

DOI: <https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2025.1695>

LAGUNAS EXPRESIVAS EN LA DEMOSTRACIÓN EUCLIDIANA

JOSÉ SEOANE
Universidad de la República
IF–FHCE
Uruguay
seoanejose2010@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-9571-3139>

RESUMEN: Algunas demostraciones que Euclides presenta en sus *Elementos* pueden denominarse *polimodales* (Seoane 2022). Esta caracterización se basa en un rasgo *expresivo*: tales demostraciones combinan dos formatos comunicacionales, un formato *detallado* y otro *sumario*. Don Fallis llama la atención sobre distintas clases de “lagunas” en la demostración matemática; una de esas clases la conforman las “*lagunas entimemáticas*” (Fallis 2003). Su definición parece apuntar al mismo fenómeno que capta (en el caso particular) la idea de *formato sumario* de la demostración polimodal euclidiana. Sin embargo, diferencias metodológicas con Fallis me llevan a proponer, para captar este caso, una noción alternativa, a la que denomino “*laguna expresiva sumaria (sin costo estructural)*”.

PALABRAS CLAVE: demostración informal, estilos matemáticos, expresión, estructura, filosofía de la práctica matemática

SUMMARY: Some proofs presented by Euclid in his *Elements* can be called *polymodal* (Seoane 2022). This characterization is based on an *expressive* feature: such proofs combine two communication formats, a *detailed* format and a *summary* format. Don Fallis draws attention to different classes of “gaps” in mathematical proof; one of them consists of “enthymematic gaps” (Fallis 2003). Its definition seems to point to the same phenomenon captured (in the case in question) by the idea of a *summary format* of the Euclidean polymodal proof. However, basic methodological differences with Fallis lead me to propose, in order to capture this case, an alternative notion, which I call “*summary expressive gap (without structural cost)*”.

KEYWORDS: informal demonstration, mathematical styles, expression, structure, philosophy of mathematical practice

La demostración tradicional (por reducción al absurdo) de la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2 seguramente ha sido comunicada innumerables veces en los más diversos idiomas. En un sentido obvio, la oración anterior resulta perfectamente inteligible para una lectora o un lector estándar del español. No parece existir en dicha oración ningún problema de significado. ¿Por qué debería merecer la desaprobación filosófica? Resultan ser aceptablemente diferenciables lo comunicado (por llamarlo de alguna forma: el *contenido*) de su

comunicación (esto es: la *expresión* de aquel contenido en un idioma particular). Diversos autores (más allá de las diferencias nominales y conceptuales) han distinguido estas dos dimensiones. Por ejemplo, Weaver resalta: “La novedad del presente enfoque consiste en *distinguir entre el razonamiento y su expresión*, y centrarse en lo que implica seguir la expresión del razonamiento” (1988, p. 31; las cursivas son mías). Así mismo, Oswaldo Chateaubriand escribe: “O se dice que las secuencias lingüísticas utilizadas en la comunicación de las demostraciones *son* las demostraciones, o se dice que *describen* demostraciones, o *indican* demostraciones, o *comunican* demostraciones” (2005, p. 284; las cursivas son mías). Por su parte, Marcus Giaquinto enfoca así directamente esta cuestión: “Debemos distinguir entre una *demostración* y una *presentación* de una demostración.” (2008, p. 24; las cursivas son mías).¹

Para uniformar las denominaciones, llamaré *estructura* al contenido y *expresión* a la comunicación de aquel contenido (en este contexto). La “expresión” corresponde al artefacto comunicacional (lingüístico o lingüístico-visual); la “estructura” consiste en la ilación inferencial referida (en forma más o menos explícita) por la comunicación. O, si se prefiere, la “estructura” consiste en la trama argumental relevante transmitida. Esta posee los niveles de abstracción y precisión propios de la comprensión comunitaria de la prueba y no supone, luego, ningún plus analítico formalizador.

El uso de esa socorrida distinción permite, así mismo, clarificar diversas situaciones. Un ejemplo estelar: la aceptación de demostraciones que comprenden una infinitud de pasos. Una demostración matemática puede poseer estructura *infinita*, aunque obviamente su comunicación (como no podría ser de otra manera) sea *finita* (Chateaubriand 2005, cap. 19). Para decirlo con palabras de este filósofo: la descripción o comunicación de una prueba (por razones de inteligibilidad) “debe ser menos que finita” (p. 283).

Usando luego esta distinción, he caracterizado ciertas demostraciones que Euclides despliega en sus *Elementos* como *polimodales* (Seoane 2022). Dicha caracterización apunta a un rasgo *expresivo*: combinan dos formatos comunicacionales notoriamente diversos. Un formato minucioso, detallado, y un formato sumario, esbozado, esquemático. El primero es el básico, el segundo el derivado. De modo que hay demostraciones que se comunican exclusivamente en el primer formato y hay demostraciones que apelan a ambos; a estas últimas podemos llamarlas “polimodales”, por combinar las dos moda-

¹ En general, la traducción de los textos originalmente en inglés es mía.

lidades o formatos expresivos referidos. No hay demostraciones que usen, exclusivamente, el formato sumario como primitivo absoluto —pues este es, como ya se dijo, derivado—.

En los *Elementos*, la ruptura del ritmo expositivo minucioso (cuando ocurre) suele ser perfectamente identificable, porque el geómetra la consigna de modo literal. Así, por ejemplo, luego de haber expuesto en detalle la demostración de algún componente de una conjunción, agrega que “de manera semejante” se puede proceder a demostrar el componente restante.² El estilo polimodal, reitero, se caracteriza en términos expresivos. Sin embargo, no está exento de calado estructural. En particular, merece estudiarse con cuidado la interacción contextual entre ambas dimensiones (expresiva y estructural) en el caso del formato sumario.³

Hace ya algunos años, en una contribución plenamente vigente, Don Fallis llamó la atención sobre distintos tipos de “lagunas” o “hiatos” o “brechas” (“gaps”) en la demostración matemática.⁴ Parecería que los ejemplos o instancias del formato sumario antes referido debieran entenderse, en principio, como casos particulares de uno de esos tipos, a saber, las *lagunas entimemáticas* (*enthymematic gaps*). La definición ofrecida por el autor alienta claramente tal posibilidad. Sin embargo, el estudio cuidadoso de las, por llamarlas así, *lagunas euclidianas* (aquellas lagunas que emergen por apelar al formato sumario en Euclides) parece desaconsejar tal alternativa. La razón es que, para captar su dinámica (como se expresó antes), resulta clave asumir una concepción *bidimensional* de la demostración matemática —ajena a la propuesta de Fallis—. Así, podría decirse que aquí ofrezco una crítica a la capacidad explicativa o comprensiva de tal catálogo: dicha clasificación no captaría productivamente (desde el punto de vista intelectual) las lagunas euclidianas. No se trata de

² El formato sumario, en un caso de explicitación más bien módica, podría ocurrir así: “de manera semejante se demuestra tal y cual”. Pero esta ocurrencia no es equivalente a la ausencia total de orientación, pues el formato minucioso hace allí su trabajo de guía —a veces, si falta esa formulación expresa, convocado por el contexto—. Y ¿si la demostración no exhibiera un estilo polimodal? En ausencia de un contexto compartido por emisor y receptor, que cumpla aquella función orientadora, y si se produjera el déficit expresivo, estaríamos ante un fenómeno claramente diferente.

³ Véase especialmente Seoane 2025.

⁴ Aunque su objetivo no se reduce al diseño de una “taxonomía” de las lagunas que ocurren en la demostración matemática, este aspecto posee valor por sí mismo (véase Fallis 2003, fundamentalmente las pp. 51–59). Traduciré “gap” preferentemente como “laguna”, aunque, por razones estilísticas, ocasionalmente recurriré a vocablos como “brecha” o “hiato”.

una crítica extensional directa. No se objeta la capacidad abarcadora sin más de aquella catalogación; el déficit reside en que, si se busca someter las lagunas euclidianas a la clasificación, el costo es altísimo: invisibilizar su funcionamiento bidimensional. Introduciré entonces el concepto de *laguna expresiva sumaria (sin déficit estructural)*, apoyado, precisamente, en dicha concepción bidimensional que, además, implica una sensibilidad contextual decisiva, con el objetivo de captar adecuadamente aquellas brechas singulares.

¿Todo hiato que tradicionalmente se identifica en la demostración matemática es una laguna expresiva? O, planteado de otra forma, ¿todo tipo o clase o categoría de tales brechas puede tratarse, de manera provechosa, como una subcategoría de laguna expresiva? No pretendo resolver aquí esta cuestión. Lo que sí pretendo es defender la existencia de una subcategoría tal que aloja (de forma intelectualmente productiva) las lagunas euclidianas —y, en realidad, una clase bastante más amplia—. Luego, este enfoque logra resolver una dificultad que enfrenta la taxonomía de Fallis, no desde un punto de vista extensional estricto, sino en cuanto herramienta útil desde el punto de vista de la comprensión. La cuestión que permanece abierta es si este tratamiento (por decirlo así: *expresivo bidimensional*) de un caso particular de laguna matemática es susceptible de generalización.

La ruta que emprenderé es la siguiente. En las secciones 1 y 2 adoptaré una estrategia expositiva paralela: se expondrán, en cada caso, sendos ejemplos extraídos de los *Elementos* de Euclides y se estudiará su naturaleza polimodal. En estos ejemplos se resaltaré la comprensión de la ocurrencia del *formato sumario (qua laguna)* como fenómeno expresivo, pero, a la vez, su carácter estructuralmente tenso.⁵ En la sección 3 se introducirá la taxonomía propuesta por Fallis, reconociendo su valía, pero resaltando sus limitaciones para dar cuenta del caso particular euclidiano. Abrevando en la discusión previa, la sección 4 propone el concepto de *laguna expresiva* (basado en la concepción bidimensional de la demostración) y describe cómo una subclase de tales lagunas puede acoger las lagunas euclidianas, generalizando sus rasgos —la llamaré “laguna expresiva sumaria” o, de manera más explícita, “laguna expresiva sumaria (sin costo estructural)”—. La última sección reconoce la modestia de este trabajo como contribución a aquella agenda guiada por la preocupación

⁵ La idea de demostración polimodal en Euclides, como se dijo antes, se introduce en Seoane 2022. Una discusión de los formatos minucioso y esbozado, así como de los ejemplos que aparecen en las secciones 1 y 2 se encuentra en dicho trabajo. En particular, un examen detallado del formato sumario se puede leer en Seoane 2025. Las secciones mencionadas usan libremente los dos artículos referidos.

verificacionista, y plantea el interés filosófico de una *agenda de la expresión matemática*, entendida como complementaria de la agenda de la verificación.

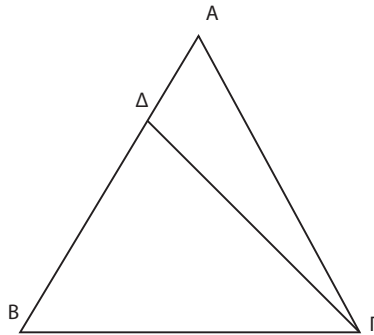
1

Revisemos la demostración del enunciado de I.6:⁶

ENUNCIADO DE I.6

Si dos ángulos de un triángulo son iguales entre sí, también los lados que subtienden a los ángulos iguales serán iguales entre sí.

DIAGRAMA

DEMOSTRACIÓN⁷

Sea el triángulo ABΓ que tiene el ángulo ABΓ igual al ángulo AΓB.

Digo que también el lado AB es igual al lado AΓ. Pues si AB no es igual a AΓ, uno de ellos es mayor. Sea AB el (lado) mayor. Y del (lado) mayor AB quítese la (recta) ΔB igual al (lado) menor AΓ, y trácese ΔΓ.

Ahora bien, como ΔB es igual a AΓ y BΓ es común, también los dos lados ΔB, BΓ son iguales a los dos lados AΓ, ΓB, respectivamente, y el ángulo ΔBΓ es igual al ángulo AΓB; por tanto, la base ΔΓ es igual a la base AB, y el triángulo ΔBΓ será igual al triángulo AΓB, el menor al mayor; lo cual es absurdo; entonces los lados AB y AΓ no son desiguales; luego son iguales.

⁶ Seguiré la traducción de los *Elementos* de Puertas Castaños, y consultaré también la edición clásica de Heath (ambas obras se incluyen en la bibliografía, al final).

⁷ Las cursivas son mías.

Por consiguiente, si dos ángulos de un triángulo son iguales entre sí, también los lados que subtienden a los ángulos iguales serán iguales entre sí. Q. E. D.

Hay literalmente una omisión expresiva en esta demostración. Esta, para dar cabal cumplimiento a las exigencias estructurales, debería implementar el análisis de casos correspondiente. Dicho en forma burda: a partir de que AB es mayor o menor que AG deberíamos derivar el absurdo; luego, por un lado, podríamos suponer que AB es el mayor y extraer el absurdo y, por otro, que AG es el mayor y extraer el absurdo. Sin embargo, solo se cuenta con una demostración de lo primero, y no se dice nada (a texto expreso, explícitamente) de lo segundo. ¿Es esta una laguna? Parece difícil no interpretarlo así, en el sentido de que, explícitamente, aquel trecho de la demostración se omite expresivamente; no se describe. Ahora bien, es cierto que Euclides no comunica de modo *explícito* el tramo estructural en cuestión, pero forma parte de un *implícito* obvio. Su interlocutor matemáticamente culto entiende que aquella ausencia es, por decirlo así, puramente estilística, expresiva, sin relevancia estructural, pues la parte faltante se encuentra disponible en la medida en que es una réplica trivial de la propuesta para el primer caso.

Aquí tendríamos, si se quiere, un hiato o laguna peculiar (en un sentido comunicacional), pero no propiamente un déficit estructural. Es importante resaltar este aspecto: nadie, luego de leer a Euclides, concluiría que el geómetra ha cometido un descuido y mucho menos que ha caído en un error lógico. ¿Qué está ocurriendo? Por una parte, es evidente que hay un tramo estructuralmente imprescindible, y la expresión de la prueba no hace referencia a él; es decir, no se indica o describe minuciosamente en la comunicación lingüística-visual de la demostración.⁸ Pero, por otra, la trama expresiva faltante puede ser reconstruida fácilmente a partir del texto (y el diagrama) existente. Luego, es fácil “subsanan” el hiato describiendo completa la prueba. Aquí, la distinción expresión-estructura muestra su poder. Si cuando se produce este fenómeno se declara simplemente que hay (o que no hay) lagunas en la prueba, me inclino a pensar que se está adoptando una posición algo rudimentaria, es decir, menos rica; en tales casos, ¿no resulta más exacto reconocer que hay una laguna en

⁸ “Prueba” y “demostración”, cuando su significado sea unívoco en el contexto, podrán entenderse como si refirieran a su acepción general corriente (que comprende tanto la dimensión estructural como la expresiva). En otros casos, se aclarará explícitamente la acepción correspondiente.

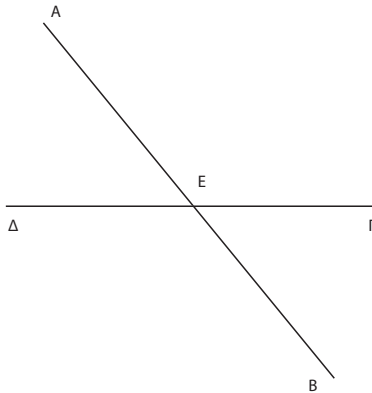
el plano expresivo (en este caso particular, la naturaleza intencional de tal omisión está indicada por recursos comunicativos más bien indirectos), pero no hay déficit estructural?⁹ Esto es, aunque existe un vacío o laguna, la comunicación de la demostración (si bien no de manera explícita) logra indicar la ilación estructural pertinente; este es un caso *límite* del estilo polimodal, si se considera la casi total ausencia de indicación textual explícita de ruptura del formato minucioso. Otro ejemplo de esta modalidad límite lo constituye la demostración de I.26.

Veamos ahora un ejemplo de polimodalidad hasta cierto punto más claro —por decirlo así: un representante del caso *estándar*—.

ENUNCIADO DE I.15

Si dos rectas se cortan, hacen los ángulos del vértice iguales entre sí.

DIAGRAMA



DEMOSTRACIÓN

Así pues, córtense las dos rectas AB , $\Gamma\Delta$ en el punto E . Digo que el ángulo $AE\Gamma$ es igual al (ángulo) ΔEB y el (ángulo) ΓEB al (ángulo) $AE\Delta$.

[B_minucioso] Pues, dado que la recta AE ha sido levantada sobre la recta $\Gamma\Delta$ formando los ángulos ΓEA , $AE\Delta$, entonces los ángulos ΓEA , $AE\Delta$ son iguales a dos rectos [I, 13]. Dado que la recta ΔE ha sido levantada a su vez sobre la recta AB formando los ángulos $AE\Delta$,

⁹ La expresión “Sea...”, precediendo a la afirmación que AB es mayor que $A\Gamma$, llama directamente la atención sobre el estatus de la afirmación que la sucede e, indirectamente, sobre la estrategia de la prueba.

$\triangle EB$, entonces los ángulos $AE\Delta$, $\triangle EB$ son iguales a dos rectos. Pero se ha demostrado que los (ángulos) ΓEA , $AE\Delta$ son iguales a dos rectos; luego los (ángulos) ΓEA , $AE\Delta$ son iguales a los (ángulos) $AE\Delta$, $\triangle EB$ [Post. 4 y N. C. 1]. Quítese de ambos $AE\Delta$; entonces, el (ángulo) restante ΓEA es igual al (ángulo) restante $BE\Delta$ [N. C. 3]; [**B_sumario**] de manera semejante demostraríamos que también los (ángulos) ΓEB , $\triangle EA$ son iguales.

Por consiguiente, si dos rectas se cortan, hacen los ángulos del vértice iguales entre sí. Q. E. D.

Aquí ya no se trata de la inexistencia de una indicación clara a la ilación inferencial en cuestión, sino del *tipo* o *formato* de esa comunicación. Mientras que en el tramo inicial de la prueba tal comunicación es detallada, minuciosa, circunstanciada (el pasaje que comienza en **B_minucioso**), en esta “segunda parte” no se explicita con un nivel de detalle equivalente (el pasaje que comienza en **B_sumario**). Podríamos decir que, en este último caso, la expresión no indica *literalmente* el correspondiente tramo estructural, sino que más bien *alude* a un tramo análogo al descrito en detalle antes. La introducción del formato sumario supone así una especie de “salto” del nivel expresivo: ahora la comunicación no refiere, exclusivamente, al razonamiento sobre los objetos matemáticos en cuestión, sino que evoca (de forma explícita) el razonamiento previo en calidad de paradigma.

Como se expuso antes, la diferencia estilística es clara: al primer formato lo llamo *minucioso*, mientras que al segundo lo denomino *esbozado* o *sumario*, y cuando la expresión de una demostración combina ambos formatos (**B_minucioso**|**B_sumario**) la llamo *polimodal*. Tanto en el ejemplo anterior como en este estamos frente a una presentación o comunicación de la estructura demostrativa que no emplea exclusivamente el formato minucioso (y que, de un modo algo diferente, apela a una alusión sumaria o esbozada); por esta razón, considero que ambos ilustran el *estilo polimodal euclidiano*.¹⁰ Existe aún otro tipo de demostración polimodal que, por razones que se evidenciarán luego, resulta importante registrar.

2

Netz llama la atención sobre un conjunto de demostraciones que comparten cierta estrategia argumental (podría decirse: de naturaleza

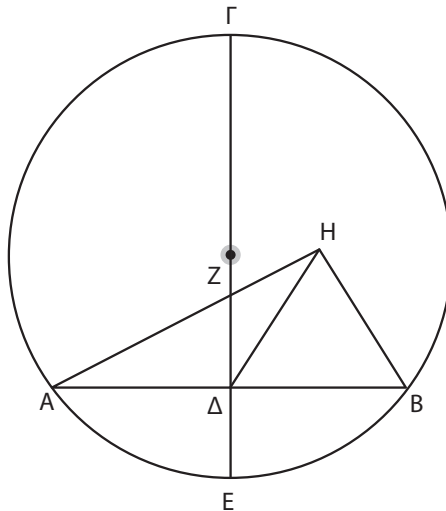
¹⁰ Una discusión más detallada de la conveniencia de agrupar ambos casos bajo la etiqueta común del estilo polimodal puede leerse en Seoane 2025.

infinita), y las identifica en los *Elementos*.¹¹ La razón de este filósofo para aislar tal conjunto de demostraciones difiere de las convicciones que guían la reflexión presente; la motivación aquí radica en lo que estas enseñan sobre la interacción expresión/estructura contextualizada. Estudiemos ahora un ejemplo de esa clase: la demostración de III.1

ENUNCIADO DE III.1

Hallar el centro de un círculo dado.

DIAGRAMA



DEMOSTRACIÓN

Sea el círculo dado ABΓ.

Hay que hallar el centro del círculo ABΓ.

Trácese en él al azar una recta AB, y divídase en dos por el punto Δ, y a partir de Δ trácese ΔΓ perpendicular a AB y prolongúese hasta E, y divídase en dos partes iguales ΓE en Z.

Digo que Z es el centro del [círculo] ABΓ.

[B_minucioso] Pues supongamos que no, entonces si es posible sea H (el centro), y trácense HA, HΔ, HB. Ahora bien, como AΔ es igual a ΔB y ΔH es común, los dos (lados) AΔ, ΔH son iguales respectivamente a los dos (lados) HΔ y ΔB, y la base HA es igual a la

¹¹ Véase Netz 1999, cap. 6.

base HB , pues son radios; por tanto, el ángulo $A\Delta H$ es igual al ángulo $H\Delta B$ [I, 8]; pero cuando una recta levantada sobre otra recta hace los dos ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto [I, Def. 10]; por tanto, el ángulo $H\Delta B$ es recto. Pero también es recto el ángulo $Z\Delta B$; por tanto, el ángulo $Z\Delta B$ es igual al ángulo $H\Delta B$, el mayor al menor; lo cual es imposible. Luego H no es el centro del círculo $AB\Gamma$. [**B_sumario**] De la misma manera demostraríamos que ningún otro (lo es) excepto Z .

Por consiguiente, el punto Z es el centro del (círculo) $AB\Gamma$.

Desde el punto de vista puramente estilístico, la orquestación expresiva es similar al ejemplo anterior. Podríamos decir que se repiten aquellos aspectos estrictamente comunicacionales que hacen que difieran los formatos expresivos (detallado, sumario). Pero aquí aparece un contraste relevante para nuestra discusión. En los casos del tipo discutido en la sección 2, las lagunas son eliminables. ¿Por qué? Porque es posible “sustituir” o “reemplazar” la descripción esbozada por una descripción minuciosa —indicando ambas (aunque con modalidades diferentes y calidades expresivas distintas) la misma trama estructural—. Luego, puede ofrecerse fácilmente una expresión libre de lagunas para comunicar la trama estructural correspondiente. Por el contrario, en el caso de III.1 y análogos, las lagunas no son eliminables (al menos no con los recursos euclidianos). Es decir, no podemos sustituir el pasaje expresivo esbozado por un equivalente minucioso. Dado que la estructura de la demostración es infinita, es obvio que la totalidad de los pasos o eslabones deductivos no pueden explicitarse uno por uno. Incluso podría pensarse que estas pruebas nos colocan frente a un dilema: o bien no se las acepta propiamente como tales (evidencian un déficit estructural y su superación supondría ofrecer una estrategia lógica alternativa a la usada por Euclides), o bien se las admite (abandonando la identificación de prueba y comunicación de la prueba) como si constaran de una estructura infinita y una expresión obviamente finita. En esta última opción, que es la sustentada aquí, la laguna en la expresión no solo es manifiestamente intencional (como lo es en los casos de la sección 2), sino que no podría eliminarse (con los recursos disponibles). Además, no hay ninguna presión estructural ni expresiva notoria a favor de su remoción (en tal contexto).

En general, el surgimiento del estilo polimodal euclidiano y, en particular, del formato sumario posee, desde mi punto de vista, un interés conceptual notorio. Por eso resulta útil registrar debidamente

algunos de los rasgos sobresalientes de dicha modalidad comunicacional, a saber: 1) el formato sumario es un formato expresivo *ancilar* o *derivado* de un formato minucioso previo, 2) esta dependencia supone la fijación del formato minucioso como *patrón* o *modelo* del formato sumario, 3) tal carácter modélico no se limita a una *similitud* superficialmente comunicativa sino *estructural*, 4) la/el agente emisor asume que dicho estatus modélico y su uso potencial como tal es *fácilmente accesible* para el auditorio en virtud de sus capacidades, y 5) las *motivaciones* de tal política expresiva no solo contemplan aquellas cualidades de la audiencia, sino la naturaleza de la *trama estructural* comunicada así como los *valores* del propio emisor. Este último aspecto explicita un rasgo inherente al enfoque bidimensional: su sensibilidad contextual.

Ahora bien, cuando interviene el formato sumario, ¿puede hablarse consistentemente (como se ha hecho antes) de la aparición de una laguna? Si por esta última expresión se entiende el abandono del formato comunicacional primitivo, minucioso, entonces parecería esta una forma general de referir al fenómeno. Dicho de otro modo, una comunicación deductiva en formato sumario *à la* Euclides parece suponer un hiato o laguna en el plano expresivo (en cuanto omite aspectos o detalles que la descripción minuciosa brindaría acerca de la ilación deductiva). La comunicación en el formato sumario es entonces un caso *particular* de un fenómeno *general*, a saber: la emergencia de lagunas o hiatos o vacíos en la demostración matemática. Una demostración en estilo polimodal es así una demostración con lagunas. En tal espíritu, podríamos preguntarnos si existe en la literatura una aproximación o caracterización general de “gap” y, en especial, una subclase o tipo particular que recoja adecuadamente la comunicación sumaria euclidiana o, más brevemente, la laguna euclidiana.

3

Fallis, en un artículo iluminador, se propone rebatir la idea de que los matemáticos se comportan de acuerdo con el ideal cartesiano de obtención o justificación del conocimiento matemático, esto es, vía la revisión de la “cadena continua e ininterrumpida” de los pasos inferenciales correspondientes. Según este autor, el ideal de demostración libre de “gaps” como *única* forma de obtención del conocimiento matemático no se condice con la práctica de la disciplina —en tal sentido, el ejemplo más “famoso” lo constituiría la aceptación, por parte de la comunidad matemática, del teorema de los

cuatro colores (Fallis 2003, p. 47)—. Pero existen casos aún más espectaculares: hay demostraciones aceptadas que nadie —ni siquiera una computadora— ha recorrido en detalle (Fallis 2003, p. 47). En la construcción del andamiaje argumental que sustenta aquella tesis, el filósofo propone una suerte de “taxonomía” general de los “gaps”. Resulta entonces muy razonable esperar que tal esfuerzo clasificador provea un tipo o clase particular de laguna que incluya (en un modo conceptualmente informativo, esto es, que capte su especificidad) las comunicaciones sumarias euclidianas. Pero, desde mi punto de vista, esto no sucede. A continuación, expondré sucintamente la clasificación de Fallis e identificaré las dificultades que aquella catalogación enfrenta para capturar los rasgos propios de la laguna euclidiana.

Antes de adentrarnos en la clasificación de Fallis, detengámonos brevemente en cómo entiende la demostración, tal cual esta ocurre en la práctica. Una prueba es, según este autor, “una secuencia de proposiciones donde cada proposición se sigue de las proposiciones previas en la secuencia mediante una inferencia que preserva la verdad” (Fallis 2003, p. 48). Desde tal perspectiva, “conocer una prueba” implica recorrer la totalidad de la secuencia y verificar cada paso. Es este el ideal cartesiano al que suscintamente se aludió antes.¹² Pero, según Fallis:

Desafortunadamente, esta explicación de lo que tiene que hacer un matemático para conocer una prueba no siempre se puede usar para *explicar* cómo un matemático justifica su creencia en la verdad de una proposición matemática. Porque, como sostengo más adelante, los matemáticos no siempre verifican, directamente, que cada proposición en una secuencia de proposiciones se sigue de las proposiciones anteriores en la secuencia, mediante una inferencia matemática básica (como prescribe la historia cartesiana). De hecho, *los matemáticos suelen dejar tales lagunas en sus pruebas (y a veces consideran aceptable hacerlo así)*. (Fallis 2003, p. 50; las cursivas son mías.)

¹² Como se recuerda, Descartes escribe en la célebre Regla III: “muchas cosas se conocen con certeza, aunque ellas mismas no sean evidentes, tan solo con que sean deducidas a partir de principios verdaderos y conocidos, mediante un *movimiento continuo e ininterrumpido del pensamiento* que intuye con transparencia cada cosa en particular: no de otro modo sabemos que el último eslabón de una larga cadena está enlazado con el primero, aunque no contemplemos con uno solo y el mismo golpe de vista todos los intermedios, de los que depende aquella concatenación, con tal de que los hayamos recorrido con los ojos sucesivamente y recordemos que están unidos desde el primero hasta el último cada uno a su inmediato” (Descartes 1996, pp. 76–77; las cursivas son mías). He consultado también la edición bilingüe de Heffernan y su traducción (Descartes 1998, pp. 81–83).

Esquemáticamente, Fallis divide las lagunas que pueden emerger en una demostración en tres clases: inferenciales (*inferential gaps*), entimemáticas (*enthymematic gaps*) y no franqueadas (*untraversed gaps*). Las *lagunas inferenciales* se caracterizan por surgir cuando:

el matemático *no puede completar* algunos de los detalles de la supuesta demostración. Este es el tipo de laguna más obvia que ocurre en las demostraciones matemáticas, y es lo que llamaré una *laguna inferencial*. Un matemático ha dejado una laguna inferencial siempre que la secuencia particular de proposiciones que *tiene en mente* (como prueba) *no es una prueba*. En otras palabras, la proposición matemática que el matemático estaba tratando de demostrar no se sigue de *inferencias matemáticas básicas* en la forma en que el matemático tenía en mente. (Fallis 2003, p. 51; las cursivas son mías.)

El punto sería entonces que la prueba no es tal; el hiato se debe a que algún “paso” en la secuencia deductiva no es legítimo —no se sigue de acuerdo con las “inferencias matemáticas básicas en la forma en que el matemático tenía en mente”—. Esto puede ocurrir o bien porque la ruta inferencial *particular* propuesta es intransitable, aunque existen otras rutas posibles, o bien porque tal alternativa no existe, es decir, *no hay secuencia alguna*, ya que el resultado no se sigue. Discutiendo un caso particular que ejemplifica esta última categoría, escribe el filósofo: “Está claro que la secuencia particular de las proposiciones que Kershner *tenía en mente* no era una prueba. No sólo la secuencia de proposiciones que Kershner *tenía en mente* no era una prueba, sino que la proposición matemática que estaba tratando de demostrar *ni siquiera era demostrable*” (Fallis 2003, p. 53; las cursivas son mías). Así entendida, la laguna parece situarse en el plano mental, es decir, la/el matemática/o tendría “en mente” una “secuencia de proposiciones” que, desde el punto de vista lógico, es insatisfactoria.

Aunque a primera vista se podría pensar que esta categoría capta la dimensión estructural, la situación es otra. En primer término, el concepto de laguna inferencial no implica hiato expresivo. Se produce así una suerte de *autonomización* o *independencia* del plano expresivo, incompatible con la caracterización estructural que permite caracterizar la laguna euclidiana. Esta es ya una limitación decisiva, si se pretende hacer justicia a la dinámica del hiato que me interesa aquí. Nótese que tal característica no compromete, exclusivamente, la viabilidad de esta categoría particular como candidata a capturar aquella laguna, sino que augura, en general, las limitaciones de la

clasificación para lograrlo. ¿Por qué? Porque el corazón de aquellas brechas reside, precisamente, en cierta forma particular de *articulación* del plano expresivo con el estructural —y, al parecer, uno de los planos falta a la cita—. Pero, además, hay otro argumento. La laguna inferencial ocurre porque “la secuencia particular de proposiciones que el matemático *tiene en mente* (como prueba) *no es una prueba*”, es decir, porque lo que trataba de probar “no se sigue de *inferencias matemáticas básicas* tal como el matemático tenía en mente”. Si interpreto bien, la secuencia que la/el matemática/o tiene en mente está conformada por “inferencias matemáticas básicas” que, en este caso, no implican lo que se pretende. Puede apreciarse aquí la enorme distancia que media entre esta idea de una secuencia deductiva compuesta por “pasos” o “eslabones” básicos, y la trama a la que denomino “estructura”, componente sustantivo del tratamiento de la laguna euclidiana. Finalmente, un argumento más primario. Desde el punto de vista de Fallis, en una demostración, puede ocurrir una laguna inferencial (más o menos grave) sin déficit expresivo. Pero, ¿hay en este caso propiamente una laguna? Si se responde afirmativamente (como lo hace Fallis), los predicados “demostración con errores” y “demostración con lagunas inferenciales” tienden a tornarse extensionalmente idénticos, con lo cual se pierde la especificidad del tipo de fracaso o error que, en principio, se busca captar. Aunque el argumento posee mayor alcance, usaremos este y los anteriores, simplemente, para mostrar que no se puede explotar esta categoría para clasificar satisfactoriamente (en términos comprensivos) la laguna euclidiana. Prosigamos.

Fallis caracteriza las lagunas entimemáticas así:

Cuando un orador o un autor presenta un argumento ante una audiencia a menudo *omite uno o más pasos de su proceso de razonamiento* [...]. Cuando un hablante o un autor omite pasos, la secuencia de proposiciones que presenta *explícitamente* se conoce como *entimema*. [...] Como cualquier persona que presenta un argumento ante una audiencia, los matemáticos utilizan entimemas. Por ejemplo, un matemático, cuando publica una prueba en una revista o presenta una prueba en una conferencia, generalmente *omite muchos pasos en su proceso de razonamiento*. De hecho, según W.S. Anglin, “gracias a la necesidad de ‘ahorrar espacio’, esto probablemente ocurre en la mayoría de los artículos publicados” (Anglin 1991, p. 146) [...] Sin embargo, como el entimema que el matemático escribe *no es una prueba completa*, está dejando lo que llamaré una *laguna entimemática*. (Fallis 2003, pp. 53–54; las cursivas son mías.)

Las lagunas entimemáticas parecerían concentrarse, en mi terminología, en la expresión de la demostración: “explicitud” y “entimema” nos hablan acerca de cómo *comunicamos* la prueba. Podría decirse, *cum grano salis*, que estos términos permiten parafrasear el contraste entre el formato minucioso y el formato sumario. Pero, ¿hay una “omisión” en el “proceso de razonamiento”? ¿Está “incompleta” la prueba *qua* ilación estructural? Si, efectivamente, se puede concluir, a partir de la presencia de hiatos en la expresión, la existencia de hiatos estructurales, entonces estamos concibiendo la demostración más bien en clave unidimensional, identificando expresión y estructura. No es el caso de Fallis, pues está dispuesto a distinguir entre “escribir” y “razonar”; además, este autor señala explícitamente la falsedad de aquella implicación. Pero deberá concederse que el pasaje de la cita anterior no resulta del todo claro. Podría concordar con Fallis en que, hablando rápidamente, la/el matemática/o *literalmente* “no escribe una prueba completa” (en mi terminología: plano expresivo), pero no puedo seguirlo en que ello signifique que “omite pasos en su proceso de razonamiento” (en mi terminología: el plano estructural).¹³ Aquel “vacío” expresivo que “deja” es precisamente caracterizado por el filósofo como “laguna entimemática” —fenómeno que advierte, acertadamente, es frecuente en los casos en que “un orador o un autor presenta un argumento a una audiencia”—. Y agrega:

Un matemático ha dejado una *laguna entimemática* siempre que no establece *explícitamente* la secuencia particular de proposiciones que tiene en mente (como si fuera una prueba). Por ejemplo, un matemático ha dejado una laguna entimemática cuando, como dice Dieudonné, “*prescinde de una prueba escrita, reemplazándola con la siempre recurrente frase ‘Es fácil ver que . . .’*” (Fallis 2003, p. 54; las cursivas son mías.)

Esta descripción parece ajustarse mejor a la categoría general que se procura aquí, pues, a diferencia de la cita anterior, en esta ocasión parece implicar que (en el caso de las lagunas entimemáticas) no hay omisiones *en el razonar*, sino *en el comunicar* el raciocinio. Y Fallis atiende ahora *directamente* al plano expresivo: se trataría de una suerte de omisión (por insuficiencias en la comunicación) de lo que la/el matemática/o “tiene en mente”.¹⁴ La laguna o hiato surgiría así por una suerte de déficit de explicitud. Cuando leemos en el texto

¹³ Desde mi perspectiva, el material del plano estructural no es psicológico, pero esta diferencia no es esencial para el argumento.

¹⁴ Aunque aparece la mención al auditorio, la concepción de Fallis del rasgo entimemático se concentra más bien en la omisión o ausencia de elementos (en la secuencia “escrita”) que ocurren en la secuencia “mental”. Lassalle Casanave subraya

matemático: “es fácil ver que . . .” o “de manera semejante, . . .” u otras expresiones relativamente análogas, no necesariamente hay, por decirlo así, hiato estructural: hay una forma peculiar de referirse a una ruta inferencial que la/el matemática/o (si se quiere usar la expresión de Fallis) “tiene en mente”. Esta ruta puede ser lógicamente satisfactoria o no; puede incluso ser lógicamente imposible. Para decirlo rápido: lo que sabemos es que hay (en un sentido preciso) una laguna en la expresión. Nótese que, entiéndase como se entiendan algunos de los giros lingüísticos identificados en la práctica matemática como indicadores del hiato referido, *no* son “pasos” o “eslabones” de una secuencia de inferencias básicas, sino que serían (en todo caso) una indicación resumida de tal secuencia. Es decir: la especificidad del fenómeno euclidiano a captar incluye, de modo decisivo, la *articulación* entre ambos planos. No alcanza la dimensión expresiva en solitario. Pero, además de la ausencia de la dimensión propiamente estructural, existe una identificación —por momentos difusa— del plano expresivo, y una notoria dificultad en aprehender la interacción bidimensional.

Por supuesto, no estoy afirmando que Fallis confunda ambas dimensiones. Él es absolutamente claro al resaltar que pueden ocurrir conjuntamente lagunas entimemáticas e inferenciales (como en el caso de Kershner ya referido), así como lagunas entimemáticas (como en el caso del segundo teorema de incompletitud de la aritmética de Gödel) que *no* son lagunas inferenciales. Escribe el autor:

Las lagunas inferenciales y las lagunas entimemáticas pueden ocurrir juntas como en el artículo de Kershner. Cabe señalar, sin embargo, que las lagunas inferenciales y las lagunas entimemáticas son fenómenos distintos. Primero, *un matemático que deja una laguna entimemática, no necesariamente deja una laguna inferencial*. Por ejemplo, el lógico Kurt Gödel dejó una laguna entimemática bastante grande cuando sólo dio un “mero esbozo de prueba” (Gödel 1992, p. 72) de su segundo teorema de incompletitud. Sin embargo, dado que la secuencia de proposiciones que tenía en mente era en efecto una prueba (como lo han verificado innumerables matemáticos desde entonces), no dejó una laguna inferencial. En segundo lugar, *un matemático que deja una laguna*

una concepción aristotélica del entimema (en el contexto de la demostración) que otorga mayor protagonismo al auditorio: “la persuasión se obtiene deductivamente a través de entimemas, pero no en el sentido de raciocinios (o secuencias de ellos) con premisas implícitas y sí en el sentido de raciocinios (o secuencias de ellos) con premisas cuya plausibilidad es aceptada por el auditorio” (Lassalle Casanave 2008, p. 12).

inferencial no necesariamente deja una laguna entimemática. (Fallis 2003, p. 54)

El punto es otro: ambos planos (expresivo e inferencial) aparecen como absolutamente *independientes*, su vínculo se ha invisibilizado. Pero es justamente este *vínculo* o *articulación* o *diálogo* (necesariamente contextual) la clave para comprender el estilo polimodal y la singularidad del formato sumario. Las instancias de formato sumario, si las clasificamos simplemente como lagunas entimemáticas que no son lagunas inferenciales, pierden su especificidad. La clasificación parece así “quedarse corta”, y parece dejar escapar, precisamente, lo que explica la ocurrencia de tales lagunas y su justificable admisibilidad comunitaria.

Para completar muy someramente la taxonomía básica de Fallis, visitemos el tercer tipo de laguna:

Un matemático deja una *laguna no franqueada* siempre que *no haya intentado verificar directamente* que cada proposición en la secuencia de proposiciones que tiene en mente (como si fuera una prueba) *se sigue* de proposiciones previas en la secuencia mediante una inferencia matemática básica. En otras palabras, ha dejado una laguna no franqueada si *no ha intentado* “verificar toda la cadena de conclusiones intermedias”. (Fallis 2003, pp. 56–57; las cursivas son mías.)

Si entiendo bien, la omisión no se ubica ni en la secuencia escrita, ni en la secuencia mental sino, por así decirlo, en la acción matemática verificadora : no han sido verificados todos y cada uno de los pasos de la demostración. En esta exigencia resuena claramente la inspiración cartesiana. Tal omisión es, además, intencional: se ha decidido recorrer parcialmente la “cadena de conclusiones intermedias”. Pero tal tránsito no es arbitrario, es razonadamente selectivo:

Las lagunas no franqueadas, como las lagunas entimemáticas, son dejadas *intencionalmente* por los matemáticos. Como resultado, podríamos preguntarnos razonablemente qué motiva a los matemáticos a dejarlas. La respuesta parece ser que los matemáticos eligen *no analizar todos los detalles de una demostración porque no ganarían nada con ello*. En algunos casos, trabajar todos los detalles de una prueba simplemente *no proporciona ningún beneficio epistémico*. En resumen, los matemáticos optan por no analizar todos los detalles cuando no tienen ninguna duda de que los detalles podrían completarse *fácilmente*. (Fallis 2003, pp. 57–58; las cursivas son mías.)

La/el matemática/o se ahorraría el recorrido de aquellos tramos más o menos triviales, que no supondrían ganancia cognitiva alguna. Los “detalles” podrían “completarse fácilmente”. Surge una pregunta obvia: ¿por quién? ¿Exclusivamente por el propio agente matemático? ¿O incluyendo sustantivamente al interlocutor (*qua* par epistémico del agente)? ¿O incluyendo sustantivamente al interlocutor (en virtud de objetivos pedagógicos precisos)? La inteligibilidad, la comprensión, la captación fina (desde el punto de vista filosófico) de la laguna euclidiana se apoya sustantivamente en las respuestas a estas interrogantes. Luego, aunque la descripción propuesta por la categoría resulta compartible, parece dejar escapar también aspectos relevantes para captar aquella laguna.

La reflexión que Fallis propone acerca de las relaciones entre los tipos de su taxonomía confirma las consideraciones anteriores. Según este autor, pueden ocurrir los tres tipos simultáneamente, pero sin que se confundan. La existencia de una laguna no franqueada no implica una laguna inferencial (esto es: la secuencia mental es una prueba, aunque la/el matemática/o no la recorrió). Y la conversa: la prueba no es tal, pero la recorrió equivocándose en el control inferencial. La existencia de una laguna entimemática no implica una laguna no franqueada. El hiato existe en la secuencia escrita, pero el recorrido crítico ha sido completo. Y la conversa: el recorrido no ha sido completo, pero la secuencia escrita es completa —este caso, reconoce Fallis, “es muy poco probable que ocurra, pero sigue siendo una posibilidad lógica” (2003, p. 57)—. Así mismo, las lagunas entimemáticas no implican lagunas inferenciales y la conversa (Fallis 2003, p. 54).

Las lagunas no franqueadas y, en particular, una subcategoría de estas (a saber: la de las *lagunas universalmente no franqueadas*) serán claves para el enfoque de Fallis del fenómeno de infidelidad al ideal cartesiano en la práctica matemática de la demostración. Así, especifica tal categoría:

Si un matemático deja una laguna no recorrida y no tiene razones para creer que “la cadena total de conclusiones intermedias” haya sido recorrida, entonces ha dejado lo que llamaré una laguna universalmente no franqueada. [...] De hecho, dejar lagunas universalmente no franqueadas parece ser bastante común en la práctica matemática. Los matemáticos no invierten mucho tiempo trabajando en detalles tediosos cuando no tienen duda de que se pueden resolver. (Fallis 2003, p. 59; las cursivas son mías.)

Las lagunas de este tipo (según el autor) no impiden admitir el resultado obtenido, es decir, la comunidad matemática admite las ejemplificaciones o instancias de hiatos de este tipo.

En síntesis, la taxonomía propuesta por Fallis no parece capaz de captar adecuadamente (en términos de comprensión o inteligibilidad) las lagunas euclidianas estudiadas en las secciones 1 y 2. El déficit expresivo que representa el hiato euclidiano se mide en relación con un patrón expresivo localmente instanciado, y respeta sustantivamente un contexto de interlocución específico. Tal patrón se define comunitariamente por su capacidad descriptiva en relación con el plano estructural (cuyo nivel de análisis queda definido por él). La clasificación del formato sumario como laguna entimemática pero no inferencial y universalmente no franqueada luego parece no lograr contribuir a la comprensión de aquel interesante fenómeno. Dicho de manera sucinta, tal modalidad clasificatoria no incluye a quienes intervienen, ni a su significativa interrelación, ni al contexto en que ocurre. Esto no obsta, por supuesto, para reconocer la originalidad y alta valía de la contribución de Fallis; la propuesta que se desarrolla en la sección siguiente procurará recuperar, parcialmente, algunas de sus ideas.

4

Entenderé por *laguna expresiva* las deficiencias o interrupciones o discontinuidades comunicacionales en la demostración matemática. En clave bidimensional, esto no supone asunciones acerca de su impacto estructural. Un primer paso para caracterizar las lagunas euclidianas (como subclase) consiste en especificar su desempeño estructural: en virtud de un conjunto de rasgos (ínsitos en la interacción expresión-estructura, que, como ya he anotado, supone una alta sensibilidad contextual), tal subclase no supone un déficit lógico (en sentido lato). La perspectiva expresiva (bidimensional y contextual) nos ayuda, nuevamente, a *identificar* esos rasgos. El objetivo de esta sección será captar tales rasgos, no ya como característicos de un fenómeno expresivo singular (el formato sumario euclidiano), sino como indicadores de una clase más amplia, más general de “gaps”. Obviamente, las lagunas euclidianas caerán en esta categoría de lagunas expresivas, pero no solo ellas. Para fijar ideas, podríamos denominarlas *lagunas expresivas sumarias*. La denominación no resulta totalmente satisfactoria, pero no se me ocurrió una alternativa mejor; debe entenderse la como si acentuara, especialmente, la operación descriptiva o comunicativa que la caracteriza, sin producir costo es-

tructural. Es este último aspecto el que no queda bien capturado por el nombre. Por supuesto, una solución rudimentaria es agregarle el calificativo: (“*sin costo estructural*”).¹⁵

Empecemos por una observación general: las lagunas que captan nuestro interés son *fenómenos expresivos*.¹⁶ Ellas se encuentran en las demostraciones tal y como ocurren en la práctica matemática (es decir: no en las demostraciones formales). Luego, el concepto de demostración informal (como se suele llamar) resulta relevante. Este ha recibido diversas aproximaciones conceptuales. Por ejemplo, Tanswel escribe:

las pruebas informales son pruebas tal como se *escriben y producen en la práctica matemática*. En ellas se pueden hacer suposiciones con base en los conocimientos y capacidades inferenciales previas de la audiencia objetivo, *saltarse pasos tediosos o rutinarios y hacer referencia a propiedades semánticas y propiedades de los objetos matemáticos, sin expresarlas en forma totalmente explícita*. Estas pruebas tampoco se limitan a formularse en los lenguajes formales: aunque se pueden utilizar simbolismos matemáticos en ellas, se emplean libremente el lenguaje natural, los diagramas y las explicaciones en modo mixto. (2015, pp. 295–296; las cursivas son mías.)

La demostración informal es el hogar de la laguna. Luego, el estudio de esta última se desarrolla en el contexto de la primera. Esto supone adoptar una serie de cuidados en la metodología empleada. Por ejemplo, predicados como “ser explícita” o relaciones como “ser menos explícita que”, cuando se trata de demostraciones matemáticas informales, no pueden entenderse en el marco de criterios universales, fijos, y, por así decirlo, de inspiración exclusivamente sintáctica. En general, los patrones expresivos deben ser mudables y contextuales, aunque claramente intersubjetivos, comunitarios, identificables, nunca puramente sintácticos. El *formato minucioso* en Euclides es un ejemplo iluminador: se trata de un patrón contextual, comunitario, local, perfectamente identificable, en relación con el cual se mide el déficit (en términos de explicitud) del *formato sumario*. Individualizar tal patrón es entonces un ejercicio importante en el examen

¹⁵ La preocupación respecto de la denominación radica en evitar una confusión: obviamente pueden existir lagunas expresivas que recurran al expediente de la descripción sumaria y fallen estructuralmente.

¹⁶ En adelante usaré (salvo aclaración en contrario y cuando el contexto lo habilite) “laguna” o “laguna expresiva sumaria” como equivalente de “laguna expresiva sumaria (sin costo estructural)”.

de la práctica matemática, y su acatamiento, por parte del discurso deductivo, suele ser la regla. Es decir, no resulta excepcional, sino normal —en Euclides, como he insistido, el formato minucioso funciona como *primitivo* (en términos expresivos y con consecuencias sobre el entramado estructural) de la actividad deductiva comunitariamente aceptada—. No se optará aquí, como se dijo, por identificar dos tipos independientes de lagunas (inferencial, entimemática); la interacción o articulación entre los planos expresivo y estructural será lo que identifique la laguna expresiva sumaria. Precisamente esa articulación es la que arroja luz sobre el proceso sofisticado que permite que, a la vez, la demostración polimodal posea lagunas (que suponen tramos con un menor nivel de explicitud en relación con el formato minucioso), pero que estas no entrañen déficit estructural. La comprensión de esta situación combina la atención fina al plano expresivo (pues permite apreciar la diferencia de explicitud entre formatos), con la consideración precisa de la articulación de este con el plano estructural (no se ve interrumpida la capacidad descriptiva, sino disminuida su contribución en relación con los detalles). En este sentido rico de comunicación, los desniveles en términos de explicitud no pueden entenderse como impotencia comunicacional absoluta —donde el contexto desempeña un papel decisivo. Como su nombre completo lo indica, las lagunas que nos interesa captar representan desniveles comunicacionales, pero sin déficit estructural.

Estas lagunas poseen así mismo una naturaleza *relacional*. ¿Por qué? Porque aquella modalidad comunicativa o expresiva (entendida como laguna) es parte de la comunicación total, es decir, de la comunicación integral de la demostración. Una mirada insular, encapsulada de la primera supondría una operación quirúrgica de difícil justificación conceptual. Luego, el déficit de explicitación (característico de la laguna) solo puede apreciarse *en relación con* la explicitud (relativamente) más plena de otro tramo o parte de la comunicación. La prelación del formato minucioso respecto del sumario en Euclides ejemplifica perfectamente este rasgo.¹⁷

La ubicación de las lagunas en el plano expresivo y su naturaleza relacional fomentan a su vez una apreciación de corte *gradualista* en su nivel de explicitud; es decir, no hay razones para una clasificación

¹⁷ Este es un caso de precedencia *literal*, pero es necesario ampliar tal concepto; en otros contextos es probable que deban incluirse antecedentes diversos, pertenecientes a la práctica matemática: la demostración de resultados previos, la formulación de métodos compartidos, etc. Esta ampliación no debe difuminar la residencia expresiva de la laguna. Quizá merezca recordarse que, en la perspectiva de este trabajo, importa concentrarse en esta precedencia literal que ocurre en las lagunas euclidianas.

binaria rígida. La diferenciación sugerida en la sección 1 entre casos *límite* y casos *estándar* del estilo polimodal puede servir de ejemplo de tal gradación —en atención a ocurrencias muy disímiles del formato sumario—. En los casos *límite*, el formato sumario es apenas sugerido y comunica entonces exhibiendo un nivel mínimo de explicitación descriptiva (aunque complementado decididamente por la cooperación comunitaria), mientras en los casos *estándar*, el formato sumario trasmite en mayor grado la información estructural pertinente, pero en un grado inferior a la explicitud máxima, representada por el formato minucioso (en el sentido relacional discutido antes). La gradación de explicitud, propia de estos casos, puede apreciarse, por ejemplo, en la demostración de I.15.¹⁸

Entender en clave *relacional* y *gradual* nuestro fenómeno implica una noción *relativa* de explicitud y, consecuentemente, se aleja de un supuesto fuerte de la descripción cartesiana. ¿Cuál es tal supuesto? El compromiso con una noción *absoluta* de explicitud. Tal perspectiva se compromete con un punto final para el análisis, para la desagregación en eslabones de la cadena deductiva; cuando llegamos a ese punto alcanzamos un nivel máximo, insuperable de explicitud. Este es, entonces, absoluto. O sea, el nivel óptimo de explicitud no depende de una elección particular, específica; es simplemente *el* nivel de explicitud requerido.¹⁹ Si entiendo bien, satisfacer tal criterio es lo que algunos autores entienden por “*completitud*” de la prueba. Pongámoslo así: una prueba es *completa* cuando exhibe este nivel absoluto, máximo de explicitud. Luego, es *incompleta* (esto es, con lagunas o hiatos o vacíos) cuando esto no ocurre, cuando no se logra la explicitación total.²⁰ Nótese que este absolutismo puede adoptar

¹⁸ Mi propósito es, exclusivamente, identificar el rasgo gradualista en las lagunas expresivas sumarias. Luego, se trata de un punto de vista meramente *descriptivo*. Puede argumentarse la valía teórica de (en general) la gradualidad expresiva del discurso deductivo, y deshacerse así de una concepción empobrecedoramente dualista (informal/formal). Es esta la perspectiva, por decirlo así, *propositiva* de Böhne (2019).

¹⁹ Leibniz, por ejemplo, hace explícita la búsqueda de la mayor explicitud deductiva: “sería importante demostrar todos nuestros axiomas *secundarios*, que son utilizados de ordinario, reduciéndolos a los axiomas *primitivos* o inmediatos o indemostrables...” (Leibniz 1983, p. 490). Un *locus* clásico de esta posición en la obra leibniziana se encuentra en *Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano*, Libro IV, capítulo VII.

²⁰ Algunos autores incluso hablan de argumentos “completamente rigurosos”. Así Paseau escribe: “En consecuencia, un argumento *completamente riguroso* es aquel en el que todas las premisas, por obvias o ampliamente aceptadas que sean, se hacen explícitas, y en el que *todos los pasos inferenciales son lo más pequeños posibles*” (2016, p. 178; las cursivas son mías).

dos formas: una modalidad ahistórica o una modalidad histórica, es decir, vigente en un contexto particular dado —esta última es abiertamente más razonable (Kitcher 1981, p. 481)—.

Creo advertir cierta ligera ironía en Pólya cuando se refiere al lógico que se adhiere a aquel ideal de la completitud antes referido: “Para un lógico de una cierta clase solamente existen las pruebas completas. Lo que se pretende que sea una prueba no debe dejar huecos, ni lagunas, ni incertidumbre alguna, o no es una prueba” (2004, p. 215). Desde mi punto de vista, su observación inmediatamente posterior resulta muy natural: “¿Podemos encontrar en la vida cotidiana, en los procedimientos legales, o en las ciencias físicas pruebas completas de acuerdo con criterios tan altos? Difícilmente” (2004, p. 215). Podríamos decir más: tampoco son frecuentes en matemáticas. La sagaz conclusión de Pólya es: “Hemos discutido las ventajas de las pruebas, pero ciertamente *no propugnamos que todas las pruebas deban darse ‘in extenso’*. Por el contrario, hay casos en los que difícilmente es posible; un ejemplo importante de esto es la enseñanza del cálculo diferencial e integral a estudiantes de ingeniería” (2004, pp. 218–219; las cursivas son mías). Más allá de la puntería del ejemplo específico que alega el autor, lo que quiero resaltar es que en su discusión surge una posible *funcionalidad* de las demostraciones con lagunas. Otro ejemplo de pruebas que no se dan “*in extenso*” son las euclidianas y, como se adelantó, puede pensarse en motivaciones o, si se prefiere, en *funciones* que han de cumplir tales lagunas (y, luego, funciones de la propia prueba). Por supuesto, es evidente que, en cierto contexto histórico, puede ser más o menos unívoco el criterio regulador de explicitud comunitariamente compartido. En particular, podría pensarse, por ejemplo, en la introducción a lo largo del tiempo de diversos lenguajes artificiales, en mayor o menor medida formales, como frutos de tales consensos.²¹

Con su habitual fineza metodológica, Pólya apunta luego a un equilibrio compartible (teniendo presente la observación de la cita precedente), y reconoce lo siguiente:

²¹ Esta observación hace referencia a un hecho histórico incontestable: los lenguajes formales, tal cual los conocemos hoy, son producto de un largo proceso de refinamiento. La cuestión puede pensarse, así mismo, en términos teóricamente más ambiciosos: ¿cómo explotar niveles o ciertas estrategias de formalización a los efectos de obtener una expresión deductiva más eficiente? Esto se aborda en Lampton 2012. Considerando que su objetivo es perfeccionar la escritura matemática de las pruebas existe un vínculo potencialmente importante con la discusión presente. Pero explorar tal vínculo es un proyecto sofisticado que excede con creces los modestos límites de esta comunicación.

[puede] hacerse un *uso razonable de pruebas incompletas*. Para un lógico estricto, una prueba incompleta no es en absoluto una prueba. Y, ciertamente, *las pruebas incompletas deben distinguirse cuidadosamente de las pruebas completas*. [...] Pero las pruebas incompletas pueden ser útiles cuando son usadas en el lugar que les corresponde y con buen tino. Su propósito no es reemplazar a las pruebas completas, lo que no podrían hacer, sino *otorgar interés y consistencia* a la presentación. (2004, pp. 219–220; las cursivas son mías.)

Y agrega más adelante:

Algunos autores, pero no muchos, tienen el don de presentar sólo el germen de la prueba, la idea principal en su forma más simple, e indicar la naturaleza de los detalles restantes. Una prueba de este tipo, aunque incompleta, *puede ser mucho más instructiva que una prueba presentada con todos los detalles*. (2004, p. 221; las cursivas son mías.)

Este excursus por las ideas de Pólya pretende mostrar que la atención a eventuales funciones de opciones comunicativas diversas aparece como una empresa prometedora, dirigida a captar ciertos aspectos relevantes de la práctica matemática. En este marco general, las *motivaciones* o *funciones* de la laguna euclidiana (como se adelantó) resultan ser un ejemplo natural.²²

Las lagunas, en cuanto variaciones comunicacionales, pueden ser intencionales (aunque no necesariamente lo son); la omisión o una carencia al respecto puede deberse, por ejemplo, a falta de atención o incompreensión. Es decir, puede producirse cierto déficit expresivo involuntario, a veces inocuo, a veces estructuralmente relevante. Las lagunas expresivas sumarias, sin costo estructural, son intencionales. Teniendo en cuenta que son resultado de una *elección* expresiva, es decir, de una selección de *modos* o *formas* de describir la ilación estructural, ¿cómo podrían no serlo? Tales hiatos forman parte de una comunicación voluntaria, pautada por las exigencias comunitarias y el estilo individual de la agencia matemática.²³ Aquí también el marco expresivo bidimensional promueve una comprensión rica de la política comunicativa, especialmente del comportamiento de las lagunas expresivas sumarias (sin costo estructural). Una razón clave

²² Las diversas motivaciones posibles del estilo polimodal euclidiano se discuten con detalle en Seoane 2022.

²³ Es útil advertir que, desde la perspectiva de Fallis, las lagunas entimemáticas son intencionales, pero no así las inferenciales (Fallis 2003, p. 55).

de ello: incorporar la *interacción estructura-expresión*. La presión que ejerce la ilación estructural comunicada sobre las capacidades de los artefactos comunicacionales disponibles es una cuestión natural en el contexto de la laguna expresiva sumaria. Por ejemplo, esta categoría aloja (de un modo intelectualmente satisfactorio) el contraste entre los casos tratados en la sección 1 y los examinados en la sección 2; en los primeros, la política expresiva *escoge* (por razones no estructurales) la formulación predilecta en términos de explicitud; en los segundos, la política expresiva está *determinada* por razones estructurales (en el contexto vigente). Este contraste decisivo obliga así mismo a una respuesta diferenciada a la cuestión de las *motivaciones* o *funciones* para la política expresiva. ¿Por qué apelar a lagunas en la demostración matemática? En los primeros casos (para seguir con el ejemplo) puede apelarse a las capacidades del auditorio y/o a las elecciones que el agente matemático emisor hace según sus valores; en los segundos casos, la presión estructural se impone. La expresión deductiva aparece así sometida al menos a tres fuentes de tensión: la estructura, el “background” o marco (incluyendo los valores) de la agencia matemática, y el “background” o marco (incluyendo los valores) del receptor.

En síntesis, las lagunas euclidianas son, obviamente, lagunas expresivas sumarias (sin costo estructural). Expresado de manera menos sintética: son interrupciones o hiatos o discontinuidades comunicacionales (en términos de decaimiento de cierto nivel relativo de explicitud), pero, en virtud de un conjunto de rasgos generales (que hemos descrito antes), no suponen déficit lógico (en sentido lato). Ahora bien, tales rasgos, ¿no se presentan también en otras demostraciones polimodales? ¿No hay lagunas expresivas que *prima facie* al menos parecen ser lagunas expresivas sumarias (sin costo estructural)? He aquí una demostración relativamente frecuente en los cursos de lógica. Las premisas son las siguientes (y, como se advierte, son infinitas):

- (i) $\forall x \forall y \forall z ((Rxy \ \& \ Ryz) \rightarrow \ Rxz)$
- (ii) $\forall x \neg Rxx$
- (iii) Ra_1a_2
- (iv) Ra_2a_3
- (v) Ra_3a_4
- :
- :

PRUEBA (que, como se advierte, debe recurrir a todas las premisas)

De (ii) y (iii) se deduce que a_1 es diferente de a_2 . De modo similar, de (ii) y (iv) se deduce que a_2 es diferente de a_3 . Además, teniendo en cuenta que de (i), (iii) y (iv) se deduce que Ra_1a_3 , de (ii) se sigue nuevamente que a_3 también es diferente de a_1 . Del mismo argumento se deduce que a_4 es diferente de a_1 , a_2 y a_3 . Y así sucesivamente. Por lo tanto, todas las a_i son diferentes y R tiene un dominio infinito. (Chateaubriand 2005, p. 286)

CONCLUSIÓN

El dominio de R no puede ser sino infinito.

Hasta donde alcanzo a ver se trata esta de una demostración perfectamente aceptable. No parece exhibir entonces problema estructural alguno.

¿Es una demostración con gaps? Sí, en el sentido en que lo son las euclidianas del tipo de III.1, discutida en la sección 2. Posee una obvia laguna expresiva. Y, al igual que aquellas, no es deficitaria en términos estructurales —en el sentido que no implica error inferencial—. Podríamos identificar, además, sin dificultad alguna, tramos comunicativos funcionalmente similares a los dos formatos euclidianos: minucioso y sumario. Por supuesto, existe una diferencia importante, desde el punto de vista expresivo, en relación con las demostraciones euclidianas: la naturaleza homogénea (lingüística) de la primera versus la heterogeneidad gráfico-lingüística de las segundas.

Este modesto ejemplo simplemente sugiere que la economía funcional de complementación, en términos esenciales, protagonizada por los formatos minucioso y sumario (en sentido general), parece caracterizar las lagunas expresivas sumarias (sin costo estructural). Esta última categoría evidentemente incluye, pero no se restringe, a las lagunas euclidianas.

5

En general, las lagunas han sido percibidas, tradicionalmente, como ocasión de error;²⁴ Fallis, como hemos visto, identifica, de manera acertada, esa sensibilidad intelectual con las ideas de Descartes. Pero, notoriamente, existe una extraordinaria saga al respecto. Frege escribe casi una consigna en su *Conceptografía* de 1879: “suprimir

²⁴ Dieudonné, por ejemplo, llega a la consideración de (en nuestra terminología) las lagunas expresivas a partir del tratamiento de tipos de error en la demostración; véase Dieudonné 1992, p. 236.

toda laguna en la cadena de inferencia” (Frege 1972, p. 8). Y un siglo después leemos en Kitcher: “Practicar matemáticas rigurosas es, evidentemente, ofrecer argumentos rigurosos. La lógica ayuda en la caracterización del argumento riguroso: es esencial a la idea del razonamiento riguroso que *no debe contener lagunas*, que debe proceder mediante pasos elementales” (Kitcher 1981, p. 469; las cursivas son mías). Para este filósofo, tal exigencia pertenece a una concepción “tradicional” que no comparte, pero su rechazo evidencia su vigencia e incluye, como rasgo saliente de aquella perspectiva (denominada por Kitcher “deductivismo”), el contar con *demonstraciones libres de lagunas*.²⁵ Podría decirse que este último es un ideal de naturaleza *justificacional o epistémica*. Pero ¿acaso la práctica matemática respeta en todos los casos ese ideal? La respuesta de Fallis, como se adelantó, es que no. Fallis concluye su artículo proponiéndonos el caso de una matemática que procura demostrar (por inducción sobre fórmulas) que todas las fórmulas del lenguaje lógico de primer orden poseen cierta propiedad. Si ella optara por probar todos y cada uno de los detalles, el ideal cartesiano nos daría la respuesta acerca de por qué asevera la verdad del teorema correspondiente. Pero es probable que ella deje una laguna entimemática, es decir:

[que] analice el caso de los conectivos rápidamente y no analice los detalles (es decir, que deje una laguna universalmente no franqueada). *Ella no trabajará todos los detalles porque su pericia y experiencia le dicen que, si fuera necesario, podría completarlos fácilmente. Esta práctica no sólo es aceptada por la comunidad matemática, sino que esta matemática sin duda está justificada al creer que ella podría completar los detalles y, por lo tanto, que el teorema sobre fórmulas bien formadas es verdadero.* Sin embargo, considerando que no ha trabajado en los detalles, la historia cartesiana no explicará cómo está justificada en su creencia. *Con el fin de proporcionar una descripción completa acerca de cómo los matemáticos están justificados al creer, de una manera aceptada por la comunidad matemática, que las proposiciones matemáticas son verdaderas, la historia cartesiana debe complementarse de alguna forma.* (Fallis 2003, pp. 63–64; las cursivas son mías.)

²⁵ A juzgar por las condiciones que entiende que caracterizan una rigorización, Kitcher (en un marco remozado) parecería suscribir este ideal de rigor argumental, pero, a su vez, introduce matices relevantes: “un reemplazo riguroso debe tener la misma estructura que el argumento original, pero debería ‘llenar los vacíos’. No he adoptado esto como un requisito general porque creo que es inaplicable a los casos interesantes” (1981, p. 480).

Es decir: una *descripción* acabada, satisfactoria, “completa” de los mecanismos de justificación (compartidos por la comunidad) para la aceptación de las proposiciones matemáticas no se reduce a la “historia cartesiana”. Esta debe “completarse” y la propuesta de Fallis se orienta en tal dirección. La sugerencia del filósofo es sensata: en ciertos casos, en virtud de la facilidad o trivialidad del control de los pasos obviados, se admite desobedecer el ideal cartesiano. La comunidad matemática justifica idealmente sus resultados apelando al modelo cartesiano, pero este no se aplica de forma mecánica: en ocasiones, cuando el test es fácil u obvio (en la convicción comunitaria), es posible “saltarse” los pasos correspondientes. Es aquí donde (según la *descripción justificacional* elaborada por Fallis) las lagunas o hiatos resultarían aceptados pacífica y legítimamente. Hasta cierto punto, podría decirse que la aceptación de las demostraciones con lagunas expresivas sumarias (sin costo estructural) podrían *instanciar* o *ejemplificar* esta tesis del filósofo: la “facilidad” aludida por el filósofo en tal caso es contextual, la provee, en algunos ejemplos, el papel modélico del formato minucioso y, en su ausencia, el contexto comunitario pertinente. Además, hasta cierto punto, los desarrollos previos *robustecen* la tesis: la aceptación (en el caso de las lagunas expresivas sumarias aquí estudiadas) se *basa* en que no existe déficit estructural. No obstante, debe reconocerse que la contribución de las páginas precedentes es muy modesta en relación con dicha tesis —centrada en la preocupación “justificacional” o “verificacionista”, y cuyo interés filosófico merece subrayarse—. ²⁶

Quizá estas notas sí contribuyan de modo más sustantivo a, por decirlo así, una “agenda” *complementaria* a la verificacionista. Esto es: quizá logren llamar la atención acerca de otros aspectos (*relacionados*, pero no *identificados* con la verificación) que una descripción de la práctica deductiva merecería atender. Aquella incluiría cuestiones como: ¿la persistencia de lagunas expresivas en la demostración informal no nos hablaría de dimensiones o funciones *particulares* (aunque articuladas con la inferencial) en la comunicación deductiva? ¿La presencia de tales hiatos no indicará, en ciertos casos, motivaciones *estético-cognitivas* o *pedagógicas* del agente matemático? ¿No expresará demandas *estructurales* en otros? ¿No “localizará”, indirectamente, espacios de *creación* o *novedad*, y, directamente, espacios

²⁶ En este caso particular, la “agenda de la verificación” incorpora la preocupación por describir cómo intervienen (en términos inferenciales) las lagunas o vacíos en la demostración, y abre así una importante avenida filosófica. En ella pueden ubicarse trabajos como Hamami 2014 y Andersen 2020.

más o menos *rutinarios*? ¿No tendrá algo que decir en relación con cómo se relacionan unos y otros en los distintos contextos en que se comunican demostraciones? Se incluiría también en aquella agenda una interrogante que ya fue adelantada: ¿este enfoque expresivo bidimensional induciría una taxonomía general alternativa a la de Fallis? Tales cuestiones (entre otras) se incorporarían en lo que antes denominé (quizá de un modo algo enigmático) una *agenda filosófica de la expresión* —complementaria a la valiosa agenda filosófica de la verificación—. ^{27, 28}

BIBLIOGRAFÍA

- Andersen, Line Edslev, 2020, “Acceptable Gaps in Mathematical Proofs”, *Synthese*, no. 197, pp. 233–247.
(<https://doi.org/10.1007/s11229-018-1778-8>)
- Anglin, William Sherron, 1991, “Mathematics and Value”, *Philosophia Mathematica*, vol. s2–6, no. 2, pp. 145–173.
(<https://doi.org/10.1093/phimat/s2-6.2.145>)
- Böehne, Sebastian, 2019, *Different Degrees of Formality An Introduction to the Concept and a Demonstration of its Usefulness*, tesis doctoral (Doctor Rerum Naturalium in Theoretical Computer Science), Universität Potsdam, Potsdam, 17 de enero.
- Chateaubriand, Oswaldo, 2005, *Logical Forms, Part II — Logic, Language, and Knowledge*, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, Campinas.
- Descartes, René, 1998, *Regule ad directionem ingenii —Rules for the Direction of the Natural Intelligence*, ed. y trad. George Heffernan, Rodopi, Amsterdam/Atlanta.
- Descartes, René, 1996, *Reglas para la dirección del espíritu*, trad. Juan Manuel Navarro Cordón, Alianza Editorial, Madrid.
- Dieudonné, Jean, 1992, “The Concept of ‘Rigorous Proof’”, *Mathematics — The Music of Reason*, Springer-Verlag, Berlín, pp. 235–238.

²⁷ Las preocupaciones manifiestas de este trabajo, como se ha dicho, pueden integrar la “agenda de la expresión” pero, desde luego, no son las únicas. Como certeramente se me ha sugerido, discusiones acerca de la dimensión explicativa o comprensiva de las demostraciones (Robinson 2000) o la reflexión promovida por el llamado “problema 24 de Hilbert” (Thiele y Wos 2002) resultan, desde tal punto de vista, ricas y prometedoras.

²⁸ Deseo agradecer a quienes revisaron este manuscrito por sus múltiples y valiosas correcciones y sugerencias; las primeras me permitieron eliminar errores, las segundas enriquecer el texto original. Deseo así mismo reconocer la generosa ayuda de Alejandro Chmiel y Oscar Esquisabel, en distintas etapas de la elaboración de este trabajo. Expreso, finalmente, mi reconocimiento a Inés Coira por su colaboración en la corrección de la redacción final. Todos los errores subsistentes son de mi entera responsabilidad.

- Euclides, 1991, *Elementos (Libros I–IV)*, trad. María Luisa Puertas Castañón, Gredos, Madrid.
- Euclides [Euclid], 1956, *The Thirteen Books of the Elements*, trad. Thomas Little Heath, Dover, Nueva York.
- Fallis, Don, 2003, “Intentional Gaps in Mathematical Proofs”, *Synthese*, vol. 134, pp. 45–69. (<https://doi.org/10.1023/A:1022131513275>)
- Frege, Gottlob, 1972, *Conceptografía/Los fundamentos de la aritmética/Otros estudios filosóficos*, trad. Hugo Padilla, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.
- Giaquinto, Marcus, 2008, “Visualizing in Mathematics”, en Mancosu 2008, pp. 22–42.
- Gödel, Kurt, 1992, *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*, trad. B. Meltzer, Dover Publications, Nueva York.
- Hamami, Yacin, 2014, “Mathematical Rigor, Proof Gap and the Validity of Mathematical Inference”, *Philosophia Scientiae*, vol. 18, no. 1, pp. 7–26. (<https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.908>)
- Kitcher, Philip, 1981, “Mathematical Rigor—Who Needs It?”, *Noûs*, vol. 15, no. 4, pp. 469–493. (<https://doi.org/10.2307/2214848>)
- Lamport, Leslie, 2012, “How to Write a 21st Century Proof”, *Journal of Fixed Point Theory Applications*, vol. 11, pp. 43–63. (<https://doi.org/10.1007/s11784-012-0071-6>)
- Lassalle Casanave, Abel, 2008, “Entre la retórica y la dialéctica”, *Manuscripto*, vol. 31, no. 1, pp. 11–18.
- Leibniz, Gottfried Wilhelm, 1983, *Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano*, ed. Javier Echeverría Ezponda, Editora Nacional, Madrid.
- Mancosu, Paolo (comp.), 2008, *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford University Press, Oxford.
- Netz, Reviel, 1999, *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Paseau, Alexander Christopher, 2016, “What’s the Point of Complete Rigour?”, *Mind*, vol. 125, no. 497, pp. 177–207. (<https://doi.org/10.1093/mind/fzvl40>)
- Pólya, George, 2004, *How To Solve It. A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, Princeton.
- Robinson, J.A., 2000, “Proof = Guarantee + Explanation”, en Stefen Hölldobler (comp.), *Intellectis and Computational Logic. Papers in Honor of Wolfgang Bibel*, Kluwer, Dordrecht, pp. 277–294. (<https://doi.org/10.1007/978-94-015-9383-0>)
- Seoane, José, 2025, “Estilo polimodal en Euclides: casos límite y casos estándar”, *Tópicos. Revista de Filosofía de Santa Fe*, no. 47, e0119. (<http://doi.org/10.14409/topicos.2025.47.e0119>)
- Seoane, José, 2022, “Estilo polimodal en la demostración euclidiana”, *Diánoia*, vol. 67, no. 89, pp. 39–65. (<http://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.2022.89.1903>)

- Tanswell, Fenner, 2015, “A Problem with the Dependence of Informal Proofs on Formal Proofs”, *Philosophia Mathematica*, vol. 23, no. 3, pp. 295–310. (<https://doi.org/10.1093/phimat/nkv008>)
- Thiele, Ruediger y Larry Wos, 2002, “Hilbert’s Twenty-Fourth Problem”, *Journal of Automated Reasoning*, vol. 29, no. 1, pp. 67–89.
- Weaver, George, 1988, “Reading Proofs with Understanding”, *Theoria*, vol. 54, no. 1, pp. 31–47.
(<https://doi.org/10.1111/j.1755-2567.1988.tb00711.x>)

Recibido el 1 de agosto de 2024; aceptado el 10 de junio de 2025.