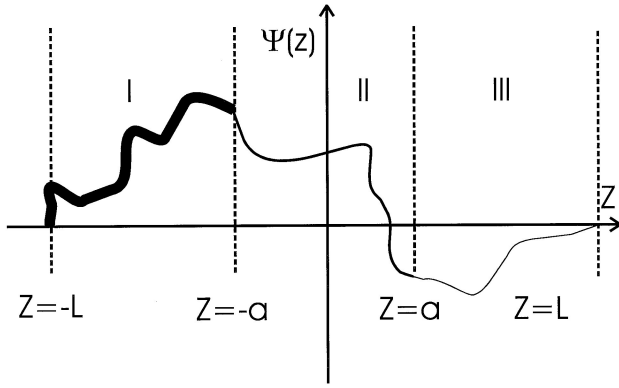


FIGURA 1. Cuerda homogénea por tercios.

Acordemente, la solución de un modo (de frecuencia ω en las tres regiones) puede escribirse como

$$\psi_I(z) = A_I e^{ik_I z} + B_I e^{-ik_I z} \equiv \psi_I, \quad (1a)$$

$$\psi_{II}(z) = A_{II} e^{ik_{II} z} + B_{II} e^{-ik_{II} z} \equiv \psi_{II}, \quad (1b)$$

$$\psi_{III}(z) = A_{III} e^{ik_{III} z} + B_{III} e^{-ik_{III} z} \equiv \psi_{III}; \quad (1c)$$

cumpléndose las relaciones de dispersión

$$\omega/k_I = v_I = \sqrt{\frac{T_o}{\rho_I}}, \quad (2a)$$

$$\omega/k_{II} = v_{II} = \sqrt{\frac{T_o}{\rho_{II}}}, \quad (2b)$$

$$\omega/k_{III} = v_{III} = \sqrt{\frac{T_o}{\rho_{III}}}, \quad (2c)$$

con ω la frecuencia angular del modo, $k_j = 2\pi/\lambda_j$ el número de onda en la región $j = I, II, III$, v_j la velocidad de fase correspondiente a la región j , y T_0 la tensión de la cuerda. Todas las cantidades involucradas son reales para el presente

caso. La continuidad de las soluciones se establece con las cuatro condiciones de frontera (continuidad de solución y de derivada en interfaz) siguientes:

$$\psi_I(-a) = \psi_{II}(-a), \quad (3a)$$

$$\psi'_I(-a) = \psi'_{II}(-a), \quad (3b)$$

$$\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a), \quad (3c)$$

$$\psi'_{II}(a) = \psi'_{III}(a). \quad (3d)$$

Usando la Ec. (3a) junto con las Ecs (1a) y (1b) primero, y luego usando la Ec. (3b) con las Ecs. (1a) y (1b), se obtiene

$$A_I e^{-ik_I a} + B_I e^{ik_I a} = A_{II} e^{-ik_{II} a} + B_{II} e^{ik_{II} a}, \quad (4a)$$

$$A_I e^{-ik_I a} - B_I e^{ik_I a} = \frac{k_{II}}{k_I} (A_{II} e^{-ik_{II} a} - B_{II} e^{ik_{II} a}). \quad (4b)$$

Sumando miembro a miembro las Ecs. (4a) y (4b), se encuentra

$$2A_I e^{-ik_I a} = \left(1 + \frac{k_{II}}{k_I}\right) A_{II} e^{-ik_{II} a} + \left(1 - \frac{k_{II}}{k_I}\right) B_{II} e^{ik_{II} a}; \quad (4)$$

mientras que, restando las mismas y multiplicando por -1, se tiene

$$2B_I e^{ik_I a} = \left(1 - \frac{k_{II}}{k_I}\right) A_{II} e^{-ik_{II} a} + \left(1 + \frac{k_{II}}{k_I}\right) B_{II} e^{ik_{II} a}. \quad (5)$$

Despejando las Ecs. (5a) y (5b), se llega a las siguientes expresiones para coeficientes

$$\begin{pmatrix} A_I \\ B_I \end{pmatrix} = T_{12} \begin{pmatrix} A_{II} \\ B_{II} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \vartheta_{21}) e^{i(k_{II} - k_I) a} & (1 - \vartheta_{21}) e^{-i(k_{II} + k_I) a} \\ (1 - \vartheta_{21}) e^{i(k_{II} + k_I) a} & (1 + \vartheta_{21}) e^{-i(k_{II} - k_I) a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{II} \\ B_{II} \end{pmatrix} \quad (6a)$$

y, análogamente, usando la Ec. (3c) junto con las Ecs. (1b) y (1c) primero, y luego usando la Ec. (3d) con las Ecs. (1b) y (1c), se obtiene

$$\begin{pmatrix} A_{II} \\ B_{II} \end{pmatrix} = T_{23} \begin{pmatrix} A_{III} \\ B_{III} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \vartheta_{32}) e^{i(k_{III} - k_{II}) a} & (1 - \vartheta_{32}) e^{-i(k_{III} + k_{II}) a} \\ (1 - \vartheta_{32}) e^{i(k_{III} + k_{II}) a} & (1 + \vartheta_{32}) e^{-i(k_{III} - k_{II}) a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{III} \\ B_{III} \end{pmatrix}, \quad (6b)$$

donde $\vartheta_{21} \equiv k_{II}/k_I$ y $\vartheta_{32} \equiv k_{III}/k_{II}$. A continuación, se buscarán las soluciones de ondas estacionarias para una cuerda como la descrita.

2.2. Cuerda homogénea en tercios sujeta por sus extremos

La condición de extremos fijos se expresa con las condiciones de frontera siguientes:

$$\psi_I(-L) = \psi_{III}(L) = 0, \quad (7)$$

obteniendo para los coeficientes con índices I y III , que

$$B_I = -A_I e^{-i2k_I L}, \quad (8a)$$

$$B_{III} = -A_{III} e^{i2k_{III} L}. \quad (8b)$$

Por tanto, de las Ecs. (1) se pueden encontrar las formas de los modos en los tercios *I* y *III* como sigue:

$$\psi_I(z) = 2iA_I e^{-ik_I L} \operatorname{sen}(k_I[z + L]), \quad (9a)$$

$$\psi_{III}(z) = 2iA_{III} e^{ik_{III} L} \operatorname{sen}(k_{III}[z - L]). \quad (9b)$$

Introduciendo ahora la Ec. (8a) en la Ec. (5b), se obtiene

$$\begin{aligned} -2A_I e^{-ik_I(2L-a)} &= (1 - \vartheta_{21})A_{II} e^{-ik_{II}a} \\ &+ (1 + \vartheta_{21})B_{II} e^{i2k_{II}a}, \quad (10a) \end{aligned}$$

y multiplicando por $\exp\{-i2k_I(L-a)\}$ en la Ec. (5a), se halla que

$$\begin{aligned} 2A_I e^{-ik_I(2L-a)} &= (1 + \vartheta_{21})A_{II} e^{-ik_{II}a} e^{-i2k_I(L-a)} \\ &+ (1 - \vartheta_{21})B_{II} e^{ik_{II}a} e^{-i2k_I(L-a)}. \quad (10b) \end{aligned}$$

Sumando las Ecs. (10a) y la (10b), puede despejarse un coeficiente como sigue:

$$\begin{aligned} B_{II} &= -A_{II} e^{-i2k_{II}a} \\ &\times \frac{\cos k_I(L-a) - i\vartheta_{21} \operatorname{sen} k_I(L-a)}{\cos k_I(L-a) + i\vartheta_{21} \operatorname{sen} k_I(L-a)}. \quad (11) \end{aligned}$$

Entonces, incorporando la Ec. (11) en la Ec. (1b) se desprende que

$$\psi_{II}(z) = A_{II} \left\{ e^{ik_{II}z} - e^{-i2k_{II}a} \frac{\cos k_I(L-a) - i\vartheta_{21} \operatorname{sen} k_I(L-a)}{\cos k_I(L-a) + i\vartheta_{21} \operatorname{sen} k_I(L-a)} e^{-ik_{II}z} \right\}, \quad (12)$$

de donde, en particular para $z = -a$,

$$\begin{aligned} \psi_{II}(-a) &= A_{II} e^{-ik_{II}a} \\ &\times \left\{ \frac{i2\vartheta_{21} \operatorname{sen} k_I(L-a)}{\cos k_I(L-a) + i\vartheta_{21} \operatorname{sen} k_I(L-a)} \right\} \\ &= i2A_I e^{-ik_I L} \operatorname{sen} k_I(-a + L), \quad (13) \end{aligned}$$

habiendo empleado la Ec. (3a). De esta última relación puede despejarse A_{II} en términos de A_I . Haciéndolo así, y usando la Ec. (12), se llega a una expresión para $\psi_{II}(z)$:

$$\begin{aligned} \psi_{II}(z) &= \frac{2iA_I e^{-ik_I L}}{\vartheta_{21}} [\operatorname{sen} k_{II}(z+a) \cos k_I(L-a) \\ &+ \vartheta_{21} \cos k_{II}(z+a) \operatorname{sen} k_I(L-a)], \quad (14a) \end{aligned}$$

mientras que para la correspondiente derivada

$$\begin{aligned} \psi'_{II}(z) &= \frac{2iA_I e^{-ik_I L}}{\vartheta_{21}} k_{II} [\cos k_{II}(z+a) \cos k_I(L-a) \\ &- \vartheta_{21} \operatorname{sen} k_{II}(z+a) \operatorname{sen} k_I(L-a)]. \quad (14b) \end{aligned}$$

La derivada logarítmica de $\psi_{II}(z)$ valuada en $z = -a$ y determinada por las Ecs. (14a) y (14b), conduce a la siguiente igualdad:

$$\left. \frac{\psi_{II}(z)}{\psi'_{II}(z)} \right|_{-a} = \frac{1}{k_I} \tan(k_I[L-a]) = \left. \frac{\psi_I(z)}{\psi'_I(z)} \right|_{-a}, \quad (15)$$

donde la segunda igualdad se obtiene de calcular el inverso de la derivada logarítmica en el punto $z = -a$ de $\psi_I(z)$ siguiendo a la Ec. (9a). Al comprobar esta igualdad, se verifica la equivalencia de las condiciones de frontera, [Ecs. (3)], con la igualdad de las derivadas logarítmicas.

Usando otra vez la Ec. (14a) para ahora sustituir el valor de $z = a$, se encuentran las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \psi_{II}(a) &= \frac{2iA_I}{\vartheta_{21}} e^{-ik_I L} [\operatorname{sen} 2k_{II}a \cos k_I(L-a) \\ &+ \vartheta_{21} \cos 2k_{II}a \operatorname{sen} k_I(L-a)] \\ &= 2iA_{III} e^{ik_{III} L} \operatorname{sen} k_{III}(a-L) = \psi_{III}(a), \quad (16) \end{aligned}$$

donde se ha empleado la Ec. (3b) de continuidad y el resultado de establecido en la Ec. (9b). De esta relación, puede despejarse A_{III} en términos de A_I , encontrando

$$\begin{aligned} \psi_{III}(z) &= \frac{2iA_I}{\vartheta_{21}} e^{-ik_I L} [\operatorname{sen} 2k_{II}a \cos k_I(L-a) \\ &+ \vartheta_{21} \cos 2k_{II}a \operatorname{sen} k_I(L-a)] \frac{\operatorname{sen} k_{III}(z-L)}{\operatorname{sen} k_{III}(a-L)}, \quad (17a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi'_{III}(z) &= k_{III} \frac{2iA_I}{\vartheta_{21}} e^{-ik_I L} [\operatorname{sen} 2k_{II}a \cos k_I(L-a) \\ &+ \vartheta_{21} \cos 2k_{II}a \operatorname{sen} k_I(L-a)] \frac{\cos k_{III}(z-L)}{\operatorname{sen} k_{III}(a-L)}. \quad (17b) \end{aligned}$$

Estas últimas igualdades, comparándolas con el cociente de las Ecs. (14a) y (14b), deben satisfacer la igualdad de las derivadas logarítmicas de $\psi_{II}(z)$ y $\psi_{III}(z)$ en $z = a$, esto es,

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{III}(z)}{\psi'_{III}(z)} \Big|_a &= \frac{1}{k_{III}} \tan(k_{III}[a-L]) \\ &= \frac{1}{k_{II}} \frac{[\sin 2k_{II}a \cos k_I(L-a) + \vartheta_{21} \cos 2k_{II}a \sin k_I(L-a)]}{\cos 2k_{II}a \cos k_I(L-a) - \vartheta_{21} \sin 2k_{II}a \sin k_I(L-a)} = \frac{\psi_{II}(z)}{\psi'_{II}(z)} \Big|_a; \end{aligned} \quad (18)$$

identidad que proporciona los valores posibles de los números de onda. Las Ecs. (9a), (14a) y (17a) son entonces las soluciones buscadas para cada tramo. Debido a las relaciones de dispersión [Ecs. (2)] cuando resulte posible la existencia de un modo con frecuencia angular ω para $k_I \neq k_{II}$, $k_{II} \neq k_{III}$, $k_{III} \neq k_I$ se deberá de cumplir además, considerando la misma tensión en los tres segmentos, las siguientes condiciones para las densidades lineales:

$$\sqrt{\frac{\rho_{II}}{\rho_I}} = \vartheta_{21}, \quad \sqrt{\frac{\rho_{III}}{\rho_I}} = \vartheta_{31}, \quad \sqrt{\frac{\rho_{III}}{\rho_{II}}} = \vartheta_{32}. \quad (19)$$

La densidad de una cuerda real es una densidad volumétrica ρ_v . En el caso de homogeneidad volumétrica, ésta última puede relacionarse con la densidad lineal "efectiva" mediante

la sección transversal A_s usando la relación

$$\rho_\ell = \rho_v A_s. \quad (20)$$

2.3. Determinación de soluciones

Para determinar los valores posibles de los números de onda, se impone la condición de continuidad, [Ec. (18)]. Con las definiciones siguientes:

$$k_I a = \alpha, \quad k_{II} a = \vartheta_{21} \alpha, \quad k_{III} a = \vartheta_{31} \alpha, \quad \vartheta_{31} \equiv k_{III}/k_I,$$

la Ec. (18) se rescribe como

$$\frac{\tan(\vartheta_{31} \alpha [1 - L/a])}{\vartheta_{31} \alpha} = \frac{1}{\vartheta_{21} \alpha} \frac{\sin 2\vartheta_{21} \alpha \cos \alpha(L/a - 1) + \vartheta_{21} \cos 2\vartheta_{21} \alpha \sin \alpha(L/a - 1)}{\cos 2\vartheta_{21} \alpha \cos \alpha(L/a - 1) - \vartheta_{21} \sin 2\vartheta_{21} \alpha \sin \alpha(L/a - 1)}. \quad (21)$$

La búsqueda de las soluciones $\alpha = \alpha_n$ puede orientarse considerando las gráficas de la Ec. (21), mostradas en la Fig. 2 para algunos casos. En particular, en la Fig. 2a se ha graficado el caso $\vartheta_{21} = 2, \vartheta_{31} = 1$, mientras que en la Fig. 2b, se ha graficado el caso $\vartheta_{21} = 1/2, \vartheta_{31} = 1$, que es el intercambio de los valores del caso anterior. De ambas situaciones se mostrarán algunos modos experimentales más adelante. En la Fig. 2c, se muestra la gráfica de la Ec. (21) correspondiente al caso $\vartheta_{21} = \sqrt{640/159}, \vartheta_{31} = \sqrt{1020/159}$, que corresponde a una cuerda formada por tres segmentos de alambre de calibres 28, 22 y 20 de acuerdo a la Ec. (21) y a los valores de áreas encontrados en la literatura [5].

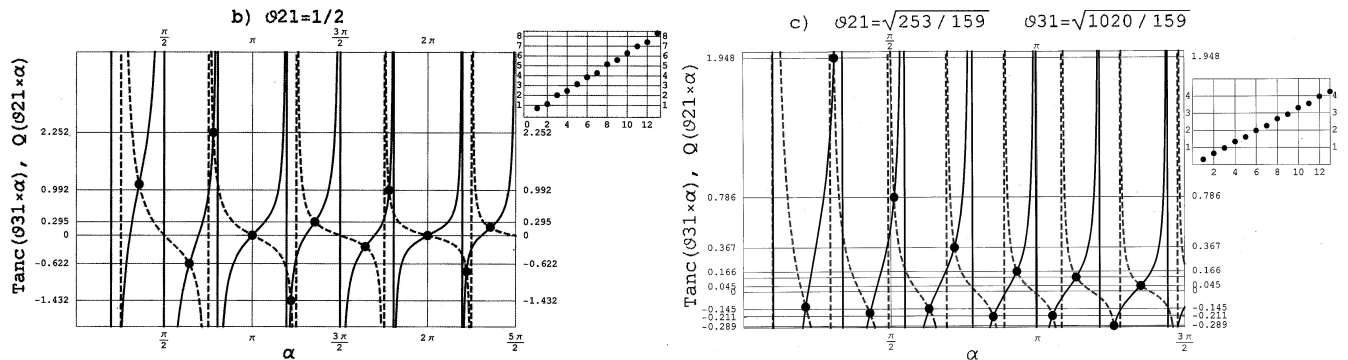


FIGURA 2. Gráficas de la Ec. (20) como función de α para diferentes valores de ϑ_{21} y de ϑ_{31} . Se denota por $\text{Tanc}(\vartheta_{31} \times \alpha)$ al primer miembro de la Ec. (21) (trazo segmentado) y por $Q(\vartheta_{21} \times \alpha)$ al segundo miembro (trazo grueso). Las soluciones a la Ec.21 son las intersecciones, algunas de las cuales se indican con puntos, señalando también algunos valores verticales. Cada recuadro muestra la gráfica de α_n como función del orden del modo n . Se ilustran tres casos: a) $\vartheta_{21} = 2, \vartheta_{31} = 1$, b) $\vartheta_{21} = 1/2, \vartheta_{31} = 1$, c) $\vartheta_{21} = \sqrt{253/159}, \vartheta_{31} = \sqrt{1020/159}$.

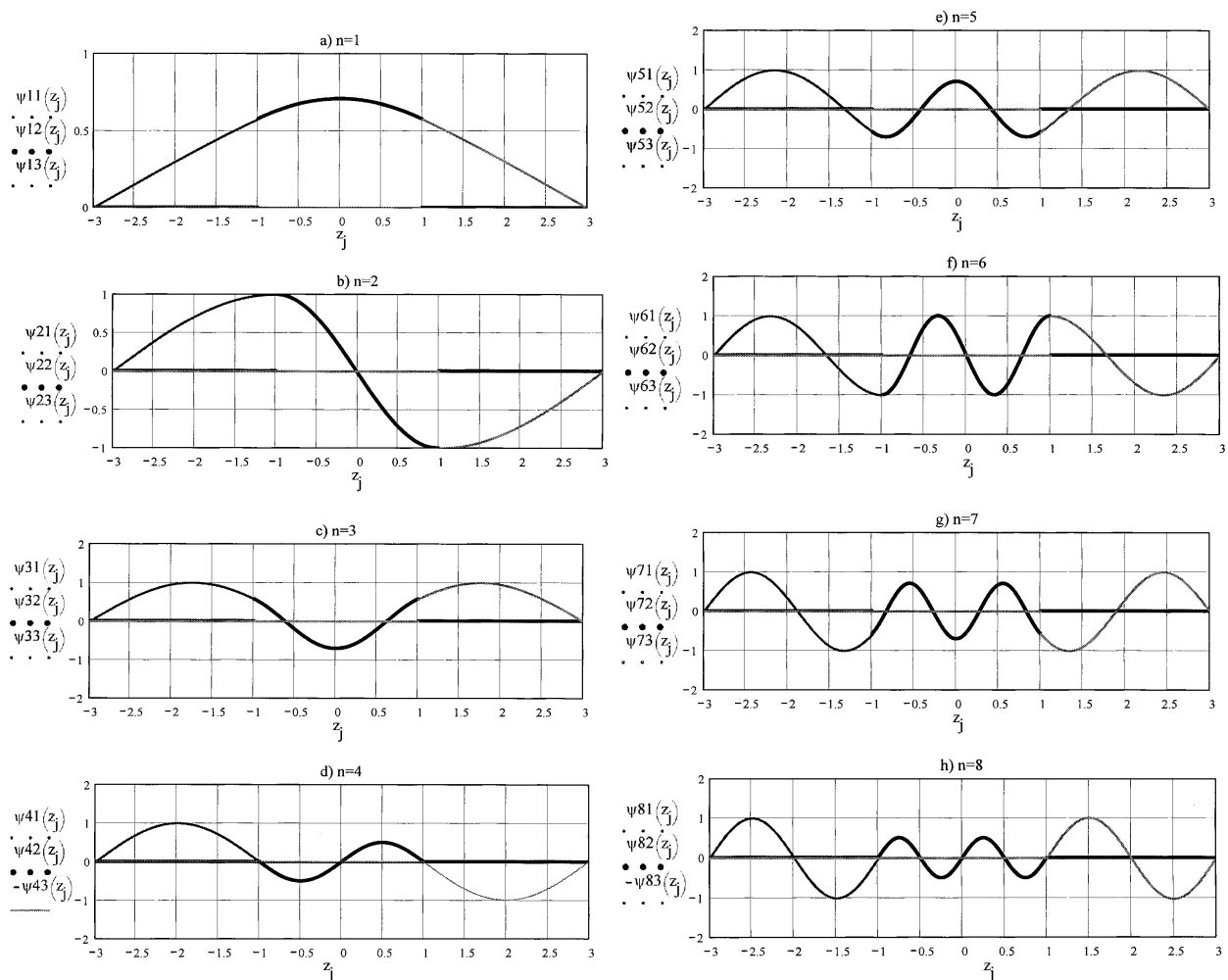


FIGURA 3. Modos de oscilación calculados para los valores $n = 1, 2, \dots, 8$ correspondientes a la Fig. 2a (26-20-26). Las soluciones del modo n en las regiones I, II y III se denotan por $\psi_{n1}(z_j), \psi_{n2}(z_j), \psi_{n3}(z_j)$ respectivamente, siendo z_j un valor numérico de la coordenada z . $\vartheta_{21} = 2$.

2.4. Modos de la cuerda homogénea por tercios sujeta por sus extremos

Utilizando las Ecs. (9a), (14a) y (17a), pueden encontrarse las gráficas de los modos de una cuerda homogénea por tercios sujeta por sus extremos para un valor determinado de ϑ_{21} y de k_{III} una vez conocido α_n . Para encontrar con mayor precisión los valores de α_n , se resolvió el sistema planteado por la Ec. (21) por iteración basada en el valor inicial conjeturado en base a las gráficas (ver, por ejemplo, las funciones *Given* y *Find*, [6]). En las Tablas I, II, se muestran las primeras 13 soluciones para α positiva encontradas para los dos primeros casos de la Fig. 2, asociándoles el índice n a cada una.

2.4.1. Caso simétrico

Aparece cuando $\vartheta_{31} = 1$ y son simétricos respecto al origen. Para el caso $\vartheta_{21} = 2$, $L = 3$ y $a = 1$, la Fig. 3 muestra ocho de los modos permitidos según los valores de los números de onda obtenidos a partir de la Tabla I, con $k_I = \alpha_n$, $k_{II} = 2\alpha_n$ y

TABLA I.

n	α	k_I	k_{II}	$\tan(\vartheta\alpha)/\vartheta\alpha$
1	0.308	0.308	0.616	-2.298
2	0.79	0.79	1.58	137.531
3	1.263	1.263	2.526	0.56
4	1.571	1.571	3.142	2.593×10^{-4}
5	1.879	1.879	3.758	-0.337
6	2.355	2.355	4.71	-177.744
7	2.834	2.834	5.668	0.249
8	3.142	3.142	6.284	1.593×10^{-4}
9	3.449	3.449	6.898	-0.205
10	3.9	3.9	7.8	-4.745
11	4.405	4.405	8.81	0.16
12	4.712	4.712	9.424	1.651×10^{-4}
13	5.02	5.02	10.04	-0.141

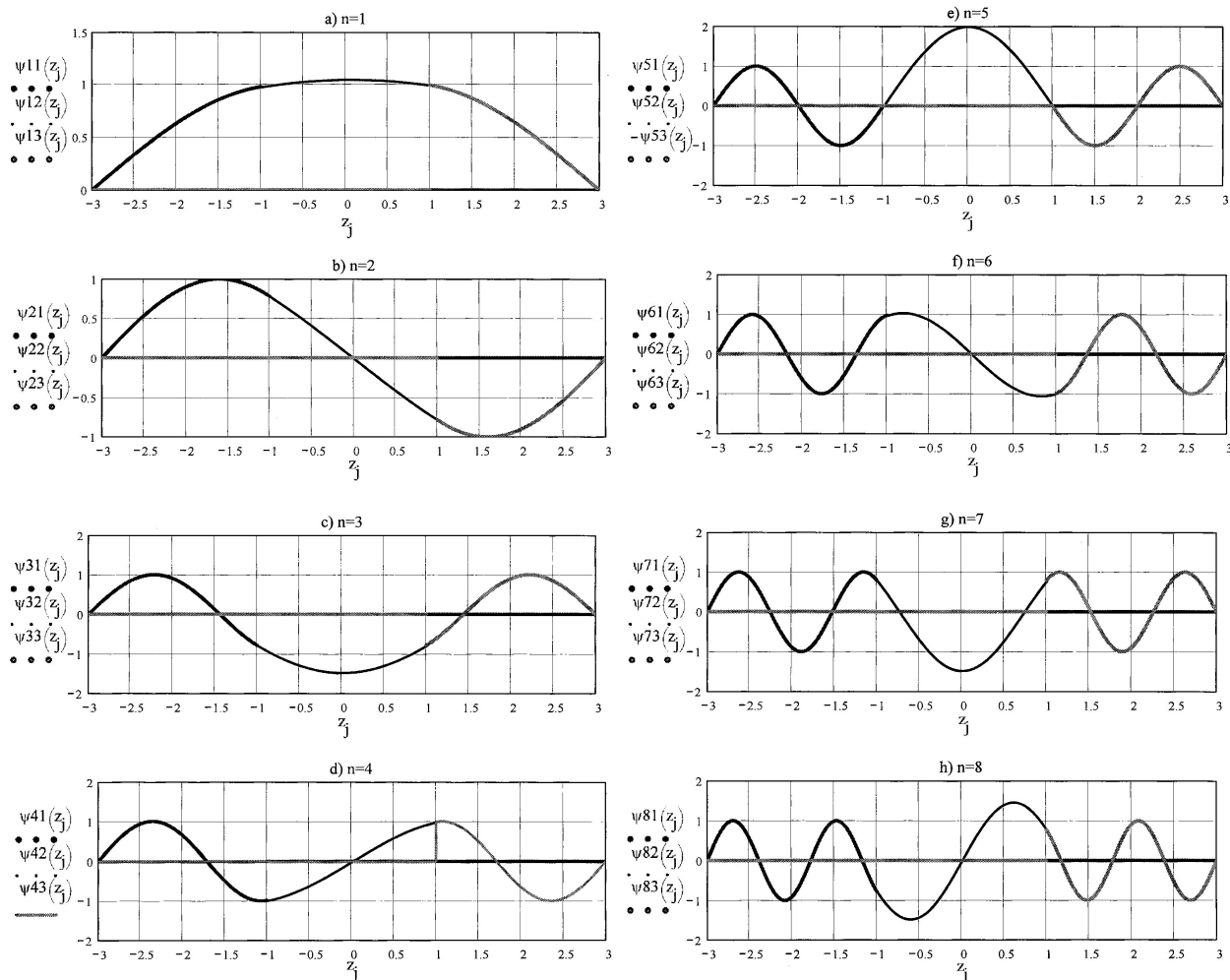


FIGURA 4. Modos de oscilación calculados para los valores $n = 1, 2, \dots, 8$ correspondientes a la Fig. 2b (20-26-20). Las soluciones del modo n en las regiones *I*, *II* y *III* se denotan por $\psi_{n1}(z_j)$, $\psi_{n2}(z_j)$, $\psi_{n3}(z_j)$ respectivamente, siendo z_j un valor numérico de la coordenada z . $\vartheta_{21} = 1/2$.

TABLA II.

n	α	k_I	k_{II}	$\tan(\vartheta\alpha)/\vartheta\alpha$
1	0.696	0.696	0.348	-7.95
2	1.122	1.122	0.561	1.118
3	2.02	2.02	1.01	-0.622
4	2.446	2.446	1.223	2.252
5	3.142	3.142	1.571	-2.593×10^{-4}
6	3.837	3.837	1.919	-1.432
7	4.263	4.263	2.132	0.295
8	5.162	5.162	2.581	-0.244
9	5.587	5.587	2.793	0.992
10	6.283	6.283	3.142	5.899×10^{-5}
11	6.979	6.979	3.485	-0.791
12	7.405	7.405	3.703	0.169
13	8.303	8.303	4.152	-0.151

$k_{III} = k_I$. Puesto que los valores de α_n dependen, dentro de nuestras estimaciones, linealmente con el orden n (como lo muestra una gráfica de los valores de α_n versus n tomados de la Tabla I, recuadro en Fig. 2a), es de esperarse que las frecuencias ω_n asociadas sean múltiplos (cuando menos, aproximadamente) de una frecuencia fundamental dada por

$$\omega_1 = k_I \sqrt{\frac{T_0}{\rho_I}} = k_{II} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_{II}}} = k_{III} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_{III}}}, \quad (22)$$

donde el índice de la frecuencia angular se asocian al orden del modo. La Fig. 4 muestra el caso $\vartheta_{21} = 1/2$, el cual resulta semejante al anterior, pero con los valores intercambiados. Se destaca como diferencia que algunos nodos se sitúan fuera del tercio intermedio, o dentro de él (comparar, por ejemplo, las Figs. 3c y 3d con 4c y 4d). En la Fig. 5 se muestran los ocho primeros modos de otro caso simétrico por compararse con un experimento ($\vartheta_{21} = \sqrt{159/404}$).

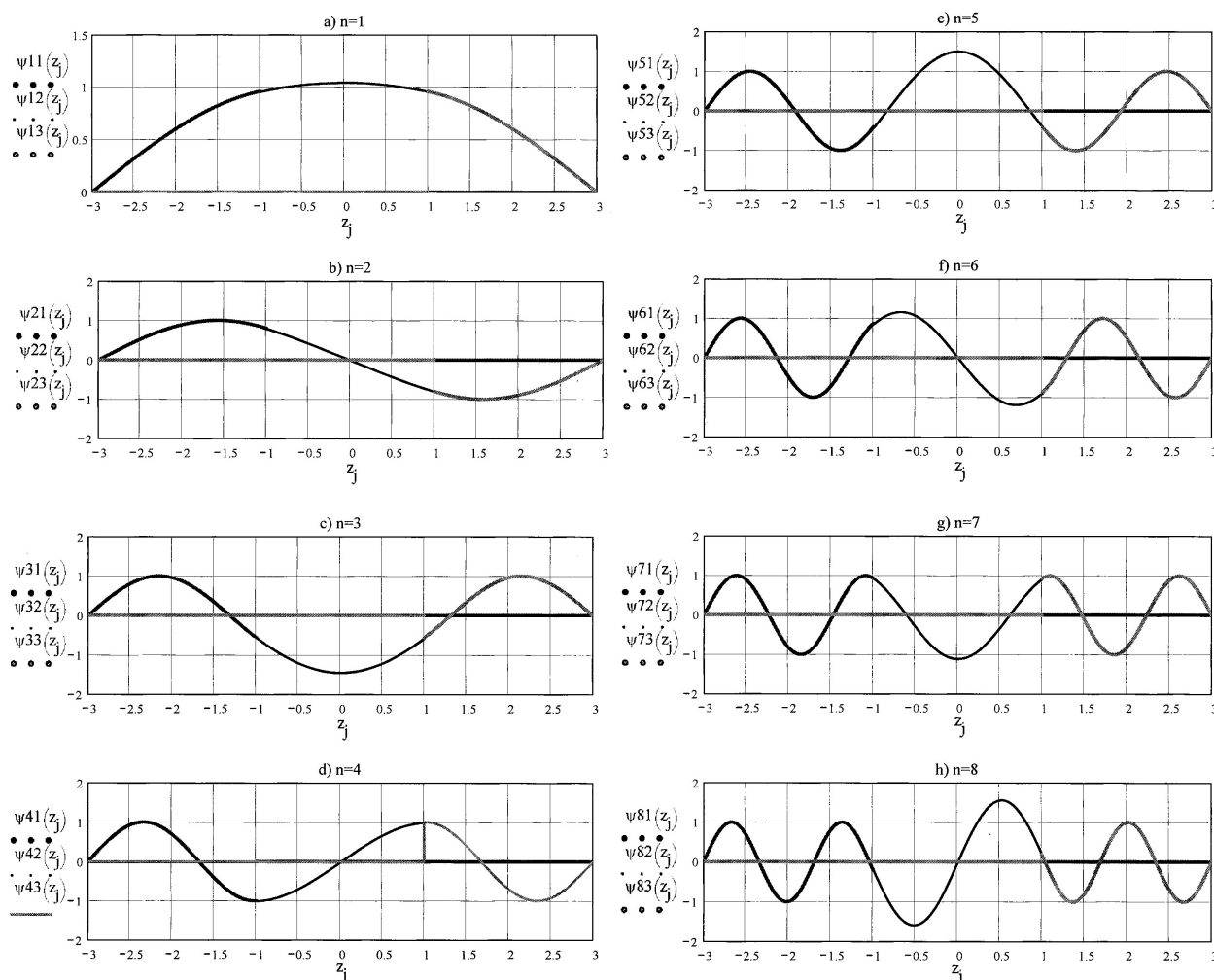


FIGURA 5. Modos de oscilación calculados para los valores $n = 1, 2, \dots, 8$ correspondientes a la Fig. 2c (24-28-24). Las soluciones del modo n en las regiones I, II y III se denotan por $\psi n1(z_j)$, $\psi n2(z_j)$, $\psi n3(z_j)$ respectivamente, siendo z_j un valor numérico de la coordenada z . $\vartheta_{21} = \sqrt{159/404}$.

2.4.2. Caso asimétrico

Surge cuando $\vartheta_{31} \neq 1$, perdiéndose la simetría, par o impar, respecto al origen que caracteriza al caso previo. Un ejemplo puede verse en la Fig. 6 donde se tiene el caso $\vartheta_{21} = \sqrt{640/159}$, $\vartheta_{31} = \sqrt{1020/159}$, que se corresponde con la combinación de alambres de calibres 28-22-20, como se detalla más adelante. En la Tabla III se han enlistado los valores de los números de onda correspondientes. Otros casos se muestran en la Fig. 7, donde puede apreciarse el cambio de los modos $n = 1$ y $n = 2$ al variar la densidad lineal (área transversal) del tramo central. Se muestran los casos $\vartheta_{21} = \sqrt{253/159}$, $\vartheta_{21} = \sqrt{404/159}$, y $\vartheta_{21} = \sqrt{640/159}$, todos con el mismo valor anterior de ϑ_{31} : el modo tiende a ser más simétrico progresivamente cuando las densidades lineales de los tercios medio y derecho tienden a semejarse. En los modos con $n = 1$ (incisos a, b y c), el máximo se translada del tercio a la derecha rumbo al central. En los modos con $n = 2$ (incisos d, e y f), el nodo intermedio se recorre del tercio derecho al central.

TABLA III.

n	k_I	k_{II}	k_{III}	$\tan(\vartheta\alpha)/\vartheta\alpha$
1	0.259	0.522	0.66	-5.807
2	0.539	1.081	1.368	+0.314
3	0.864	1.733	2.193	-1.344
4	1.154	2.315	2.929	+0.155
5	1.446	2.901	3.67	-0.482
6	1.673	3.357	4.246	+0.318
7	1.963	3.938	4.982	-0.12
8	2.249	4.512	5.707	+0.393
9	2.577	5.17	6.54	-0.086
10	2.856	5.73	7.248	+0.368
11	3.123	6.266	7.925	-0.018
12	3.334	6.769	8.562	-0.753
13	3.655	7.333	9.276	+0.033

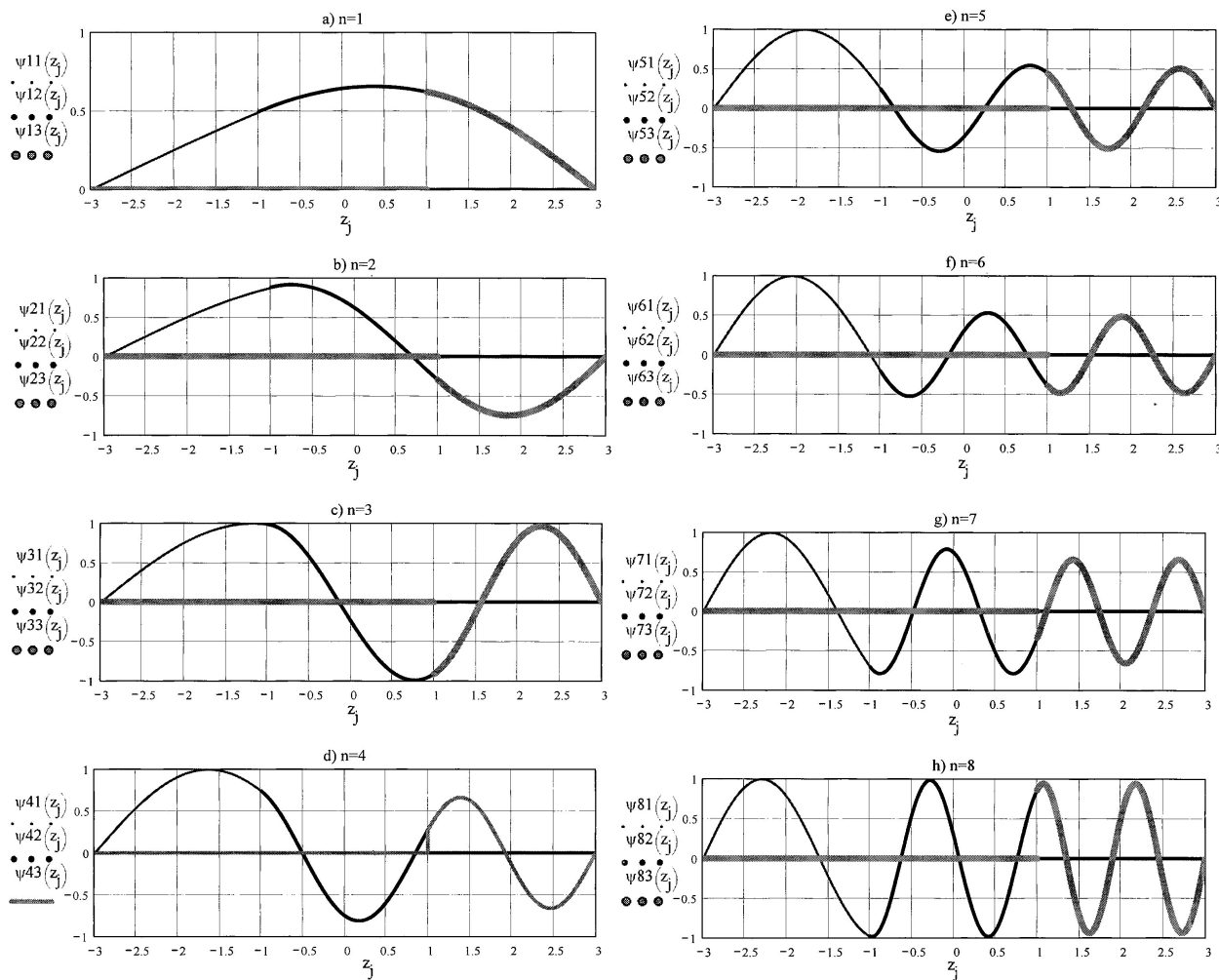


FIGURA 6. Modos bajos de una cuerda homogénea por tercios. Calibres # 28 (izquierda), #22 (centro) y # 20 (derecha). $\vartheta_{21} = 2,006$, $\vartheta_{31} = 2,538$.

3. Determinación de la densidad volumétrica a partir de la densidad lineal

Una cuerda homogénea por tramos puede construirse a partir de alambres de igual densidad volumétrica de masa, pero de diferentes secciones transversales [1]. Entonces, la condición de densidades lineales [Ec. (19)] puede simplificarse en una relación entre las secciones transversales de dos segmentos de cuerdas, A_{sI} , A_{sII} y A_{sIII} , si poseen igual densidad volumétrica de masa ρ_v cada uno, resultando en

$$\sqrt{\frac{A_{sII}}{A_{sI}}} = \vartheta_{21}, \quad \sqrt{\frac{A_{sIII}}{A_{sI}}} = \vartheta_{31}. \quad (23)$$

Para determinar un valor de ϑ , debe acudir a la relación de calibres comerciales en función de las áreas de sección transversal [5]. La relación empleada en este trabajo se grafica en la Fig. 8.

En cuanto a las frecuencias, usando las Ecs. (22) y las Ecs. (15) pueden hallarse los cocientes correspondientes a diferentes casos. Por ejemplo, comparando los casos simétricos $\vartheta_{21} = 1/2$ y $\vartheta_{21} = 2$, denotando por $\omega_1^{(1/2)}$ y $\omega_1^{(2)}$ a las respectivas frecuencias fundamentales, suponiendo igual tensión y densidad volumétrica de masa se llega a

$$\frac{\omega_1^{(2)}}{\omega_1^{(1/2)}} = \frac{k_{II}^{(2)}}{k_I^{(1/2)}}, \quad (24)$$

donde $k_I^{(1/2)}$ es el número de onda del tercio *I* para la relación $\vartheta_{21} = 1/2$ y $k_{II}^{(2)}$ es el número de onda del tercio *II* para la relación $\vartheta_{21} = 2$. Cocientes semejantes se determinarán para algunos de los valores experimentales encontrados. Aunque en la Ec. (24) se tienen a las frecuencias fundamentales, si las de los armónicos son al menos aproximadamente proporcionales, sus cocientes respectivos se esperan semejantes.

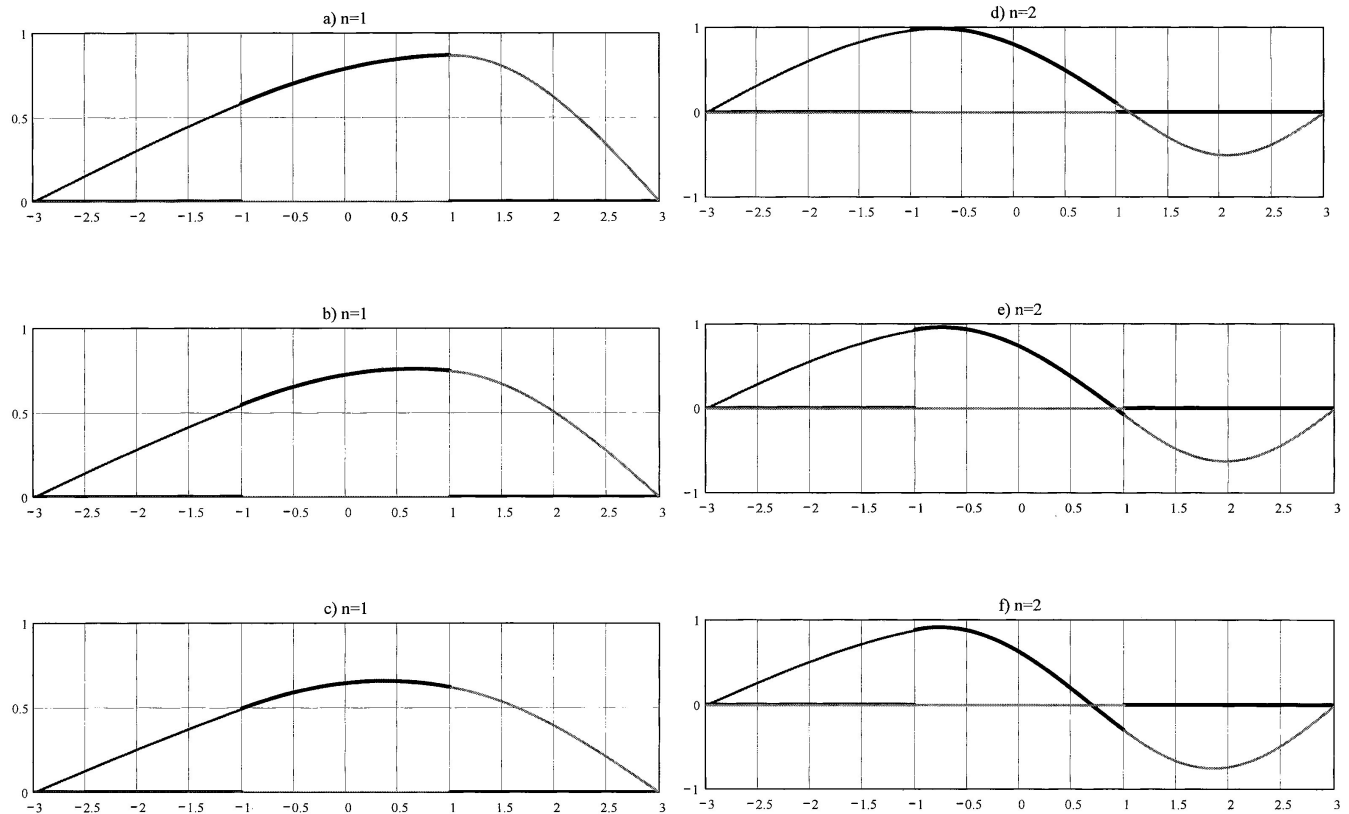


FIGURA 7. Cambios de los modos 1 y 2 para diferentes calibres en tercio intermedio. Se calculan las cuerdas con calibres 28-26-20 (incisos a y d), 28-24-20 (incisos b y e) y 28-22-20 (incisos c y f).

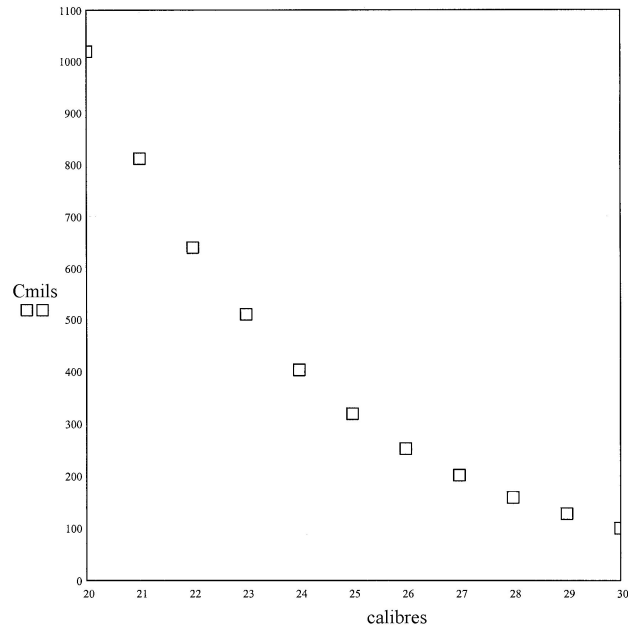


FIGURA 8. Gráfica de calibres como función del área en Cmils. Valores más precisos en referencia [5].

4. Modos experimentales en cuerdas de cobre homogéneas por tercios

Se eligieron los calibres de alambre de cobre considerando la relación 1:2, que fue una relación posible de acuerdo

a los valores comercialmente asequibles de denominaciones 26 y 20, respectivamente. Tras soldar tres segmentos de medio metro de diferente calibre con soldadura convencional ($2L = 1.5$ m, $2a = 0.5$ m), se tensó el alambre resultante con pesas y una polea por un extremo, mientras que el otro extremo se fijó convenientemente. Buscando la excitación de los modos mediante una bocina acoplada al alambre con un caimán soldado apropiadamente, se alimentó ésta con señales provenientes de un generador de funciones.

4.1. Caso simétrico

Las Figs. 9, 10 y 11 muestran los modos experimentalmente encontrados más bajos según las condiciones descritas en la sección anterior uniendo calibres 26-20-26, 20-26-20 y 24-28-24. Estos tres casos se corresponden con $\vartheta_{31} = 1$. Los dos primeros son casos complementarios uno del otro y, de acuerdo a la Fig. 8, aproximan a las relaciones $\vartheta_{21} = 2, 1/2$ respectivamente. El tercer caso, resulta ser determinado por la relación $\vartheta_{21} = \sqrt{159/404}$. Al compararlos con los modos calculados (Figs. 3, 4 y 5), primero se puede observar un acuerdo cualitativo, si bien no se ha incluido al modo más bajo.

La Fig. 9a puede identificarse como el modo $n=2$ (Fig. 3b). La Fig. 9b sería el modo $n=3$ (Fig. 3c), la Fig. 9c, el modo $n=4$ (Fig. 3d) y la Fig. 9d correspondería al modo $n=5$ (Fig. 3e). Las frecuencias encontradas respectivas de cada modo son, 44 Hz, 69 Hz, 89 Hz y 108 Hz. La tensión

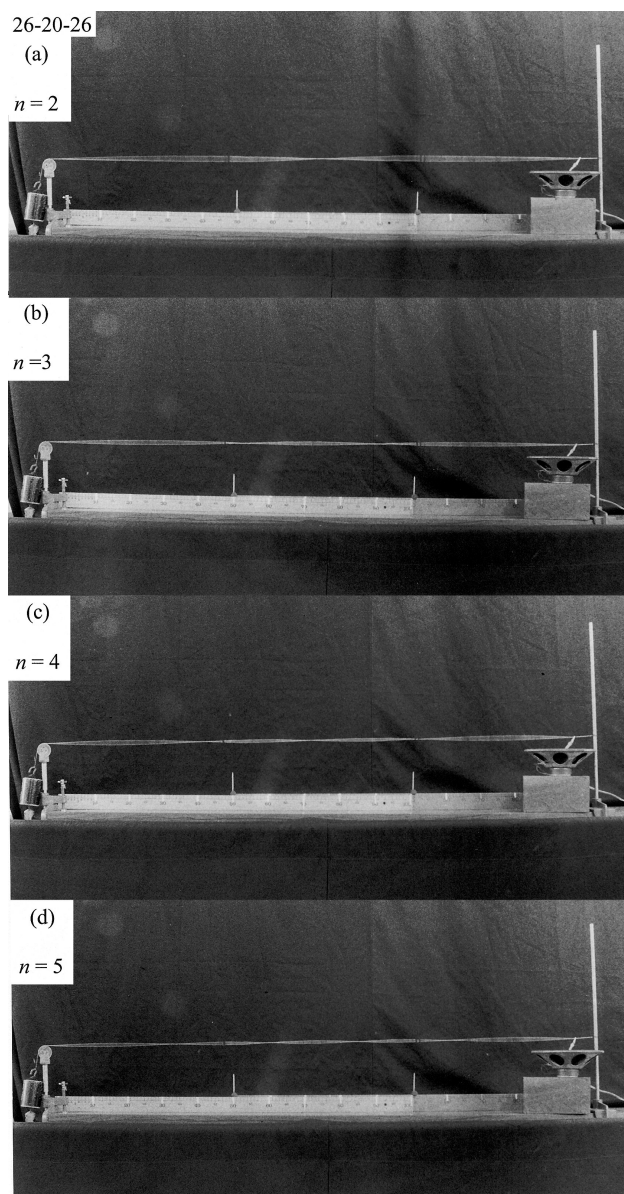


FIGURA 9. Modos experimentales de cuerda con tercios 26-20-26. a) 44 Hz, b) 69 Hz, c) 89 Hz, d) 108 Hz.

aplicada se estimó en $T_0 \approx 8.1$ Nt. La Fig. 10a puede identificarse como el modo $n=2$ (Fig. 4b). La Fig. 10b sería el modo $n=3$ (Fig. 4c) y la Fig. 10c, el modo $n=4$ (Fig. 3d). Las frecuencias encontradas respectivas de cada modo son, 35 Hz, 57 Hz y 71 Hz bajo la misma tensión que el caso anterior. Nótese que en la Fig. 9b, los nodos del modo 3 se encuentran dentro del tercio intermedio, mientras que en la Fig. 10b, se hallan fuera del mismo tercio, de acuerdo con las Fig. 3c y 4c.

La Fig. 11a (24-28-24) puede identificarse como el modo $n=2$ (Fig. 5b). La Fig. 11b sería el modo $n=3$ mostrando sus nodos fuera del tercio intermedio, aunque cerca de las uniones (como en la Fig. 5c), la Fig. 11c, el modo $n=4$ con dos máximos muy cercanos a los puntos de unión (Fig. 5d) y la Fig. 11d correspondería al modo $n=5$ con amplitud del lóbulo central más alta y con los máximos adyacentes fuera

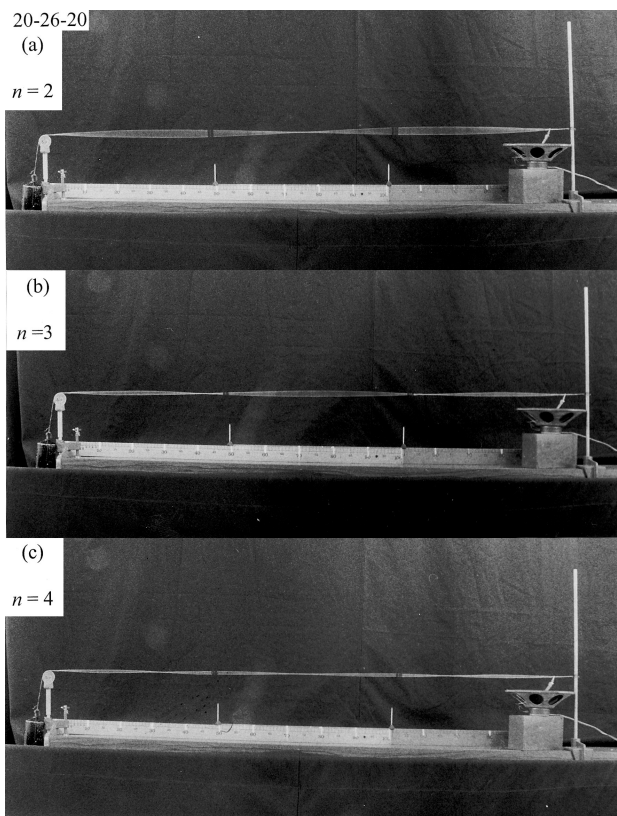


FIGURA 10. Modos experimentales de cuerda con tercios 20-26-20. a) 35 Hz, b) 57 Hz, c) 71 Hz.

del tercio central (Fig. 5e). Las frecuencias encontradas respectivas de cada modo son, 34 Hz, 51 Hz, 64 Hz y 80 Hz. La tensión fue estimada en $T_0 \approx 3.2$ Nt.

4.2. Caso asimétrico

La Fig. 12 muestra los modos experimentalmente encontrados más bajos uniendo calibres 28-22-20, correspondiéndose con $\vartheta_{31} = \sqrt{1020/159}$ y $\vartheta_{21} = \sqrt{640/159}$ y con la Fig. 6.

La Fig. 12a puede identificarse como el modo $n=2$ (Fig. 6b), donde la asimetría es muy clara. La amplitud del lóbulo a la izquierda es mayor. El nodo intermedio se encuentra dentro de tercio medio (33 Hz). La Fig. 12b sería el modo $n=3$ (52 Hz), donde un nodo se halla dentro del tercio medio y otro afuera (Fig. 6c). La Fig. 12c, corresponde al modo $n=4$ (68 Hz), con un nodo en el tercio intermedio (Fig. 6d), la Fig. 12d correspondería al modo $n=6$ (103 Hz), con un nodo en el tercio izquierdo y dos en el intermedio (Fig. 6f). La Fig. 12e correspondería al modo $n=7$ (120 Hz), con un máximo cerca de la unión izquierda y dos nodos en el tercio medio (Fig. 6g). La tensión fue estimada en $T_0 \approx 6.1$ Nt para este caso.

5. Comentarios finales

Siguiendo los métodos de Mecánica Cuántica introductoria para resolver la ecuación de Schödinger independiente del tiempo en potenciales constantes por tramos, se hallaron los

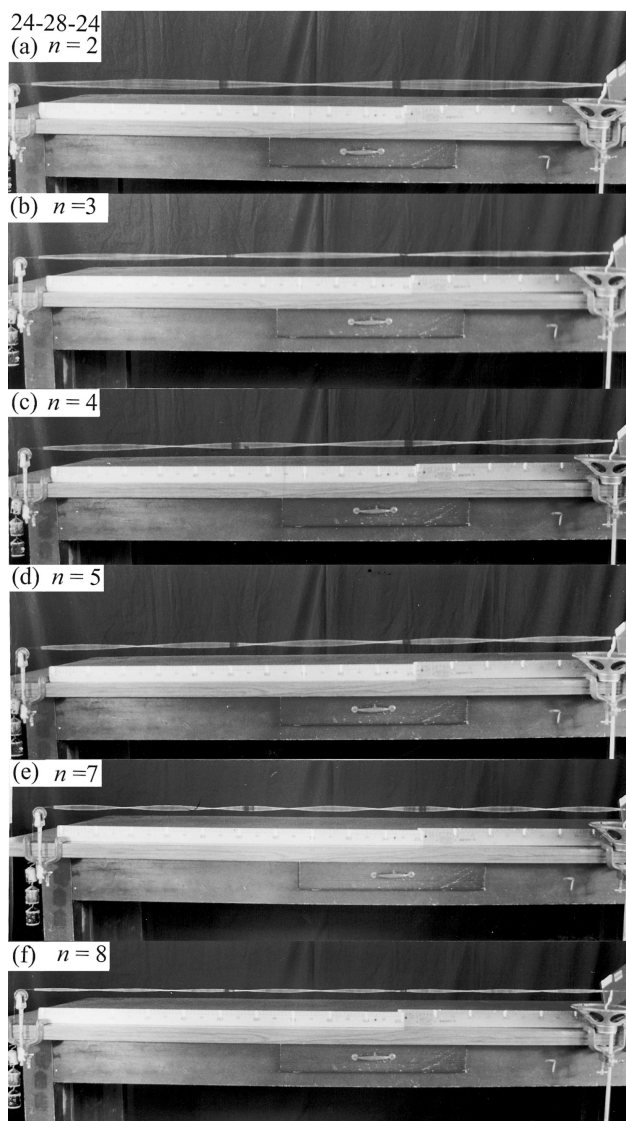


FIGURA 11. Modos experimentales de cuerda con tercios 24-28-24. a) 34 Hz, b) 51 Hz, c) 64 Hz, d) 84 Hz, e) 114 Hz, f) 130 Hz.

modos de oscilación de una cuerda homogénea por tercios, habiendo realizado la comparación experimental y encontrando acuerdo cualitativo con la teoría, así como algunas discrepancias en valores cuyo significado demandaría de un análisis experimental más detallado. El caso analizado tiene su correspondencia mecano-cuántica unidimensional con un potencial en forma de barrera con discontinuidades situadas en $z = \pm a$ y de altura V_0 ; pero dentro de "paredes" de potencial infinito, localizadas en los puntos $z = -L$ y $z = L$ respectivamente. Las tres densidades volumétricas de masa de la cuerda en cada tercio, equivalen entonces a los tres valores del potencial dentro de las "paredes" (por ejemplo, $0, V_0, 0$). La tensión constante en la cuerda, corresponde a la masa m de una misma partícula atrapada dentro de las mismas "paredes". Asimismo, las soluciones halladas corresponden al caso de que la partícula posea una energía E finita y mayor que V_0 , caso caracterizado por números de onda reales. Todo lo anterior establece ondas estacionarias en cada tercio para la

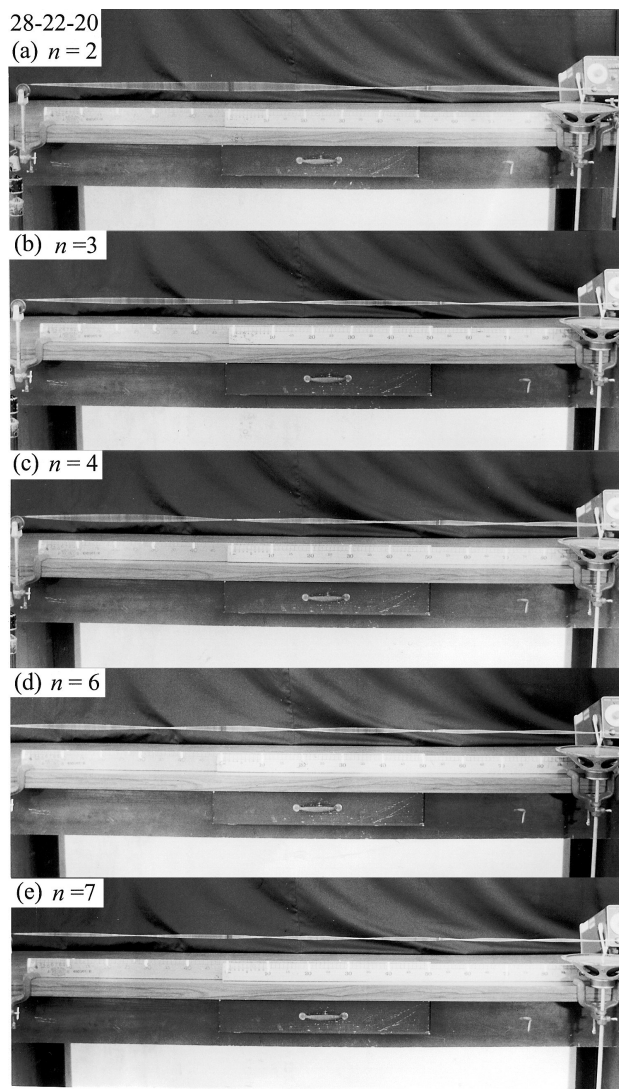


FIGURA 12. Modos experimentales de cuerda con tercios 28-22-20. a) 33 Hz, b) 52 Hz, c) 68 Hz, d) 103 Hz, e) 120 Hz.

función de onda de la partícula.

Entonces el método de empalme de soluciones para los casos de potenciales escalón [1] y barrera, puede ejercitarse en el ámbito de las ondas clásicas previamente a los cursos introductorios de mecánica cuántica. En particular, se ejemplifica la necesidad de resolver ecuaciones gráfica y numéricamente. Las soluciones pueden buscarse empleando paquetes comerciales para cálculo avanzado [6]. La comprobación experimental, por otra parte, puede realizarse con los recursos tradicionales de un laboratorio de ondas empleando cuerdas segmentadas como se ha descrito. Un posible enfoque del caso más general sugiere el empleo de alguna técnica como el método WKB, que podría aplicarse a una cuerda de densidad continuamente variable sujeta a tensión constante. Alternativamente, la cuerda podría tener densidad constante, variando la tensión, situación realizable, por citar un ejemplo plausible, con una cuerda pendiendo verticalmente de un extremo fijo.

Agradecimientos

Los autores agradecen al Fís. A. Vargas Cisneros por el apoyo constantemente ofrecido para la elaboración de este trabajo.

-
1. G. Rodríguez Z., Ramón Alvarado B., Rubén Alvarado B., L. E. Zavala R., *Rev. Mex. Fís.* **47** (2001) 443.
 2. E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, second ed. (Wiley 1970).
 3. L. de la Peña, *Introducción a la Mecánica Cuántica* (CECSA 1980).
 4. Crawford, *Berkeley Physics Course*, vol. 3 (McGraw-Hill Book Co. 1968).
 5. H. Pender, W. A. del Mar, *Electrical Engineerings' Handbook* (Wiley 1949).
 6. MathSoft Inc., Mathcad, *User's guide 7.0* (Massachusetts 1997).