

DOI: 10.22201/iifs.18704905e.2025.1712

José Ferreirós y María de Paz (comps.), *La génesis de la geometría: una perspectiva interdisciplinaria*, Plaza y Valdés Editores, Madrid, 2023, 362pp., ISBN 978–84–17121–70–9

La geometría ha sido una disciplina muy influyente en la cultura occidental. Desde que Euclides la expuso de forma axiomatizada, se ha considerado un modelo de conocimiento riguroso. Por esa razón, en la Edad Moderna se escribieron textos sobre política, ética y jurisprudencia, según el modelo de los *Elementos* de Euclides, con el objetivo de presentar sus conclusiones en una forma irrefutable. Ejemplos son, entre otros, la *Ética* de Spinoza y los *Elementos de jurisprudencia universal* de Pufendorf. En el siglo XIX, a partir de la discusión sobre la validez del postulado de las paralelas de Euclides, surgieron las geometrías no euclidianas de gran importancia en la física contemporánea, ejemplo de la influencia de la geometría en otros ámbitos de la ciencia.

El objeto de estudio de la geometría ha ido cambiando en el transcurso de la historia del pensamiento occidental. Durante la Antigüedad y la Edad Media, se consideró que la geometría era la ciencia de las cantidades continuas, en contraste con la aritmética, ciencia de las cantidades discretas. Esa distinción ya se encuentra en los *Segundos Analíticos*, I,7 de Aristóteles. A partir del siglo XVII, surgió la concepción de que la geometría es la ciencia del espacio. Desde finales del siglo XIX, la geometría avanzó tanto en su proceso de algebrización, iniciado ya por Descartes, que se tornó indisoluble del álgebra.

Uno de los méritos de la *Génesis de la geometría*, el libro reseñado, es rescatar el carácter de la geometría como ciencia del espacio. Este texto es el producto colectivo de autores con diversas formaciones: filósofos, historiadores de la matemática, especialistas en ciencias cognitivas, arqueólogos. Por un lado, muchos de ellos son especialistas en más de una de esas disciplinas, y por otro, han trabajado en conjunto y se han encontrado frecuentemente en reuniones científicas, por lo que el texto tiene una unidad claramente perceptible. Además, muchos capítulos remiten a otros de la misma obra. Junto a las contribuciones personales encontramos una traducción del alemán con introducción y comentario del texto de Johann Lambert, *Teoría de las líneas paralelas*, de 1776.

La obra tiene tres partes donde están distribuidos doce capítulos. La primera parte trata del proceso que lleva de la cognición básica del espacio hasta lo que es llamado “protogeometría”, concepto que aclararemos más adelante. En el capítulo 1, José Ferreirós, profesor de la Universidad de Sevilla, identifica tres elementos en la cognición visuoespacial básica: la permanencia de los objetos percibidos, la continuidad del movimiento y la tridimensionalidad de nuestro entorno y de las cosas en él. Ferreirós sostiene que, probablemente, esos elementos son independientes de la cultura. En nuestra infancia adquiriríamos la capacidad de distinguir entre el cambio de perspectiva y el del estado de cosas. Al volver a la perspectiva inicial, recuperamos la percepción que teníamos al comienzo. Pero si son las cosas mismas las que cambiaron, entonces eso no es posible. Ahora bien, el ser humano puede formar representaciones de los objetos de su entorno y de su localización, como los dibujos y las pinturas. Al hacerlo, entramos en una nueva fase, la de la protogeometría, en la cual son representados los objetos y se crean conceptos para las formas geométricas. En este nivel se desarrollan herramientas para hacer representaciones de las cosas, de su tamaño y posición: cuerdas, varas, estiletes. Con su ayuda se pueden calcular longitudes, áreas y volúmenes. Algunas culturas, como la de la Grecia antigua y la nuestra, fueron más allá del nivel de la protogeometría. Crearon un lenguaje con términos técnicos, elaboraron reglas para operar con diagramas y organizaron de forma deductiva el conocimiento sobre las formas geométricas. Se alcanza el nivel del conocimiento geométrico. Ferreirós enfatiza tres afirmaciones: primero, los conocimientos contemporáneos sobre la percepción no parecen ser compatibles con la teoría de que los seres humanos poseen una estructura del espacio visual innata y rígida; segundo, las representaciones externas por medio de dibujos, diagramas y pinturas tienen un papel clave en la formación del conocimiento protogeométrico; tercero, en la formación de ese conocimiento también tiene gran importancia la manipulación de los objetos. La argumentación de Ferreirós se apoya no sólo en trabajos de filósofos e historiadores de la matemática, sino también en publicaciones recientes de psicólogos cognitivos.

El capítulo 2 lo escribió Valeria Giardino, investigadora del Institut Jean Nicod de París. En las primeras páginas, Giardino introduce el concepto de artefacto cognitivo. Pensemos en una cuerda. Imaginemos girar esa cuerda alrededor de un punto fijo. Queda formada la imagen de un círculo. Rotemos ese círculo alrededor de una vara vertical. Se genera así un cilindro. Aquí están presentes: la habilidad motriz de girar objetos, la capacidad de representarlos por medio

de imágenes, y la de mover esas imágenes con el pensamiento para formar una nueva imagen. En lugar de tener esa cuerda, podemos pensar que tenemos un dibujo de ella. Ese diagrama sería lo que Giardino llama un “artefacto cognitivo”. Podemos operar con él para generar nuevos objetos y descubrir relaciones espaciales. Un diagrama que contiene dos dibujos —cada uno correspondiente a una pieza de una máquina— y en el que estos no pueden superponerse indica que las piezas representadas no encajan exactamente entre sí. Giardino menciona a la filósofa alemana Sybille Krämer, quien se interesaba en objetos, como diagramas y otros artefactos cognitivos, que manifiestan una iconicidad operativa. Ellos no pueden ser subsumidos bajo el par dicotómico palabra e imagen. No son puras imágenes como las fotografías y las pinturas porque es posible operar sobre ellos para obtener nuevos objetos y descubrir nuevas relaciones. No son palabras porque no dicen algo sino que lo muestran. Giardino trata la cuestión de hasta qué punto los artefactos cognitivos expanden la cognición visuoespacial básica. Cita investigaciones en el ámbito de la psicología y la antropología. Una de ellas, realizada en la India, con niños, muestra que para el progreso de su conocimiento geométrico y aritmético serían imprescindibles los artefactos cognitivos. La autora no indica cuáles, pero podemos pensar en reglas, compases, transportadores y ábacos. Otra investigación fue realizada con los mundurukús. Esos indígenas de Brasil tienen un lenguaje que sólo posee términos para los números 1, 2, 3 y emplean una misma palabra para denotar números superiores. Los mundurukús consiguen distinguir cuándo un conjunto de puntos es mayor que otro conjunto de puntos. Sin embargo, tienen dificultades para sumarlos. Si consideramos el lenguaje como un artefacto cognitivo, podemos ver cómo una limitación en ese artefacto se muestra como un obstáculo para el avance del conocimiento aritmético. Los mundurukús manipulan varias herramientas que les permiten hacer collares, pulseras y construir sus casas. Pueden desplazarse entre sus aldeas. Pero no hacen mapas ni dibujan sus casas. Sus dibujos son toscos y no dan información sobre la distancia entre dos aldeas o sobre el ángulo determinado por dos direcciones. Al no poder representar su entorno, su punto de vista sobre el espacio es egocéntrico. Una situación semejante se observó entre los yaganes de Tierra del Fuego. Pueden navegar en los canales, sin perderse ni naufragar, pero no se orientan por mapas. Para ir de un lugar a otro, usan marcos referenciales ofrecidos por la naturaleza, como una colina, o marcos producidos por la acción humana, como una casa. Sin embargo,

no consiguen hacer un mapa o un croquis que pueda mostrar, desde la perspectiva de tercera persona, dónde se encuentran y a dónde van.

En su texto, Giardino distingue varios niveles de conocimiento espacial. En el primer nivel estaría el reconocimiento de invariancias perceptivas en nuestro entorno. Ese sería el nivel de la cognición visuoespacial básica. Probablemente, este nivel de conocimiento, según la autora, esté presente en otros mamíferos. En un segundo nivel podemos desplazarnos en el espacio mediante el uso de marcos accesibles desde una perspectiva egocéntrica. En esta fase no podemos representar la localización de esos marcos entre sí ni en relación con nosotros. No se usan artefactos cognitivos. En un tercer nivel tenemos el uso de artefactos cognitivos. Pueden ser fugaces como los gestos o dotados de cierta permanencia como croquis y diagramas. Adoptamos en ese momento una perspectiva de tercera persona, no centrada en nuestro yo. El texto de Giardino no da una definición precisa de lo que es un artefacto cognitivo, se limita a presentar ejemplos de esa noción.

Manuel J. García-Pérez, historiador de la matemática y arqueólogo, es autor del tercer capítulo, el cual trata sobre los orígenes prehistóricos del conocimiento geométrico. Después de una introducción, el autor presenta un panorama de los estudios en prehistoria de la matemática. La opinión dominante es que, hasta el Neolítico, hubo poco progreso en nuestras concepciones de número y de relaciones y formas espaciales. En relación con la evolución de la concepción de número en la Prehistoria, los arqueólogos consideran los siguientes elementos: huellas de manos dejadas sobre el fondo de las cavernas, uso de cuentas y abalorios, marcas realizadas sobre huesos o piedras. Por su parte, el arqueólogo interesado en la evolución de nuestra concepción de formas y relaciones espaciales investiga la manufactura de herramientas líticas, el arte prehistórico y la organización territorial. El primer elemento muestra el grado de avance de las capacidades de memoria y percepción visual. Las investigaciones sobre el arte prehistórico buscan determinar su valor representacional. Finalmente, los monumentos megalíticos muestran la capacidad de nuestros ancestros de organizar el espacio a su alrededor. Algunos de esos monumentos están orientados respecto a regularidades astronómicas y otros con respecto a accidentes geográficos. García-Pérez hace algunas observaciones a los trabajos hechos en prehistoria de la geometría. En primer lugar, está la tentación de proyectar nuestros conocimientos matemáticos actuales sobre los vestigios del pasado. Podemos leer una terna de marcas como si fuese una secuencia de números cuadrados (4, 9, 16) cuando en realidad podría tratarse de

otra cosa. Es grande nuestra capacidad actual de encontrar patrones y simetrías, no siendo obvio que nuestros ancestros la poseyesen. Además, señala García-Pérez, varios trabajos no distinguen los tres niveles de nuestra cognición espacial que ya mencionamos, de forma tal que, más que de los orígenes prehistóricos de la geometría debería hablarse de los orígenes prehistóricos de la proto geometría. García-Pérez presenta cinco claves para la interpretación del conocimiento proto geométrico y la explicación de su formación. La primera de ellas es considerar el impacto de la cultura material sobre nuestra cognición. La segunda es pensar que la evolución biológica es tan importante como la evolución cultural. La tercera es analizar el material arqueológico de forma contextual y transculturalmente para no caer en los errores de la antropología evolucionista, que pensaba que hay una única línea de evolución cultural. La cuarta es considerar el impacto del uso de sistemas artificiales de memoria sobre nuestra evolución cognitiva. La quinta clave consiste en tomar en cuenta la acumulación cultural de las herramientas y de las prácticas asociadas a ellas. Finalmente, García-Pérez presenta elementos para entender las bases cognitivas y culturales del conocimiento proto geométrico en China durante el periodo Neolítico.

Entramos ahora en la segunda parte del libro cuyo título es *Escenas del desarrollo de la geometría*. Se inicia con el capítulo 4, de Javier Ordóñez y Ana Rioja, profesores de la Universidad Autónoma de Madrid y de la Universidad Complutense de Madrid, respectivamente. Su tema es la alianza incompleta entre astronomía y geometría en la Antigüedad clásica. El mérito de este capítulo reside en una exposición clara del problema que los astrónomos griegos querían resolver: describir el movimiento aparente de los planetas Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno, los únicos que pueden observarse a simple vista, sin telescopio. Las premisas usadas por los antiguos para resolver la cuestión eran: el Universo es esférico, la Tierra ocupa el centro de esa esfera y la descripción del movimiento de los astros debe darse en términos de movimientos circulares y uniformes. La astronomía griega era cinemática. No investigaba las causas del movimiento de los astros ni la composición de los mismos. Lo que los antiguos griegos observaban en el cielo eran las estrellas fijas, el Sol, la Luna y los cinco planetas mencionados. Las estrellas fijas, a saber, todas las estrellas que pueden observarse en el cielo del hemisferio norte, solamente con los ojos, sin ayuda de instrumentos de observación, eran llamadas así porque mostraban, para el observador, un movimiento circular uniforme en dirección este-oeste, conservando entre sí sus distancias recíprocas. Debido a la gran distancia que nos

separa de ellas, aparecen al observador como si todas estuvieran en el mismo plano. Los planetas —el adjetivo griego *πλανήτης* significa errante— mostraban un comportamiento anómalo, a veces cambiaban su dirección de su movimiento, otras parecían acelerarlo y, otras más, retardarlo. Los autores muestran las dos soluciones dadas en la geometría antigua al problema de la órbita anómala de los planetas: el sistema de esferas homocéntricas de Eudoxo y el sistema de Ptolomeo con sus círculos, a saber, deferentes, epiciclos, ecuantas, y otros que fueron propuestos. También explican por qué el modelo de Eudoxo fue dejado de lado en la Antigüedad tardía y en la Edad Media. Finalmente, se refieren a cómo la astronomía en la Edad Moderna abandonó varios de los supuestos de la astronomía griega: Copérnico dejó de lado la idea de que la Tierra era el centro de la esfera celeste, Kepler abandonó la órbita circular y propuso una órbita elíptica reinterpretando la uniformidad del movimiento de los planetas, no en el sentido de describir arcos iguales de circunferencia en tiempos iguales, sino en el de describir áreas iguales en tiempos iguales.

Abel Lassalle Casanave, profesor de la Universidad Federal de Bahía, Brasil, y José Seoane, profesor de la Universidad de la República, Uruguay, escribieron el quinto capítulo. Su tema es el papel inferencial de las nociones comunes 4 y 5 en los *Elementos* de Euclides. Euclides usa en esa obra la expresión “noción común” para referirse a lo que en posteriores ediciones de los *Elementos* se llamó “axiomas”. La noción común 4 afirma que las cosas que coinciden son iguales, y la noción común 5 sostiene que el todo es mayor que la parte. Euclides usa la noción común 4 en las pruebas por superposición, que, en la Edad Moderna, fueron criticadas por introducir un concepto físico, el de movimiento, dentro de la geometría. La noción común 5 se usa en las pruebas por reducción al absurdo. En las partes iniciales del capítulo, los autores resaltan la importancia, para los estudios contemporáneos sobre los *Elementos*, del trabajo de Vincenzo De Risi, “The Development of Euclidean Axiomatics” y del texto de Kenneth Manders, “The Euclidean Diagram”, el primero publicado en 2016, el segundo escrito en 1995. De Risi argumenta que en la transmisión de los *Elementos* por medio de sucesivas copias manuscritas fueron introducidas modificaciones en el número de principios (definiciones, postulados y axiomas). Es sabido, y De Risi lo muestra con detalle, que en la Edad Moderna circularon diversas versiones de los *Elementos*, cuyas divergencias residían en los axiomas admitidos. Manders, en el texto mencionado, argumenta, en concordancia con lo que está en el *Comentario al primer libro de los Elementos* de Proclo, que las pruebas de Euclides tienen un carácter heterogéneo. Reconocemos en

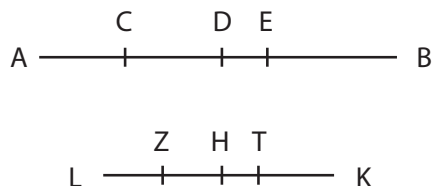
ellas una parte diagramática y otra parte textual que podemos llamar “lógica” y “lingüística”. En las pruebas, identificamos un vocabulario diagramático y un vocabulario teórico. Los diagramas euclidianos son aptos, según Manders, para expresar relaciones topológicas como la de parte/todo y la de intersección entre líneas, pero no lo serían para expresar relaciones métricas como la de igualdad. Apoyándose en esos dos trabajos, Lassalle Casanave y Seoane dan su interpretación del papel inferencial de la noción común 5: ella permite pasar de una premisa diagramática que expresa una relación parte/todo entre figuras a una conclusión, en el vocabulario teórico, que afirma que una figura es menor que otra. Para la interpretación del papel de la noción común 4, los autores establecen la distinción entre relaciones de igualdad locales y globales. Supongamos que tenemos un segmento AB y dentro de él consideremos un punto P. Entonces, la relación $AB=AP+PB$ es una relación local de igualdad. Ahora consideremos dos triángulos disjuntos como los dados en las premisas de la proposición I,4 de los *Elementos*. La relación de igualdad que es probada entre las bases de esos triángulos es una relación global. Según Lassalle Casanave y Seoane, la noción común 4 serviría para pasar de una premisa diagramática que muestra la coincidencia entre dos figuras a una conclusión expresada en el lenguaje teórico que afirma la igualdad (global) entre ellas. Argumentan que hubo una evolución en la transmisión y la interpretación de los *Elementos* en el sentido de decir, en términos de relaciones lógicas entre proposiciones, lo que Euclides mostraba con diagramas. De esa evolución es parte el uso inferencial de las nociones comunes 4 y 5, que podrían ser añadidas posteriores a Euclides. Esa hipótesis es plausible. Pues, en su *Comentario al libro I de los Elementos de Euclides*, Proclo, al ocuparse de esas nociones comunes, indica que Herón las dejó de lado. ¿Habría pensado Herón que los diagramas eran suficientes para mostrar relaciones de igualdad y desigualdad entre figuras geométricas?

El capítulo 6, “Demostraciones euclidianas con diagramas: sus bases cognitivas”, fue escrito por Tamires Dal Magro, investigadora de la Universidad Federal de Bahía, y por Manuel J. García-Pérez, autor a quien ya hemos presentado. Los autores defienden la necesidad del trabajo interdisciplinario entre filósofos, historiadores de la ciencia y psicólogos en un nuevo ramo de la ciencia cognitiva, la cognición geométrica, donde se estudia y analiza nuestra percepción y categorización de fenómenos espaciales. La cognición geométrica se ocuparía de la formación de los conceptos geométricos, de las relaciones que establecemos entre ellos y de las operaciones que efectuamos con

ellos. Vincular los conceptos de la geometría de Euclides y las distinciones hechas por Manders sobre las pruebas de los *Elementos* con la perspectiva de las ciencias cognitivas no es fácil. Pues, el enfoque de estas ciencias ha sido predominantemente biológico y/o computacional, mientras que la práctica geométrica es un fenómeno cultural. Las ciencias cognitivas tratan sobre los niveles de la cognición visuoespacial básica y sobre el conocimiento protogeométrico. Ahora bien, en relación con el conocimiento geométrico se plantea la cuestión de si podemos hacer abstracción de las características culturales de las comunidades en las que éste se desarrolló. Después de referirse al papel de los diagramas en la geometría de Euclides y de exponer la distinción de Manders entre informaciones diagramáticas exactas y coexactas, los autores proceden a citar tres series de experimentos. Los experimentos de la primera serie indicarían que, independientemente de la cultura y del nivel de escolaridad, los participantes reconocerían en un dibujo las líneas paralelas y los ángulos rectos. La segunda serie de experimentos no pregunta por la situación presente de los dibujos sino por su situación posible; por ejemplo, dadas dos líneas, se pregunta a los participantes si el dibujo puede completarse de forma tal que las líneas se intersecten. Nuevamente, parece que la capacidad de responder correctamente no depende ni de la cultura ni de la escolaridad. Finalmente, la tercera serie mostraría que no habría casi divergencia entre los participantes al identificar relaciones coexactas entre objetos geométricos, siendo por el contrario mayor las divergencias cuando se trata de relaciones exactas. De ahí concluyen los autores que esas distinciones de Manders entre dos tipos de relaciones tendrían una base empírica. Un defecto del texto es que cita trabajos que no aparecen en la bibliografía.

El autor del séptimo capítulo de la *Génesis de la geometría* es Mario Bacelar Valente. El capítulo, titulado la “Geometría del movimiento: de la Grecia antigua a Newton”, contrapone a una geometría estática, representada, según el autor, por los *Elementos* de Euclides, una geometría del movimiento que habría comenzado con Autólico de Pitane y Arquímedes. El movimiento casi no aparece en las demostraciones de los *Elementos*; se usa en las pruebas por superposición que, en esa obra, son sólo tres. En los *Elementos*, ni el tiempo ni la velocidad aparecen como magnitudes y no se les relaciona con el espacio. Eso concuerda con la concepción aristotélica expuesta en *Metafísica*, M 2–3, según la cual los entes matemáticos son inmóviles. Encontramos una concepción diferente en el tratado *Sobre la esfera en movimiento* de Autólico, quien vivió antes de Euclides. En ese texto, Autólico vincula tiempos con espacios recorridos. Afirma que,

si un punto se desplaza con velocidad uniforme a lo largo de cierta línea y si en ella consideramos dos líneas CD y DE, ellas tendrán entre sí la misma razón que los tiempos ZH y HT durante los cuales el punto las recorre.



CD será a DE como ZH a HT. Aquí tenemos algunos elementos de la geometría del movimiento. Se considera el tiempo como una magnitud. Por otro lado, se establece una proporción entre espacios recorridos y tiempos, pero el concepto “punto” es ambiguo, pues a veces se refiere a una entidad geométrica y, otras, denota un móvil en el espacio. Según Bacelar Valente, con Galileo la geometría del movimiento dio un paso más avanzado al considerar la velocidad como una magnitud. Hasta ese momento, el espacio y el tiempo se concebían como magnitudes heterogéneas que no pueden ser comparadas entre sí; entonces, no podía pensarse en una razón entre espacios y tiempos. En la proposición 2 de los *Discursos y demostraciones matemáticas en torno de dos nuevas ciencias*, Galileo afirma que, si un móvil pasa por dos espacios en tiempos iguales, esos espacios tendrán entre sí la misma proporción que las velocidades. Y si los espacios son como las velocidades, los tiempos serán iguales. Así, tiempo, espacio y velocidad pasaron a estar matemáticamente relacionados. El capítulo de Bacelar Valente concluye con un análisis del aporte de Newton a la geometría del movimiento. Para Newton, el lugar geométrico de un punto en movimiento es la línea, recta o curva, que ese punto describe en su movimiento. Además, Newton afirma que cualquier línea puede moverse de cualquier modo geométrico. Donde por “modo geométrico” entiende tal manera de moverse que cualquier posición de una línea que se mueva puede describirse geométricamente. Otro aspecto que Newton consideró es la noción de límite geométrico. Algunas demostraciones de la geometría del movimiento dependen de los límites y razones de cantidades evanescentes. En la geometría propuesta por Newton, los objetos cambian de forma continua; así, una curva se genera por el movimiento continuo de un punto. Por otro lado, Newton incorpora la idea de suma de cantidades y de

razones de cantidades que al tender a la igualdad se hacen finalmente iguales. La parte más interesante del texto de Bacelar Valente es aquella en la que expone la generalización que hace Newton de los resultados de Galileo.

El octavo capítulo, dedicado a los *Fundamentos de geometría* de David Hilbert, escrito por Eduardo N. Giovannini, profesor de la Universidad Nacional del Litoral, Argentina, muestra las diferencias entre la concepción axiomática de Euclides y la de Hilbert. Asimismo, el autor apunta cómo con esa obra avanzaron las investigaciones metateóricas sobre la independencia de los axiomas de una teoría deductiva y sobre la ausencia de contradicción entre ellos. Afirma Giovannini que Hilbert fundamentó de un modo riguroso sus teoremas, sin la ayuda de diagramas, separando los aspectos lógicos de la prueba de los aspectos intuitivos y espaciales. Al leer eso, sentimos la ausencia de un diálogo más estrecho con el contenido de los capítulos anteriores del libro que afirman que el método diagramático de Euclides es riguroso, regido por una disciplina diagramática. En este capítulo, los frecuentes errores de notación dificultan la lectura del lector no especializado. Un mérito del autor es mostrar cómo, para Hilbert, el método axiomático no era sólo un método de exposición de una teoría deductiva, sino también un método para obtener nuevos resultados.

La tercera parte del libro tiene por título *Reflexiones filosóficas*. El autor del primer capítulo, “Espacio, intuición y geometría euclidiana en Kant”, es Abel Lassalle Casanave, a quien ya presentamos anteriormente. Al inicio del texto encontramos un epígrafe del filósofo chileno Roberto Torretti, extraído de su obra sobre Kant, que ilustra bien el marco conceptual e histórico en el que Kant desarrolló su teoría sobre el espacio. Él pensaba que el espacio de nuestra experiencia, individual o colectiva, el espacio de la geometría y el espacio de la física newtoniana son uno y el mismo espacio. Lassalle Casanave analiza con profundidad los argumentos que Kant dio en la *Crítica de la razón pura*, en la estética trascendental, para probar el carácter intuitivo y *a priori* del espacio. También se detiene con cuidado en las reflexiones que Kant realizó de la doctrina trascendental del método, así como de la *Crítica de la razón pura*, donde buscó distinguir el método de la matemática del método de la metafísica. Haciendo uso de una cuidadosa argumentación, Lassalle Casanave critica algunas interpretaciones sobre Kant. Esas interpretaciones suponen erróneamente que la edición que Kant usaba de los *Elementos* coincidía en gran medida con la edición canónica de Heiberg, realizada a finales

del siglo XIX. En la época de Kant, circulaban muchas versiones de aquella obra de Euclides que incorporaban más axiomas de los que se encuentran en la edición de Heiberg. Empleando esos axiomas adicionales pueden probarse —usando los esquemas deductivos que en la época de Kant eran considerados válidos— proposiciones como la primera del libro I de los *Elementos*, cuya prueba se considera incompleta. No fue, entonces, la insuficiencia de un aparato lógico adecuado lo que llevó a Kant a sostener que la geometría se apoya en la intuición pura del espacio. Lassalle Casanave argumenta que esa tesis de Kant surgió a partir de la forma en la que el filósofo pensó la relación entre los conceptos geométricos y los principios básicos de esa ciencia y de su concepción de que las definiciones de las entidades geométricas básicas debían ser genéticas.

El siguiente capítulo está dedicado a Johann Lambert y el postulado de las paralelas de Euclides. Eduardo Dorrego López, investigador de la Universidad de Sevilla, da una contextualización y una exposición del texto *Teoría de las líneas paralelas* de Lambert. A la introducción le sigue una traducción de una parte del propio texto de Lambert, a partir del original alemán, realizada, también, por Dorrego López. Finalmente, tenemos un epílogo al texto de Lambert, escrito por José Ferreirós. Dorrego López muestra que Lambert comienza su trabajo sobre las paralelas en el punto en el que Girolamo Saccheri lo dejó. Saccheri había formulado tres hipótesis: HAA (hipótesis del ángulo agudo), HAR (hipótesis del ángulo recto), HAO (hipótesis del ángulo obtuso). La segunda de ellas equivale a la aceptación del postulado de las paralelas. Razonando a partir de HAO, Lambert llega a una contradicción con los resultados de la geometría euclidiana plana. Sin embargo, observa que, suponiendo HAO, la suma de los ángulos interiores de un triángulo resulta mayor que dos ángulos rectos y que el área de un triángulo es proporcional a la diferencia entre dicha suma y el número π . Esos resultados son válidos para los triángulos esféricos. Así, Lambert se vio llevado a pensar que la geometría divergente construida a partir de HAO debía tener su contrapartida en la geometría real de la esfera. Por otra parte, la geometría divergente basada en HAA muestra resultados análogos a la geometría basada en HAO, si en lugar de considerar una esfera de radio R , tomamos una esfera de radio imaginario R_i . Lambert obtiene muchos de los resultados de forma puramente formal, sin ayuda de diagramas, debido a la imposibilidad de representarnos visualmente la cosa misma sobre la cual estamos razonando. Esto se debe a que nuestra capacidad de visualización obedece más a la geometría euclidiana que a las otras.

El capítulo “Consideraciones sobre algunos objetos de la geometría elemental” está dedicado a una obra de Bernard Bolzano (1804). Sus autores son Elías Fuentes Guillén, investigador de la Academia de Ciencias de la República Checa y Davide Crippa, historiador de la matemática e investigador de la Universidad de Venecia. Después de referirse a las circunstancias que rodearon la redacción de ese texto por parte de Bolzano, los autores examinan su contenido. Destacan dos reglas metodológicas propuestas por Bolzano. La primera regla expresa un distanciamiento respecto de la concepción tradicional de la axiomática, pues Bolzano exige demostrar toda proposición, por obvio que parezca, hasta darse cuenta de que no se requiere una demostración y por qué. La segunda regla expresa lo que hoy llamamos el ideal de pureza de las demostraciones matemáticas, y consiste en que no se deben aceptar demostraciones que emplean conceptos ajenos a la proposición que se quiere demostrar, es decir, conceptos que están fuera del ámbito de esa proposición. El ejemplo más frecuente de violación al ideal de pureza se encontraba en aquellas demostraciones de verdades geométricas que usaban el concepto de movimiento. Como vimos, esa era una objeción que se había hecho a las pruebas por superposición de los *Elementos*. Como ya lo había señalado Arnauld en sus *Nuevos elementos de geometría*, Bolzano observa un gran desorden en la exposición euclidiana, en la cual se justifican construcciones sobre ángulos y rectas a partir de los resultados obtenidos sobre triángulos, siendo que el concepto de triángulo presupone el concepto de recta. Pero, a diferencia de Arnauld, Bolzano no asume como punto de partida la teoría sobre las razones y proporciones que Euclides expuso en el libro V de sus *Elementos*. Para Bolzano, el objeto más simple por el cual debe comenzar la geometría es el sistema de dos puntos, siendo el concepto de punto indefinible. Un sistema de dos puntos nos permite pensar la distancia entre ellos. Después de esto, Bolzano define los conceptos de dirección y, a partir de éstos, el concepto de ángulo. Caracterizó el ángulo como una cualidad, siendo un predicado de dos líneas rectas AB y AC que tienen en común uno de sus puntos extremos A. Ese predicado es compartido por cualquier otro sistema de dos líneas rectas, AD y AG, que son partes de AB y AC, respectivamente. Los dos autores de este capítulo no explican por qué ese predicado debería ser único. Cabe señalar que Bolzano, con su definición de ángulo, dio una solución a una cuestión planteada en el *Comentario* de Proclo, a saber, si el ángulo es una

cantidad, una cualidad o una relación. Euclides define ángulo como la inclinación de dos líneas. En los *Elementos*, proposición I,9, muestra cómo dividir un ángulo en dos. Claramente, lo que Euclides divide no es una inclinación, sino una superficie. Y, por otro lado, la definición euclidiana lleva a admitir como ángulo aquel formado por una tangente a una circunferencia y la propia circunferencia, ángulo que Euclides en el libro III, proposición 16 de los *Elementos*, demuestra que es menor que cualquier ángulo rectilíneo. Falta un comentario de los autores sobre la definición de Bolzano de línea recta como objeto que contiene todos y solamente aquellos puntos que yacen entre dos puntos. ¿En qué sentido esta definición sería mejor que la dada por Euclides? ¿No se aplicaría también a una línea curva? Sin embargo, la exposición de Fuentes Guillén y Crippa es atractiva porque invita al lector a leer el propio texto de Bolzano. Sin embargo, a veces quedan cosas sin explicar, por ejemplo, la disertación sobre la concepción de Bolzano en relación con la semejanza de triángulos. La última parte del texto está dedicada a la recepción de las *Consideraciones* de Bolzano por parte de los matemáticos de la época. Los autores ofrecen información interesante: el texto de Bolzano fue conocido por algunos miembros de la comunidad matemática de habla alemana y se escribieron tres reseñas sobre el mismo en revistas importantes.

El último capítulo, “Filosofía, geometría y experiencia: Riemann, Poincaré, Einstein”, es de María de Paz, profesora de la Universidad de Sevilla. A partir del surgimiento de las geometrías no euclidianas en el siglo XIX se planteó la cuestión sobre cuál sería la geometría del espacio físico. Se había roto la identificación entre el espacio físico, el espacio geométrico y el espacio de la percepción sensible presupuesta en las reflexiones kantianas sobre el espacio. En su memoria “Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría”, Riemann abordó ese problema. Este texto de Riemann tiene tres partes. La última de ellas trata sobre la relación entre la geometría y el mundo. Antes de discutir ese tema, Riemann caracteriza el concepto de magnitud de dimensión múltiple. Tradicionalmente se afirmaba que la geometría era la ciencia de las magnitudes. A una magnitud se asociaba una métrica. Para Riemann, una magnitud de dimensión múltiple es susceptible de diferentes relaciones métricas. El espacio euclidiano es un caso particular de una magnitud de tres dimensiones, aunque no es el único. Las proposiciones de la geometría no pueden, según Riemann, deducirse del concepto general de magnitud. Las propiedades por las cuales el espacio se distingue de cualquier magnitud imaginable de tres dimensiones no pueden deducirse más que

por la experiencia. Aunque eso pudiera llevar a creer que Riemann era un empirista que pensaba que las verdades de la geometría se infieren a partir de la experiencia, en verdad, como María de Paz señala, Riemann más que un empirista era partidario de lo que llamaríamos hoy una “concepción hipotético-deductiva”. Se asume como hipótesis que el espacio tenga tales y cuales propiedades y se aguarda a que la experiencia corrobore esa hipótesis. Surge, entonces, el problema de buscar los hechos más simples por medio de los cuales puedan establecerse las relaciones métricas del espacio. En su memoria, Riemann introduce los conceptos de variedad, elemento de línea y curvatura. No define explícitamente qué es una variedad, se limita a decir que se trata de un concepto más general que el de magnitud. Sin embargo, podemos dar ejemplos. Son variedades el espacio euclidiano de tres dimensiones, el espacio de la geometría elíptica, el espacio de la geometría hiperbólica. En principio, una variedad sólo tiene propiedades topológicas. Para expresar las longitudes, Riemann introduce el concepto de elemento de línea que es un diferencial. La métrica de una variedad puede cambiar de una zona a otra. Para expresar el modo en que se produce ese cambio, Riemann usa la noción de curvatura. Hay espacios de curvatura constante como el espacio euclidiano que tiene curvatura cero. La geometría hiperbólica tiene curvatura negativa y la elíptica curvatura positiva. María de Paz muestra cómo el enfoque de Riemann es más general que el de sus antecesores. Su tesis principal es que, al dejar de lado tanto las concepciones puramente apriorísticas como las empiristas, Riemann habría superado la dicotomía entre ciencias formales y ciencias empíricas.

En la segunda parte del texto, María de Paz aborda el convencionalismo de Poincaré. La autora se refiere a un convencionalismo sutil de Poincaré. No sería de una forma arbitraria que escogemos una geometría en lugar de otra. Tenemos en cuenta su simplicidad y su adaptación a la experiencia. Sabemos que Poincaré pensó que siempre conservaríamos la geometría euclidiana para la física, pero se equivocó.

En la tercera parte de su texto, María de Paz se ocupa de las concepciones de Einstein sobre geometría y experiencia, las cuales están reunidas en dos artículos del físico alemán que están traducidos al español: “Geometría y experiencia” y “Sobre el método de la física teórica”. Después de presentar cómo Einstein concibió el espacio y el tiempo en las teorías de la relatividad especial y general, la autora expone su tesis de que Einstein habría quedado más ligado a la oposición entre ciencias formales y ciencias empíricas que los otros dos

científicos de los que se ocupó previamente. Al tratar de la relación entre geometría y realidad, Einstein afirmó que las proposiciones de la matemática, en la medida en que se refieren a la realidad, no son seguras y, en la medida en que son seguras, no se refieren a la realidad. Si añadimos a los teoremas de la geometría euclidiana la proposición de que a dos puntos de un cuerpo rígido les corresponde siempre la misma distancia independientemente de las variaciones de posición de ese cuerpo, convertimos, entonces, los teoremas de la geometría de Euclides en proposiciones de la física referentes a los cuerpos rígidos. Después de agregar esa proposición, podemos preguntarnos por la verdad de las demás proposiciones geométricas. A diferencia de Poincaré, Einstein pensaba que el problema de si el continuo tiene una estructura euclidiana, riemanniana u otra de naturaleza distinta es una cuestión de física que ha de ser resuelta por la experiencia, y no una cuestión de convención elegida sobre la base de la conveniencia.

La génesis de la geometría es, al mismo tiempo, una obra profunda desde el punto de vista filosófico y un buen libro de divulgación científica. Tiene descuidos en la edición: omisión en la bibliografía de trabajos citados en los capítulos, errores de notación y referencias bibliográficas incompletas, pero eso no disminuye la gran calidad de la obra.

BIBLIOGRAFÍA

- Arnauld, Antoine, 2009, “Les Nouveaux éléments de Géométrie”, en Blaise Pascal, Antoine Arnauld y François de Nonancourt, *Géométries de Port Royal*, Honoré Champion, París.
- De Risi, Vincenzo, 2016, “The Development of Euclidean Axiomatics”, *Arch. Hist. Exact Sci.*, vol. 70, pp. 591–676.
- Einstein, Albert, 2002, *Mis ideas y opiniones*, Bon Ton, Barcelona.
- Euclides, 1956, *The Thirteen Books of The Elements*, trad. Thomas L. Heath, Dover, Nueva York, 3 vols.
- Mancosu, Paolo (comp.), 2008, *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford University Press, Oxford.
- Manders, Kenneth, 2008, “The Euclidean Diagram”, en Paolo Mancosu 2008, pp. 80–133.
- Poincaré, Henri, 2024, *A ciência e a hipótese*, trad. Anderson Nakano, Associação Filosófica Scientiae Studia, São Paulo.
- Proclo, 1970, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, trad. Glenn Morrow, Princeton University Press, Princeton.

- Riemann, Bernhard, 1989, “Sobre as hipóteses que servem de fundamento à Geometria”, *Cadernos de História e Filosofia da ciência*, trad. Normando Celso Fernandes e Dimas da Cruz Oliveira.
- Saccheri, Girolamo, 1920, *Euclides vindicatus*, trad. George Halsted, Open Court, Chicago.

JORGE ALBERTO MOLINA
Universidade Federal da Bahia
Faculdade de Filosofia e Ciências humanas
Brasil
molinaunisc@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-0727-324X>