Revista Internacional de Investigación e Innovación Tecnológica

Página principal: www.riiit.com.mx

# Implementación de trayectorias hipotéticas en el álgebra con apoyo de Tic y la metodología de Polya

# Implementation of hypothetical learning paths in algebra with Tic´s support and Polya methodology

**Barradas-Arenas, U.D.[a]*, Cocón-Juárez, J.F.[a], Vázquez-Aragón, M.R.[a], Pérez-Cruz, J.A.[a], Alcocer-Campos, M.H.[e]**

[a] Facultad de Ciencias de la Información, Universidad Autónoma del Carmen, Avenida Periférica Norte 56, Fraccionamiento Lomas de Holché, Ciudad del Carmen, Campeche.
[e] Universidad Pedagógica Nacional 042, Av. Héroes del Vigésima primera de Abril s/n, Playa Nte., 24100 Ciudad del Carmen, Campeche.
ubarradas@pampano.unacar.mx*; jcocon@pampano.unacar.mx; mvazquez@pampano.unacar.mx; japcruz@pampano.unacar.mx; mario.alcocer@upn042.edu.mx

**Innovación tecnológica:** alternativas para el aprendizaje de algebra.

**Área de aplicación industrial:** Educación.

Recibido: 24 octubre 2022
Aceptado: 16 junio 2023

## Abstract

At present, the processes for teaching mathematics undergo constant changes with the introduction of new information technologies; the combination of robust methodologies such as Polya´s presented in a planning based on hypothetical learning trajectories that include the Use of the ICT, are a tool that strengthens the learning process of students in key subjects such as algebra. The method used for this research is of a quantitative nature, applied to a first-semester group**,** modifying the planning in the numerical patterns, successions and series subjects and observing the results obtained with the other subjects with the usual planning.

**Keywords:** hypothetical trajectories, algebra, methodology, education, technological tools.

**Resumen**

En la actualidad los procesos para la enseñanza de las matemáticas sufren cambios constantes con la introducción de las nuevas tecnologías de información, la combinación de metodologías robustas como es el caso de la Polya presentada en una planeación basada en trayectorias hipotéticas de aprendizaje que incluyan el uso de las Tecnologías de información y comunicación (Tic), éstas son una herramienta que fortalece el proceso de aprendizaje de los estudiantes en asignaturas claves como el álgebra. El método utilizado para esta investigación es de carácter cuantitativo, aplicado a un grupo de primer semestre modificando la planeación en los temas patrones numéricos, sucesiones y series y observando los resultados obtenidos con los demás temas con la planeación habitual.

**Palabras clave:** trayectorias hipotéticas, álgebra, metodología, educación, herramientas tecnológicas.

## INTRODUCCIÓN

El presente trabajo contiene la trayectoria hipotética del curso: Manejo de espacios y cantidades referente al tema "Caracterización de los fenómenos de variación constante". En éste se presentan las hipótesis correspondientes que llevan las rutas de aprendizaje, las cuales mediante actividades constructivistas se detectan los posibles errores y con esto se buscan las alternativas correspondientes para generar los aprendizajes esperados en los estudiantes.

Los estudiantes del colegio de educación profesional técnica conforman una población de 500 alumnos en el primer semestre, los cuales presentan un examen de admisión el cual evalúa las áreas de razonamiento matemático y compresión lectora, de acuerdo con datos estadísticos del departamento de control escolar, el área donde mayor problema se encuentra es la de razonamiento matemático, con esto, no llegan al primer semestre con las bases necesarias para poder comprender los contenidos temáticos del curso: Manejo de espacios y cantidades (Álgebra).

Se revisa los aspectos teóricos de las problemáticas del aprendizaje del álgebra en la cual se analizan los factores principales de reprobación del curso y la necesidad de introducir nuevas herramientas basadas en tecnologías de información con las cuales se puede tener un apoyo en el aprendizaje.

A todo esto, se plantea la siguiente hipótesis de investigación, el uso de la trayectoria hipotética aprendizaje desarrolladas con la metodología de Polya será un apoyo para un mejor desempeño en los estudiantes del primer semestre en la asignatura de álgebra.

Este trabajo de investigación tiene como objetivo medir el impacto de la implementación de la trayectoria hipotética de aprendizaje en combinación con la metodología de Polya en la mejora de los aprendizajes de los estudiantes en el curso de álgebra con apoyo de la Tic.

El trabajo se encuentra integrado por la delimitación del problema que plantea los factores que generan la necesidad de implementar la trayectoria hipotética, el estado del arte en el cual se describe la problemática del aprendizaje del álgebra desde la perspectiva de los investigadores, las características que integran una trayectoria de aprendizaje, delimitación de los temas y contenidos, objetivo de los aprendizajes, capacidades de los estudiantes, estado del arte

de los errores y dificultades de los estudiantes, planteo de las hipótesis y trayectorias de aprendizaje, actividades a desarrollar, cerrando con los beneficios del uso de las trayectoria hipotéticas.

**La metodología de Polya**

Este método consiste en enumerar una serie de pasos para la resolución de problemas matemáticos, parte de la compresión, elaboración y ejecución de un plan, terminando con la visión retrospectiva (Figura 1), para realizar esto se plantean diversas interrogantes por cada una de las etapas, lo cual genera que el estudiante conozca todos los elementos a detalle y genere un aprendizaje significativo (Polya, 1965).

**Figura 1.** Pasos en la metodología de Polya. Fuente. Creación propia.

Paso 1: Comprender el problema.
Parte de las preguntas ¿Cuál es la incógnita y los datos?, ¿Cuál es la condición?, y si esta es suficiente redundante o contradictoria, con esto, se trata de visualizar el problema como un todo, buscando sea lo más claro posible.
Paso 2: Concebir un plan.
En este punto se deben considerar las partes principales del problema desde diferentes puntos de vista, los conocimientos previos son fundamentales, las interrogantes que se plantean son: ¿Existen problemas semejantes y que tan útiles pueden ser?, ¿En caso de no existir otro problema semejante como se puede resolver?, por último, ¿Se han empleado todos los datos?
Paso 3. Ejecutar el plan.
Para el paso tres se busca línea a seguir para llegar a la solución del problema, se debe estar seguro de que se tiene una plena compresión del problema, la preguntar que se deben plantear son: ¿Se puede ver de manera clara que los pasos son correctos?, ¿Se puede demostrar?
Paso 4. Visión retrospectiva.
En el cierre se debe considerar todos los detalles de la solución y que estos sean lo más sencillos, es importante que siempre buscar una solución mejor a la obtenida y la relación se puede tener para poder aplicarlo a otros problemas, las preguntas que se deben plantear son: ¿Se puede verificar el resultado y razonamiento?, ¿Se puede obtener el resultado de forma diferente?, ¿Se puede emplear el resultado en otro problema?

**Las problemáticas en el aprendizaje del álgebra**

Muchas son las problemáticas que presentan los estudiantes de bachillerato en el aprendizaje de las matemáticas, el 34.7% reprueba el curso de matemáticas en el primer semestre (Ximhai, 2016).

Entre los factores principales de la reprobación del curso de álgebra se encuentran:

- *Falta de hábitos de estudio.* Los estudiantes se distraen en sus lugares de estudio, mantienen actitudes inapropiadas y no llevan un cronograma de tiempo para el estudio. Por lo general se preparan un día antes de las evaluaciones e intentan memorizar.
- *Dificultad para el razonamiento de problemas.* Requieren una gran cantidad de cálculos, no se basan en

memorización, estos necesitan que el estudiante este enfocado en el problema, por lo general los estudiantes siguen técnicas de memorización que no funcionan en este caso.

- *Deficiencia lecto-escritura.* De acuerdo con Celdran y Zamorano (2008), el estudiante debe conocer el proceso perceptivo, de acceso al léxico, sintáctico, semántico, ortográfico y de memoria operativa, los cuales son necesarios para poder comprender y razonar los problemas de forma correcta (Forero, 2006).
- *Falta de habilidad matemática.* La resolución de problemas consiste en un sofisticado proceso de poner en marcha diversas estrategias para solucionar el problema, esto se debe en la mayoría de los casos a que los estudiantes no poseen los conocimientos conceptuales necesarios para resolver los problemas (González, 2005).
- *Falta de interés.* La falta de interés es un factor muy común en las generaciones actuales, uno de los actores principales que lo genera es el docente, la falta de actualización y sobre todo el enfoque a las nuevas tecnologías de información genera que las sesiones de clases tengan que renovarse y en muchos de los casos no pasa.
- *Problemas de conducta.* Los estudiantes se encuentran en una etapa de rebeldía la cual tiene muchas otras prioridades que un buen desempeño en sus asignaturas.

Por tanto, la falta de comunicación entre el docente y los estudiantes genera parte de los factores antes mencionados, el uso de tecnologías de información puede ser un apoyo de gran utilidad para evitar este problema (Guerrero y Flores, 2009).

De acuerdo con Gómez y Lupiáñez (2005), el uso de la tecnología permite el manejo dinámico de múltiples sistemas de representación de los objetos matemáticos lo cual es una característica muy importante en el aprendizaje de las matemáticas y sobre todo del álgebra.

Las nuevas aplicaciones tecnológicas ofrecen diversas características especiales las cuales son de gran utilidad en la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Los conocimientos que se adquieren generan un proceso muy efectivo de la compresión de las matemáticas de manera más significativa.

Los sistemas informáticos permiten a los estudiantes vivir experiencias desde una diferente perspectiva, construyendo modelos y representaciones con las cuales se puede probar diversas hipótesis y obtener conclusiones en un menor tiempo y con mayor exactitud (Castillo, 2011).

De acuerdo con Gamboa Araya (2007) otras ventajas que ofrece el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza del álgebra son:

- *Paso a paso.* Se requiere conocer el software, herramienta por herramienta, ya que con esto se puede saltar a soluciones de problemas con un grado mayor de complejidad.
- *Diferentes herramientas y métodos.* Se puede analizar un problema con una gran variedad de programas y analizar los resultados con diversos métodos, esto genera entre los estudiantes una discusión para saber cuál es la mejor solución, produciendo aprendizajes significativos.
- *Temas y tareas abiertos.* Para poder lograr el objetivo se debe dar libertad

al estudiante de seleccionar la herramienta que considere pueda darle la solución esperada.

- *Reflexiones y discusiones.* Estas consolidan los aprendizajes obtenidos, con esto se asegura si el estudiante obtuvo o no el aprendizaje esperado.

A su vez, no se puede escapar un factor muy importante, el profesor debe apoyar a los estudiantes para que estos desarrollen habilidades con el manejo del software, diseñando las tareas adecuadas con las cuales pueda lograr esta competencia (Sebastián y Figols, 2013).

La tecnología ha generado un cambio radical en la enseñanza del álgebra, esta es de gran ayuda en la resolución de problemas con resultados más eficientes y con un mayor grado de exactitud; sin embargo, siempre se debe considerar la posibilidad de cometer ciertos errores. Con esto se refiere que las buenas bases del papel y lápiz son fundamentales para tener la certeza de que los resultados que generan los programas utilizados son los adecuados (Arenas et al., 2018).

De acuerdo con Riveros et al., (2011), la tecnología abre espacios para que el alumno pueda tener experiencias matemáticas, que son difíciles con los métodos tradicionales, permitiéndole manipular objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración.

Desde la perspectiva del álgebra, programas como Wolfram Mathematica y GeoGebra, muestran soluciones desde problemas muy simples, hasta aquellos que requieren una cantidad de cálculos complejos.

Un buen uso de las tecnologías de información genera aprendizajes significativos, expande la mente de los estudiantes, genera una mejor compresión y con eso se logra obtener diversas competencias, pero se debe llevar un buen diseño de cada una de las actividades y supervisar que se logre los objetivos planeados de las mismas (Barallobres, 2016).

De acuerdo con Reyes et al., (2018) las limitaciones de los estudiantes del lenguaje algebraico generan la imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse de manera común y sencilla.

Según Castro (2012) las dificultades y obstáculos que se presentan en el aprendizaje del álgebra se clasifican en tres tipos: aquellas que son intrínsecas al objeto, otras que son inherentes al propio sujeto y aquellas otras que son consecuencia, en este último punto se debe considerar también la falta de buenas técnicas de enseñanza.

Entre las dificultades y errores se pueden distinguir tres etapas muy importantes, la primera se basa en el número de situaciones incorrectas a una gran variedad de problemas, el segundo punto parte de indagar los errores con una gran profundidad partiendo del origen, este etapa se caracteriza por reconocer que los errores son también producto de otras variables del proceso educativo, el tercer punto parte de la clasificación del error y su frecuencia, por lo general en este punto no existe un patrón, esto genera que sea muy complicado de identificar (Zazkis y Liljedahl, 2002).

Por tanto, según Zazkis y Liljedahl, (2002) las dificultades del álgebra se organizan en categorías las cuales se asocian a la disciplina, complejidad y pensamiento matemático, los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje matemático, los procesos de desarrollo cognitivo del alumno y por último, las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

La falta de traducción del simbolismo algebraico al lenguaje natural, también presentan problemas en los estudiantes, ya que estos deben poseer un excelente empleo de la forma escrita de números, letras y signos para generar un sistema de representación que le permiten expresar aspectos y propiedades en un lenguaje algebraico (Fernández Millán y Molina, 2016).

Menciona Azañero Távara (2013) que los estudiantes tienen problemas al comprender los enunciados de los ejercicios, estos presentan dificultades en las interrogantes de los enunciados, sustenta que la interpretación de la oración es el origen de los errores y falta de compresión de los temas.

> De acuerdo con Martínez et al., (2014) los alumnos tienen serias deficiencias en el manejo de operaciones con números negativos y positivos. Así como en el manejo de las jerarquías de las operaciones y el uso de paréntesis, a su vez se obtuvieron resultados deficientes en el manejo del lenguaje algebraico. Esto se evidenció en la dificultad que presentaron los alumnos al traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico (p.5).

## Características de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje

El Concepto de una trayectoria de aprendizaje está compuesto por un modelo del desarrollo del aprendizaje de los alumnos que se vincula a un tópico matemático particular, y por un conjunto de tareas que pueden promover dicho aprendizaje (Figura 2), la característica general de la trayectoria integra objetivos, capacidades, planificación e hipótesis (Bernabeu y Llinares, 2016).

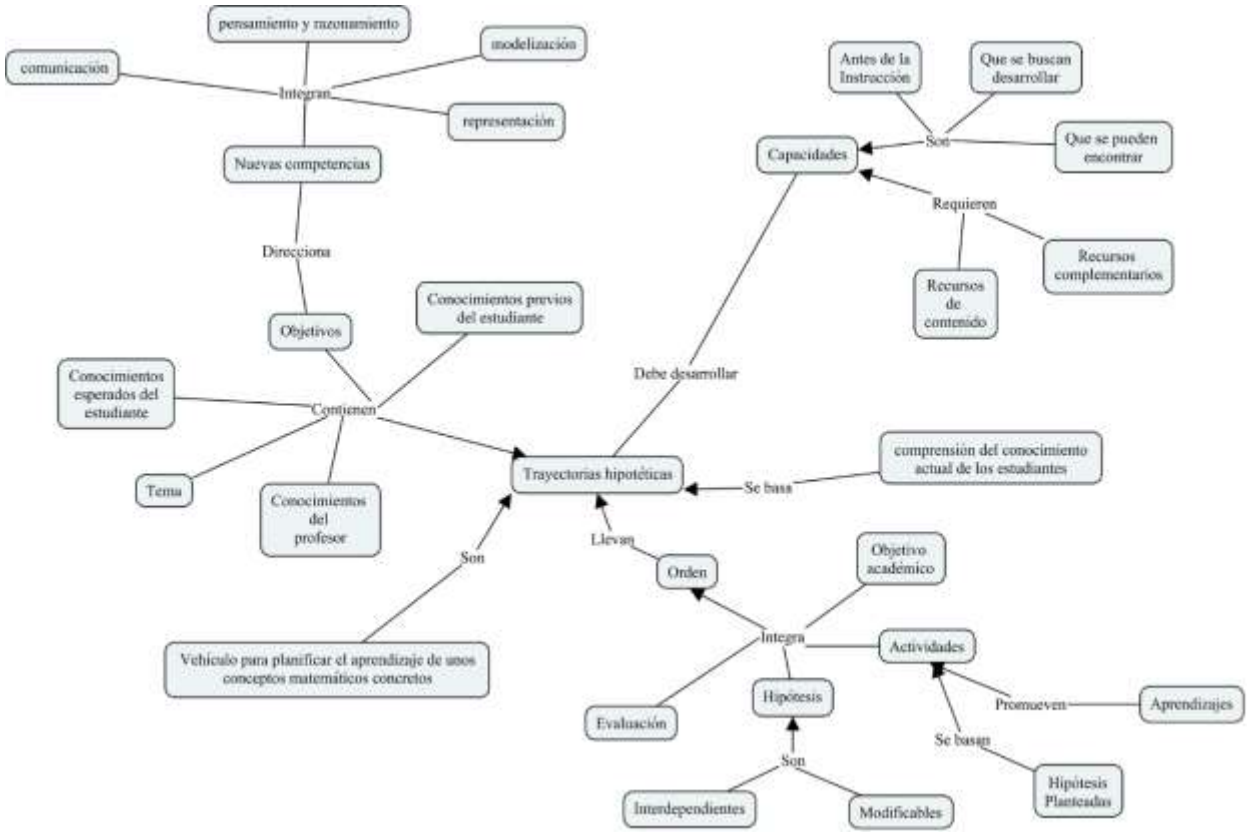


**Figura 2.** Trayectorias hipotéticas. Fuente. Creación propia.

## METODOLOGÍA Y DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación realizada se basa en el enfoque cuantitativo, como primer paso se utilizó un instrumento que da validez a la propuesta que se plantea en el problema, este se encuentra compuesto por 12 reactivos los cuales se realizaron mediante la escala de Likert, el instrumento tienen como objetivo medir las variables: objetivos preestablecidos por el estudiante, conocimientos previos y proceso de aprendizaje (tabla 1), dando el sustento requerido para el uso de la metodología propuesta, la población está compuesta por 21 estudiantes del curso de álgebra del primer semestre de bachillerato.

**Tabla 1.** Variables e indicadores.

| Variable | Indicadores | Número de reactivos |
|---|---|---|
| Objetivos preestablecidos por el estudiante | Objetivos personales | 2 |
| | Propósitos y metas | 2 |
| Conocimientos previos | Compresión de temas | 2 |
| | Relación de los aprendizajes | 2 |
| Proceso de aprendizaje | Resultados de desempeño | 2 |
| | Nuevos aprendizajes | 2 |

Fuente. Elaboración propia.

Para validar la confiabilidad del instrumento se utilizó el método estadístico alfa de Cronbach en la herramienta SPSS, este procedimiento da la certeza de que los resultados obtenidos sean altamente viables (Campo y Oviedo, 2005), el instrumento aplicado mostró como resultado 0.89 lo cual lo hace altamente confiable (tabla 2).

**Tabla 2.** Estadísticas de fiabilidad.

| Alfa de Cronbach | Alfa de Cronbach basada en elementos estandarizados | N de elementos |
|---|---|---|
| .883 | .893 | 12 |

Fuente. Elaboración propia.

El estadístico de confiabilidad no requiere de suprimir ningún ítem ya que estos no impactan de manera directa en los resultados obtenidos (tabla 3).

**Tabla 3.** Estadísticas de total de elemento.

| | Media de escala si el elemento se ha suprimido | Varianza de escala si el elemento se ha suprimido | Correlación total de elementos corregida | Correlación múltiple al cuadrado | Alfa de Cronbach si el elemento se ha suprimido |
|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Soy organizado en mis actividades escolares. | 43.38 | 29.948 | .617 | .654 | .872 |
| Me propongo metas en mis actividades escolares. | 43.33 | 31.133 | .513 | .574 | .878 |
| Evalúo mis resultados y trabajo para mejorarlos. | 43.33 | 29.133 | .718 | .802 | .866 |
| Soy constante en los objetivos que me propongo para lograr mis aprendizajes. | 43.57 | 29.057 | .670 | .621 | .869 |
| Repaso conocimientos anteriores de las asignaturas antes de iniciar los nuevos. | 44.52 | 28.462 | .615 | .588 | .873 |
| Comprendo temas nuevos y los relaciono con los vistos en cursos anteriores. | 43.57 | 30.957 | .647 | .755 | .872 |
| Propongo ideas en clase basadas en conocimiento de cursos anteriores. | 44.52 | 28.662 | .516 | .660 | .882 |
| Tengo claro los conceptos previos vistos en clase y establezco una relación estrecha con los nuevos facilitando mi aprendizaje. | 43.81 | 29.062 | .580 | .570 | .875 |
| Los resultados de mis evaluaciones diagnosticas son aceptables. | 43.81 | 32.662 | .331 | .455 | .886 |
| Doy seguimiento a los temas de las asignaturas y comprendo los contenidos de estas de forma clara. | 43.76 | 31.190 | .505 | .589 | .878 |
| Establezco objetivos en cada asignatura y logro un desempeño aceptable. | 43.81 | 30.062 | .856 | .790 | .864 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Planteo retos en mis aprendizajes y analizo los resultados obtenidos en busca de mejorarlos. | 43.43 | 30.557 | .624 | .697 | .872 |

Fuente. Elaboración propia.

De acuerdo con el análisis del instrumento base, los estudiantes realizan un seguimiento de los resultados obtenidos en sus actividades y trabajan en su mejora, del total de la muestra el 52.4% lo menciona (figura 3), este ítem impacta de manera directa en la variable objetivos preestablecidos por el estudiante la cual es una de las metas buscadas en la implementación de las THA.

**Figura 3.** Objetivos preestablecidos. Fuente. Elaboración propia.

La variable conocimientos previos de los estudiantes en el indicador de la relación que el estudiante establece entre sus conocimientos previos y los nuevos demuestra que el 66.7% lo lleva a cabo (figura 4), por tanto, dentro de las THA el logro de los aprendizajes esperados tiene una relación estrecha con los conocimientos base y dan apertura a la formulación de hipótesis demostrables.

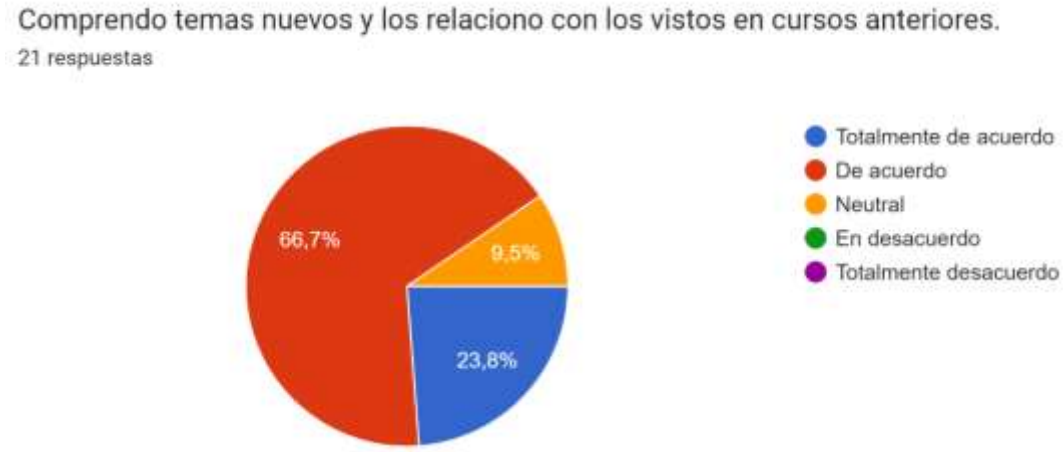


**Figura 4.** Conocimientos previos. Fuente. Elaboración propia.

Por último, los procesos de aprendizaje están sustentados en los objetivos y desempeño aceptable de los estudiantes, el 71.4% menciona que de cada meta que plantea logra conseguir resultados favorables (figura 5), las THA se componen por objetivos alcanzables y en caso de no conseguirse se replantean las hipótesis.

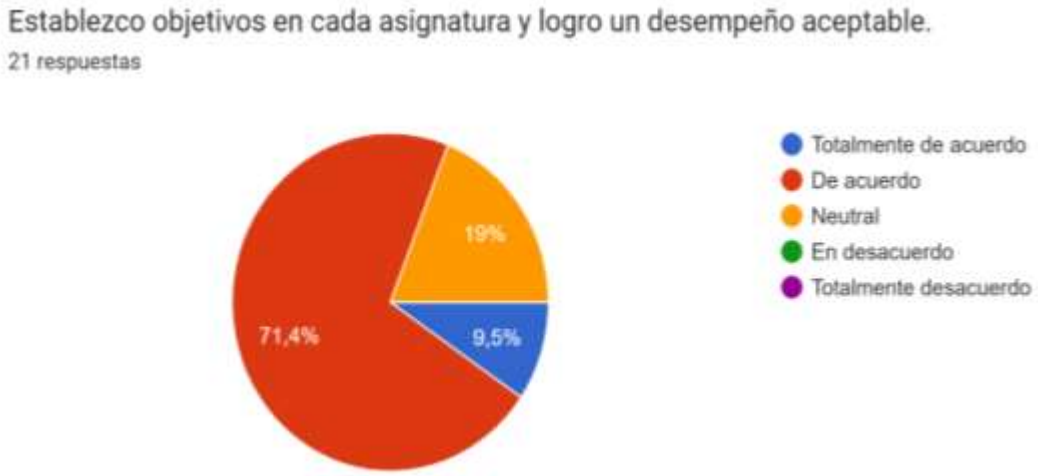


**Figura 5.** Procesos de aprendizaje. Fuente. Elaboración propia.

El instrumento base muestra una relación clara con los objetivos buscados por las THA, por tanto, se considera viable la propuesta de aplicación con la cual se busca lograr una mejor compresión de los temas vistos en la asignatura y poder medirlos de tal forma que pueda aplicarse mejoras y nuevos planteamientos con resultados satisfactorios.

Con base en los resultados obtenidos del instrumento se obtiene todos los elementos necesarios para la elaboración de la THA, con la cual se implementará la propuesta de solución en combinación con la metodología de Polya.

## DESARROLLO DE LA PROPUESTA

El programa del curso lleva por nombre *Espacios y Cantidades*, que se imparte en el bachillerato tecnológico durante el primer ciclo escolar. Los temas seleccionados para la investigación fueron los *elementos del Álgebra básica* y el de *sucesiones y series* (Figura 6).

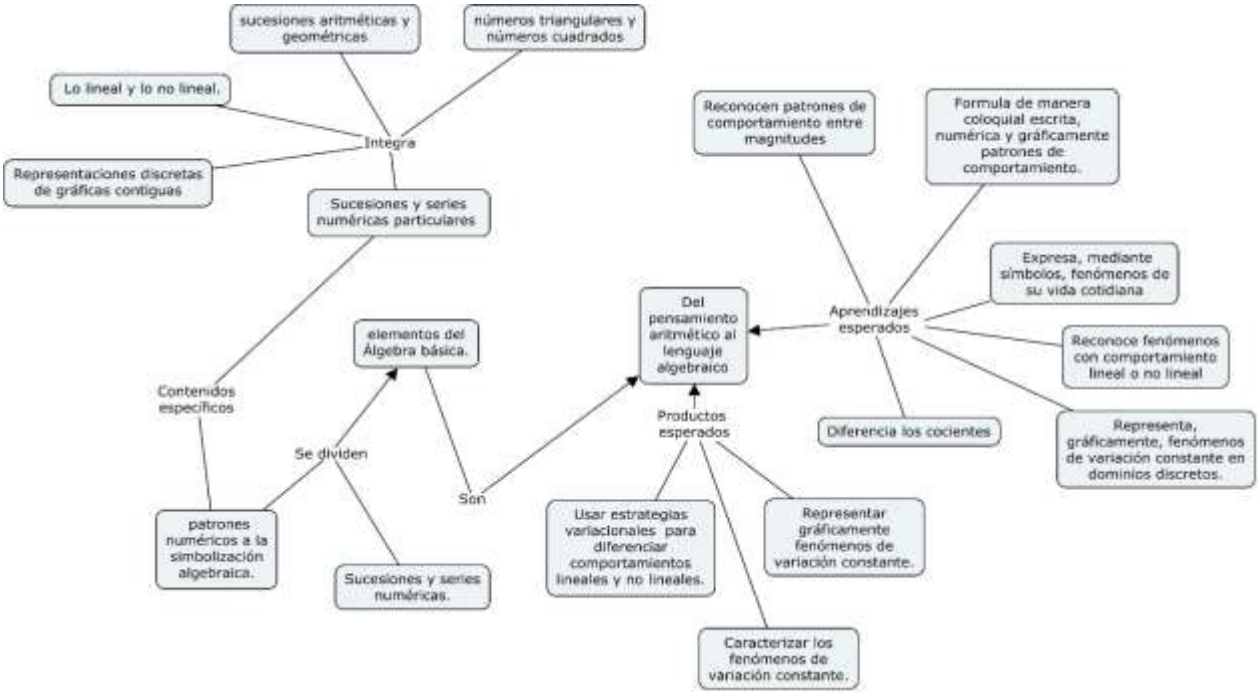


**Figura 6.** Contenidos a desarrollar. Fuente. Elaboración propia.

**Objetivo del aprendizaje**

Que el estudiante pueda interpretar y reconocer patrones de comportamiento, expresar y reconocer mediante símbolos fenómenos de su vida cotidiana ya sea de comportamiento lineal o no lineal y de manera gráfica.

**Capacidades del estudiante**

*Antes*

- Uso de las variables y las expresiones algebraicas.
- Usos de los números y sus propiedades.
- Conceptos básicos del lenguaje algebraico:
  - Transitan del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico.
  - Desarrollan un lenguaje algebraico, un sistema simbólico para la generalización y la representación.
  - Expresan de forma coloquial y escrita fenómenos de su vida cotidiana con base en prácticas como: simplificar, sintetizar, expresar, verbalizar, relacionar magnitudes, generalizar patrones, representar mediante símbolos, comunicar ideas, entre otras.
  - Reconoce la existencia de las variables y distinguen sus usos como número general, como incógnita y como relación funcional.
  - Interpreta y expresan algebraicamente propiedades de fenómenos de su entorno cotidiano.
  - Evalúa expresiones algebraicas en diversos contextos numéricos.

Este apartado se verifica mediante la valoración del examen diagnóstico, el cual demuestra los conocimientos previos del estudiante, del cual se obtuvo como resultados que solo el 50% de los estudiantes

cuenta con una buena base de conocimientos previos (tabla 4).

**Tabla 4**. Evaluación diagnostica.

| Número de estudiantes | Conceptos teóricos | Resolución de problemas |
|---|---|---|
| 21 | 56% | 44% |

Fuente. Elaboración propia.

*Después*

- Reconocen patrones de comportamiento entre magnitudes.
- Formula de manera coloquial escrita (retórica), numérica y gráficamente patrones de comportamiento.
- Expresa, mediante símbolos, fenómenos de su vida cotidiana.
- Reconoce fenómenos con comportamiento lineal o no lineal.
- Diferencia los cocientes.
- Representa, gráficamente, fenómenos de variación constante en dominios discretos.

## Errores y dificultades de los estudiantes

La falta de bases sólidas en los contenidos anteriores al tema de características de los fenómenos de variación constante es una de las principales problemáticas que genera que los estudiantes tengan dificultades en el aprendizaje y comenta errores en este proceso, estos resultados se obtuvieron de la evaluación diagnostica aplicada a los estudiantes.

## Hipótesis sobre el aprendizaje

1. Los estudiantes presentan problemas en la interpretación de patrones numéricos y su simbolización algebraica.
2. Los estudiantes presentan problemas en la representación y reconocimiento de fenómenos de comportamiento lineales y no lineales mediante el uso de papel y software matemático.
3. Los estudiantes presentan dificultades en la representación gráfica de fenómenos de variación constante mediante el uso de software de computadora.

## Caminos del aprendizaje

Aplicando la trayectoria hipotética de aprendizaje en el estudiante (Figura 7), estos deben desarrollar las actividades de aprendizaje para lograr el cumplimiento de las hipótesis planteadas por el docente haciendo uso de los recursos de aprendizaje.

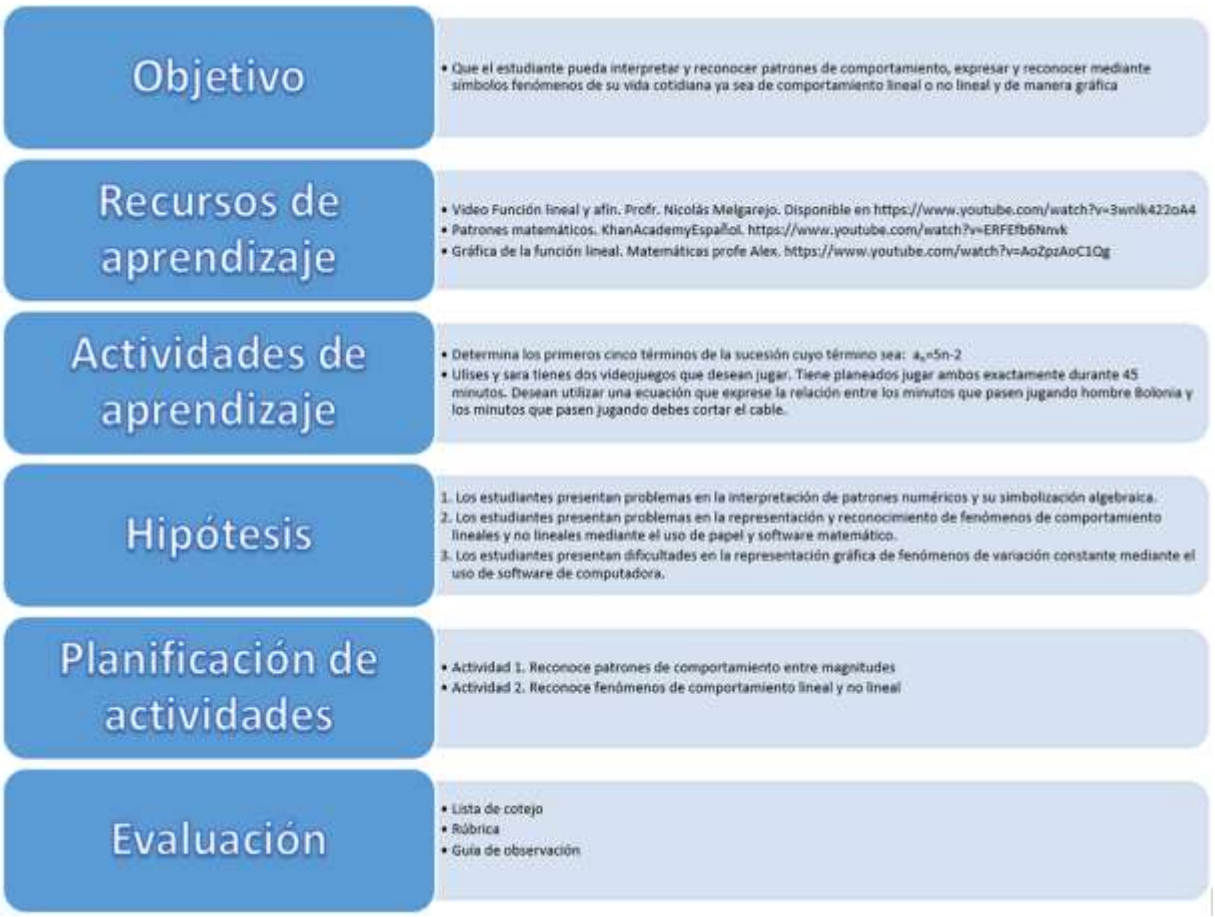


**Figura 7.** Caminos del aprendizaje. Fuente. Elaboración propia.

**Tareas de aprendizaje**

**Actividad 1. Reconoce patrones de comportamiento entre magnitudes**

Determina los primeros cinco términos de la sucesión cuyo término sea:

$$a_n=5n-2$$

**Paso 1. Comprende el problema.**

Para dar solución al problema los estudiantes deben tener conocimientos de los siguientes temas (aplicando la metodología de Polya):

1. Uso de las variables y las expresiones algebraicas.
2. Usos de los números y sus propiedades.
3. Conceptos básicos del lenguaje algebraico.

Los alumnos deben relacionar los conocimientos previos y resolver el problema, el docente debe iniciar con la siguiente pregunta:

- *¿Cuál es la incógnita?*

  Calcular las posibles soluciones para este caso del valor de n.
- *¿Cuáles son los datos?*

  Para este caso es la sucesión $a_n=5n-2$ y los valores de n = (1,2,3,4,5).
- *¿Qué letra designará a la incógnita?*

  Para el caso de esta sucesión será la letra n.
- *¿Cuál es la condición?*

  Calcular la sucesión tomando en cuenta los primeros 5 valores para n, los cuales son: n = (1,2,3,4,5).
- *¿Es suficiente la condición para determinar la incógnita?*

Se conoce la sucesión y los valores similares con los cuales se puede implementar una solución.

**Paso 2. Plan. De acuerdo con la instrucción se llevó a cabo el siguiente:**

- *¿Se ha encontrado un problema semejante?*
  Existe una gran cantidad de problema similares con los cuales se puede implementar una solución, a continuación, veremos un ejemplo:
  Veremos un ejemplo el cual realizaremos en papel y lápiz.
  Encuentra el décimo término de la sucesión

$$a_n = \frac{n}{n+2}$$

Sustituimos valor de n con el décimo término

$$a_{10} = \frac{10}{10+2} = \frac{5}{6}$$

Con base en esto partimos a la siguiente interrogante.

- *¿Puede hacer uso de él?*

Como la sucesión es similar a la planteada en el problema los pasos a seguir para la solución son los mismo, por tanto, si se puede hacer uso.
Regresando al problema anterior realizamos los siguientes pasos:

1. Obtener los valores de n = (1,2,3,4,5).
2. Hacer las operaciones correspondientes.
3. Utilizar software como apoyo.
4. Obtener los resultados.

**Paso 3. Ejecutar el plan. Se lleva a cabo el plan para buscar los resultados deseados.**

1. $a_n$=5n-2
   $a_1$=5(1)-2 = 3
   $a_2$=5(2)-2 = 8
   $a_3$=5(3)-2 = 13
   $a_4$=5(4)-2 = 18
   $a_5$=5(5)-2 = 23
   Utilizando Excel para obtener valores n, con la formula (véase figura 8).

   =(5*F4)-2

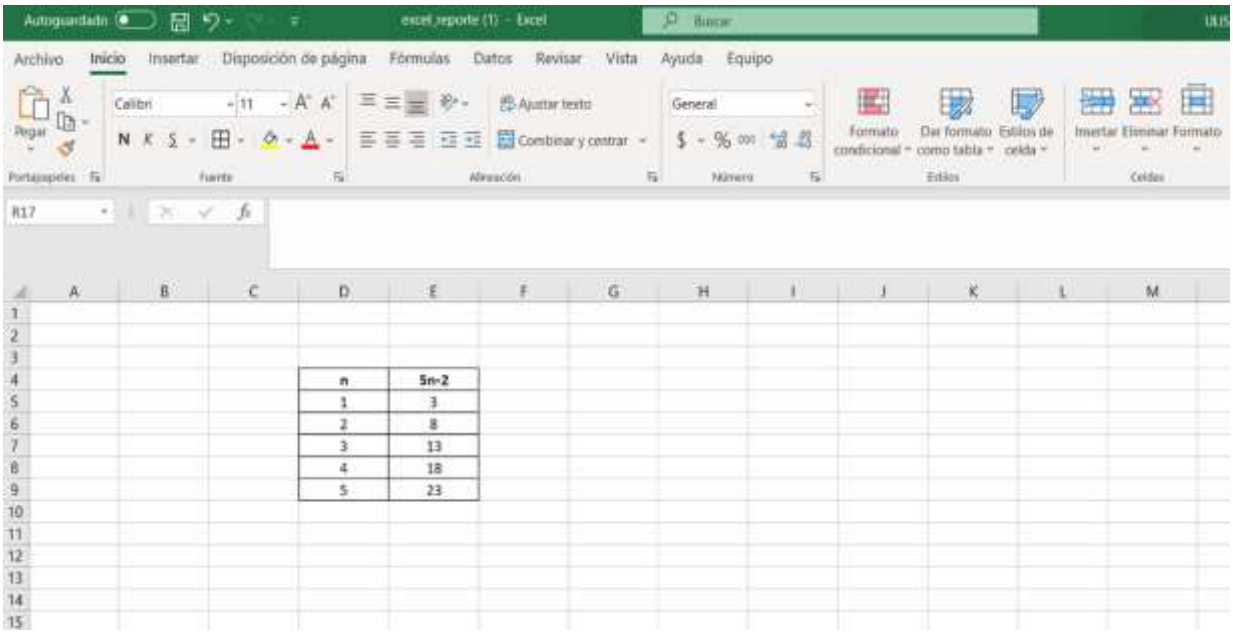


**Figura 8.** Valores en tabla. Fuente: Creación propia.

Respondemos a las siguientes cuestiones.

- *¿Puede ver claramente que el paso es correcto?, ¿Puede demostrarlo?*
  Para este caso es correcto pudimos comprobar mediante el uso de la herramienta Excel que los resultados son los mismo que mediante el uso de papel y lápiz, el cual también demuestra que al colocar la sucesión se generan los valores esperados.

**Paso 4. Examinar la solución obtenida**.

Plantea las siguientes interrogantes:

- *¿Puede usted verificar el resultado?, ¿puede verificar el razonamiento?*
  La asignación de datos dentro de las sucesiones demuestra que los resultados son correctos, sobre todo al comprobar el ejercicio basado en la demostración del ejemplo propuesto anteriormente y el planeamiento dentro de la hoja de cálculo.
- *¿Puede obtener el resultado de forma diferente?*
  Se puede plantear la sucesión de manera diferente y obtener el mismo resultado.
- *¿Se puede presentar el resultado en algún otro problema?*
  Para este tipo de sucesiones la soluciones a obtener pueden llevar el mismo procedimiento.

**Actividad 2. Reconoce fenómenos de comportamiento lineal y no lineal.**

Ulises y Sara tienes dos videojuegos que desean jugar. Tiene planeados jugar ambos exactamente durante 45 minutos. Desean utilizar una ecuación que exprese la relación entre los minutos que pasen jugando “hombre Bolonia” y “debes cortar el cable”.
*¿Puede ser representada mediante una ecuación lineal de dicha relación?*

**Paso 1. Comprende el problema.**

Para dar solución al problema los estudiantes deben tener conocimientos de los siguientes temas:

1. Interpreta y expresan algebraicamente propiedades de fenómenos de su entorno cotidiano.
2. Evalúa expresiones algebraicas en diversos contextos numéricos.
3. Reconocen patrones de comportamiento entre magnitudes.

Los alumnos deben relacionar los conocimientos previos y resolver el problema, el docente debe iniciar con la siguiente pregunta:

- *¿Cuál es la incógnita?*
  Representar la ecuación lineal y demostrarla.
- *¿Cuáles son los datos?*
  Para este caso x = tiempo jugando Bolonia, y = tiempo jugando debes cortar el cable.
- *¿Qué letra designará a la incógnita?*
  Para el caso de este problema el valor de y.
- *¿Cuál es la condición?*
  Demostrar que se puede representar una ecuación lineal con base en él enunciado.
- *¿Es suficiente la condición para determinar la incógnita?*
  Se conoce la condición y los valores similares con los cuales se puede implementar una solución.

**Paso 2. Plan.**

De acuerdo con la instrucción se llevó a cabo el siguiente:

- *¿Se ha encontrado un problema semejante?*
  Existe una gran cantidad de problema similares con los cuales se puede implementar una solución, a continuación, veremos un ejemplo:

Veremos un ejemplo el cual realizaremos en papel y lápiz y el software GeoGebra.

Manuel es un vendedor de pinturas de casa la compañía para la que trabaja le paga un salario fijo de $65 pesos al día, más 20 de comisión por cada cubeta de pintura que venda.

- *¿Puede ser representada mediante una ecuación lineal de dicha relación?*

y= salario total / día

x= cantidad de cubetas vendidas / día

por tanto

y= 20x + 65 (véase figura 9)

ya que el salario es fijo y las comisiones pueden variar.

Asignamos valores para tabularla

| x | y |
|---|---|
| 0 | 65 |
| 1 | 85 |
| 2 | 105 |
| 3 | 125 |

y= 20(0)+65=65

y= 20(1)+65=85

y= 20(2)+65=105

y= 20(3)+65=125

Se captura la ecuación al programa GeoGebra

**Figura 9.** Demostración en GeoGebra. Fuente. Creación propia.

Por tanto, dando respuesta a la siguiente interrogante:

- *¿Puede ser representada mediante una ecuación lineal de dicha relación?*

Si, queda demostrado que se puede representar la ecuación lineal.

Con base en esto partimos a la siguiente interrogante.

- *¿Puede hacer uso de él?*

Como él problema es similar al planteado los pasos a seguir para la solución son los mismo, por tanto, si se puede hacer uso.

Regresando al problema anterior realizamos los siguientes pasos:

1. Con base en el problema representamos lo valores de x,y.
2. Formulamos la ecuación.
3. Asignamos cuando menos 2 valores.
4. Demostramos gráficamente.

**Paso 3. Ejecutar el plan.**

Se lleva a cabo el plan para buscar los resultados deseados.

x = tiempo jugando Bolonia

y = tiempo jugando debes cortar el cable.

x+y = 45

-x+x+y=45-x// eliminamos la x de la izquierda

y=45-x // movemos x

y=-x+45 (véase figura 9)

la ecuación tiene forma de la recta y=mx+b, agregamos un valor 1 para que sea similar

y=-1x+45

asignamos valores

| x | y |
|---|---|
| 0 | 45 |
| 1 | 44 |
| 2 | 43 |
| 3 | 42 |

y=-1(0)+45=45

y=-1(1)+45=44

y=-1(2)+45=43

y=-1(3)+45=42

**Figura 9.** Ecuación en GeoGebra. Fuente. Creación propia.

Por tanto, dando respuesta a la siguiente interrogante:

- *¿Puede ser representada mediante una ecuación lineal de dicha relación?*

  Si, queda demostrado que se puede representar la ecuación lineal.

**Paso 4. Examinar la solución obtenida**.

Plantea las siguientes interrogantes:

- *¿Puede usted verificar el resultado?, ¿puede verificar el razonamiento?*

  La asignación de datos para la ecuación obtenida da respuesta a la interrogante propuesta en él problema, sobre todo al comprobar el ejercicio basado en la demostración del ejemplo propuesto anteriormente y el planeamiento dentro del programa GeoGebra.
- *¿Puede obtener el resultado de forma diferente?*

  Se puede plantear la descripción verbal del problema de diferentes formas y obtener el mismo resultado.
- *¿Se puede presentar el resultado en algún otro problema?*

  Para este tipo de ejercicios solo se debe verificar que cumpla con los

requerimientos de la ecuación de la recta.

## RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

Con base en los resultados obtenidos de los 21 estudiantes que interactuaron con la propuesta se obtuvieron los siguientes resultados.

**Tabla 4.** Análisis de resultados.

| Número de estudiantes | Aprendizajes obtenidos | Resultados finales de la actividad propuesta |
|---|---|---|
| 21 | 65% | 78% |

Fuente. Creación propia.

El 65% de los estudiantes lograron desarrollar la actividad en todas las etapas propuestas de acuerdo con la metodología planteada, a pesar de que el 78% tuvo calificación aprobatoria, el 13% logro resolver el problema, pero presentó dificultades en los caminos planteados durante la THA, por tanto, se comprueba la hipótesis planteada en el problema de investigación.

Se demostró que a pesar de que los estudiantes presentan problemas en interpretación, simbolización algebraica, reconocimiento de fenómenos lineales, representación gráfica de fenómenos e interpretación de resultados mediante programas matemáticos, la metodología planteada basada en Polya y las THA arrojo resultados satisfactorios por encima de la media.

## DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Las THA han despertado el interés de la investigación matemática, con estas se pueden analizar desde los más profundo los errores de aprendizaje de los estudiantes y dar soluciones efectivas para corregirlos, todo esto se plantea en hipótesis la cuales durante la ruta de aprendizaje se van modificando.

Algunas de las desventajas que pueden presentar es que requieren de gran cantidad de tiempo para su elaboración, otra es que requiere de actualización constante lo que deben ser revisadas cada ciclo escolar, de acuerdo con Lima y Biachini (2022) requiere se adapte a las actuaciones de los escolares, y una idea tradicional de la planificación de esa instrucción que se basa en la búsqueda de unos objetivos predeterminados y en el diseño de unas tareas para lograrlos.

Otra de las desventajas que, dada la naturaleza hipotética e inherentemente incierta de este proceso, el profesor se verá obligado a modificar sistemáticamente cada aspecto de la trayectoria hipotética de aprendizaje (Gómez y Lupiáñez, 2005).

Algunas de las ventajas de las THA es que generan caminos para que los profesores puedan moverse en el trayecto del aprendizaje de alumno, reduciendo el margen de error de estos, le proporcionaron al investigador un criterio racional para decidir el diseño que él considera, la mejor conjetura de cómo puede avanzar el aprendizaje (Mateos Mateos, 2009).

Otra ventaja de las THA es que el desglose de las actividades permite ver de manera clara los caminos del aprendizaje, en estas se pueden detectar los errores desde un inicio e irse modificando para poder llegar al aprendizaje esperado.

## CONCLUSIONES

Las THA como medio de apoyo para la generación de actividades y detección de errores en el aprendizaje son de gran utilidad y que mejor aplicarlas en el primer semestre de bachillerato donde más altos son los índices de reprobación y abandono escolar, en ocasiones los estudiantes se les complica expresar dudas sobre los contenidos

temáticos por diversos factores, con el uso de las THA se puede detectar con tiempo debilidades de los estudiantes y se pueden atender para lograr el aprendizaje de estos.

En el diseño de las THA no se debe olvidar siempre contemplar la esencia de estás que es la generación de hipótesis, actividades de aprendizaje constructivistas que lleven a los estudiantes a los conocimientos esperados, recursos de aprendizaje y evaluación.

Su estructura es compleja y estructurada, el acompañamiento de la metodología de Polya dentro de las THA, generan que el desarrollo de las actividades sea aún más detallado y se busque casi en su totalidad el aprendizaje por parte de los estudiantes en cada una de sus tareas.

No se debe olvidar el apoyo que las tecnologías de información generan y que es clave integrarlas en el desarrollo de las THA, herramientas como GeoGebra, Excel, Mathematica, entre otras, nos permiten realizar análisis, comparaciones y sobre todo interpretar resultados que mediante el uso de papel y lápiz tendría un grado mayor de complejidad.

La implementación de las THA genera grandes beneficios y debería ser aplicada en los diseños de clase de los bachilleratos generales dentro de las secuencias didácticas como trabajo de academia.

## FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Como futura línea de investigación se propone el desarrollo de un sistema de información para la creación de secuencias de aprendizaje basadas en trayectorias hipotéticas de aprendizaje la cual los docentes involucrados en las asignaturas de matemáticas puedan proponer diversas actividades y enriquecer los contenidos de las THA.

## BIBLIOGRAFÍA

Arenas, C. B., Rico, S. E. P., & Zavaleta, J. G. M. (2018). Arithmetic procedures in variational phenomena problem-solving. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *32*(60), 75–91. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a04

Azañero Távara, L. M. (2013). Errores que presentan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de problemas con ecuaciones lineales. *Pontificia Universidad Católica del Perú*, 1–116. http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5064

Barallobres, G. (2016). Diferentes interpretaciones de las dificultades de aprendizaje en matemática. *Educacion Matematica*, *28*(01), 39–68. https://doi.org/10.24844/em2801.02

Bernabeu, M., & Llinares, S. (2016). El desarrollo de una "mirada profesional": La idea de trayectoria de aprendizaje del pensamiento geométrico. *XIV Jornadas de Redes de Investigación en docencia Universitaria*, *2041*(378), 1148–1163. http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/61787

Campo, A., & Oviedo, H. (2005). Revista Colombiana de Psiquiatría Aproximación al uso del coeficiente alfa de Cronbach. *Revista Colombiana de Psiquiatría*, *XXXIV*(1), 571–580. http://www.redalyc.org/pdf/806/80634409.pdf%0Ahttp://www.redalyc.org/pdf/806/80650839004.pdf

Castillo Nava, M. (2011). ¿Es la comunicación un factor de aprendizaje de las matemáticas? *Revista Iberoamericana de Educación*, *56*(3), 1–

5. https://doi.org/10.35362/rie5631520

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. *Investigación en Educación Matemática XVI*, *2012*, 75–94. http://funes.uniandes.edu.co/11199/2/Castro2012Dificultades.pdf

Celdran, N., & Zamorano, F. (2008). Dificultades en la adquisición de la lecto-escritura y otros aprendizajes. *Investigacion y Educacion*, *1*, 37. http://diversidad.murciaeduca.es/orientamur/gestion/documentos/unidad24.pdf

Fernández Millán, E., & Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *34*(1), 53–71. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1455

Forero, A. (2006). Desarrollo de la lectoescritura: adquisicion y dominio. *Acta Colombiana De Psicologia*, *9*(1), 25–40. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=79890103

Gamboa Araya, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, *3*, 11–44.

George Polya (1965). Cómo plantear y resolver problemas [título original: How To Solve It?]. México: Trillas. 215 pp. *Entreciencias: diálogos en la Sociedad del Conocimiento*, *3*(8).

Guerrero, T. M., & Flores, H. C. (2009). Teorías del aprendizaje y la instrucción en el diseño de materiales didácticos informáticos. *Educere*, *13*(45), 317-329.

Gómez, P., & Lupiáñez, J. L. (2005). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *V Congresso Ibero-Americano de Educaçao Matemática*, *1*, GD 08.

González, R. (2005). Un modelo explicativo del interés hacia las matemáticas de las y los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, *17*(001), 107–128. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40517105

LIMA, G. L. DE, & BIANCHINI, B. L. (2022). Reflexões Sobre O Ensino E a Aprendizagem De Álgebra a Partir Das Produções Do Gt04 Da Sbem. *Educação em Revista*, *38*. https://doi.org/10.1590/0102-469824723

Martínez, L. H., Rincon, E. G. F., & Domínguez, Á. (2014). *El Juego Y El Aprendizaje Cooperativo En La Enseñanza De Las Ecuaciones De Primer Grado*. *February 2015*, 397–405. https://n9.cl/xfe4v

Mateos Mateos, R. (2009). Dificultades de Aprendizaje. *Psicología educativa*, *15*(1), 13–19. https://www.cesip.org.pe/sites/default/files/27dificultades_de_aprendizaje.pdf

Reyes, M. M., Martín, A. S., Manuel, J., & Soto, S. (2018). *La importancia de la variación en el concepto de función : un caso de exploración mediante el uso de tecnología*. *10*, 63–70.

Riveros, V., Mendoza, M. I., & Castro, R. (2011). Las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de instrucción de la matemática Information and communication technologies in the process of teaching Mathematics. *Quorum académico*, *8*(15), 111–130. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=

199018964007

Sebastián, R., & Figols, S. (2013). La enseñanza de las matemáticas y la tecnología. *Innovación Educativa, ISSN-e 1665-2673, Vol. 13, Nº 62, 2013, págs. 61-74*, *13*(62), 61–74. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4707717&info=resumen&idioma=ENG%0Ahttps://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4707717&info=resumen&idioma=SPA%0Ahttps://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4707717

Ximhai, R. A. (2016). *El hombre libre no debe aprender ninguna disciplina a la manera del esclavo; pues los trabajos corporales que se practican bajo coerción es posible que no produzcan daño al cuerpo, en tanto que en el alma no permanece nada que se aprenda coercitivamente . Platón*. *12*(3), 143–161.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between aegebraic thinking and aegebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(3), 361–378. https://doi.org/10.1023/A:1020291317178