



ARTÍCULO / ARTICLE

MODELO COMPATIBLE ALTURA - ÍNDICE DE SITIO PARA CUATRO ESPECIES DE PINO EN SANTIAGO PAPASQUIARO, DURANGO

COMPATIBLE HEIGHT AND SITE INDEX MODEL FOR FOUR PINE SPECIES IN SANTIAGO PAPASQUIARO, DURANGO

Albert Castillo López¹, Benedicto Vargas-Larreta², José Javier Corral Rivas³,
Juan Abel Nájera Luna², Francisco Cruz Cobos² y Francisco Javier Hernández²

RESUMEN

La productividad forestal es un concepto biológico que puede expresarse matemáticamente. En el presente estudio se describen modelos compatibles altura dominante - índice de sitio para *Pinus arizonica*, *P. durangensis*, *P. leiophylla* y *P. teocote* en la región de Santiago Papasquiaro, Durango, una de las zonas forestales más importantes de México. Los datos utilizados fueron obtenidos de análisis troncales de 202 árboles dominantes. Se ajustaron los modelos de Korf, Hossfeld y Bertalanffy-Richards, para lo cual se utilizó el método de Diferencias Algebraicas Generalizadas (GADA). La principal ventaja de este método es que depende de la calidad de estación y no de un parámetro de los modelos, con lo que las curvas obtenidas son polimórficas y con múltiples asíntotas. Durante el ajuste se modeló la estructura del error a través de un modelo autorregresivo de segundo orden para corregir la dependencia de datos longitudinales. Con base en los estadísticos de ajuste y el análisis gráfico, se recomienda el modelo de Bertalanffy-Richards para calificar la calidad de estación de las cuatro taxa. La ecuación de este modelo es polimórfica con múltiples asíntotas e invariante con respecto a la edad de referencia, además estima directamente la altura dominante y el índice de sitio a cualquier altura y edad. El uso de estas ecuaciones permitirá mejorar significativamente la estimación actual del potencial productivo de las especies estudiadas.

Palabras clave: Calidad de estación, diferencias algebraicas generalizadas, invarianza, modelo autorregresivo, productividad forestal, Santiago Papasquiaro.

ABSTRACT

Forest productivity is a biological concept that can be expressed mathematically. Compatible dominant height-site index models are of the most important forest zones of Mexico. The data used were obtained from the stem analyses of 202 dominant trees. Korf, Hossfeld and Bertalanffy-Richards models were adjusted by the method of Generalized Algebraic Differences (GADA). The principal advantage of this method is that it depends on the quality station more than one parameter of the models, so that the curves obtained are polymorphic and with multiple asymptotes. A second-order autoregressive error structure was used in the fitting process to correct the serial correlation of the longitudinal data. Based on the goodness of fit statistics and a graphical analysis, the Bertalanffy-Richards model is recommended to qualify the quality station of the four species. This equation is polymorphic with multiple asymptotes and base-age invariant, and also directly estimates the dominant height and the site index at any height and reference age. Using these equations will significantly improve the current estimate of the productive potential of the species studied.

Key words: Quality station, generalized algebraic difference, invariance, autoregressive model, forest productivity, Santiago Papasquiaro.

Fecha de recepción / date of receipt: 23 de febrero de 2012. Fecha de aceptación / date of acceptance: 19 de julio de 2013.

¹ Programa de Maestría en Ciencias. Instituto Tecnológico de El Salto (ITES).

² Instituto Tecnológico de El Salto. Correo e: bvargas@itelsalto.edu.mx

³ Facultad de Ciencias Forestales. Universidad Juárez del Estado de Durango.

INTRODUCCIÓN

La calidad de estación se define como el potencial de producción de madera de un rodal para una determinada especie o tipo de bosque (Clutter *et al.*, 1983), la que resulta de la interacción de un conjunto de factores biológicos, climáticos, topográficos y edáficos, que influyen en la capacidad productiva del mismo; la combinación de estos factores puede resultar favorable para el desarrollo de los árboles generando su máximo potencial de crecimiento.

El crecimiento y la producción de las masas forestales para una determinada especie dependen en gran medida de lo siguiente: (i) la edad de la masa o, en el caso de masas irregulares, la distribución de edades; (ii) la capacidad de producción innata del área que soporta la masa; (iii) el grado de utilización de esa capacidad productiva en el pasado y en el momento actual; y (iv) los tratamientos silvícolas aplicados (aclareos, podas y control de la vegetación competidora) (Clutter *et al.*, 1983). De lo anterior, el segundo componente corresponde a lo que generalmente se denomina "calidad de estación", la que puede describirse como la capacidad productiva de un área determinada para el crecimiento de árboles, y es la respuesta en el desarrollo de una determinada especie a la totalidad de las condiciones ambientales existentes en el mismo (Prodan *et al.*, 1997); esto es, la calidad de una estación forestal es su capacidad productiva, por lo que se puede considerar, entonces, como una propiedad inherente del terreno, crezcan o no árboles en un momento dado (Davis *et al.*, 2001).

La productividad forestal es un concepto biológico que puede expresarse matemáticamente. Es por ello que se ha optado por representar la calidad de sitio a través de un valor o índice el cual es una expresión cuantitativa de la calidad de sitio. En ese sentido, la utilización del crecimiento en altura de los árboles que viven en condiciones de poca competencia como indicador de la calidad de estación de un rodal forestal se justifica debido a que áreas de buena calidad de estación son también zonas de buenos crecimientos en altura para muchas especies. En otras palabras, para la mayoría de las especies la producción potencial en volumen y el crecimiento en altura están positivamente correlacionados (Diéguez-Aranda *et al.*, 2009). La utilidad práctica de dicha correlación proviene de la evidencia empírica que indica que el patrón de crecimiento en altura de los árboles de mayores dimensiones en masas regulares (correspondientes a las clases sociológicas dominante y codominante, y por tanto con poca competencia de los restantes árboles) está poco afectado por la densidad del rodal y por las cortas intermedias efectuadas, dentro de unos límites moderadamente amplios de espaciamiento, lo que depende de la especie (Clutter *et al.*, 1983). Por ello, las técnicas más habituales para estimar la calidad de estación de un rodal se basan en el análisis de la evolución de la altura media de los árboles dominantes con la edad, que se denomina altura dominante.



INTRODUCTION

Quality station is defined as the timber production potential of a stand for a particular species or forest type (Clutter *et al.*, 1983), which results from the interaction of a set of biological, climatic, topographic and soil, which influence the productive capacity of the same, the combination of these factors may be favorable for tree growth generating their maximum growth potential.

The growth and production of stands for a given species depends largely on the following: (i) the age of the body or, in the case of irregular masses, age distribution, (ii) production capacity innate mass bearing area, (iii) the degree of productive capacity utilization in the past and at the present time, and (iv) the silvicultural treatments (thinning, pruning and competing vegetation control) (Clutter *et al.*, 1983). From the above, the second component corresponds to what is often called "quality station", which can be described as the productive capacity of a given area for the growth of trees, and is the response in the development of a particular species all the environmental conditions existing therein (Prodan *et al.*, 1997), that is, the quality of a forest station is their production capacity, so can be considered, then, as an inherent property of the ground, grow or trees in a given time (Davis *et al.*, 2001).

Forest productivity is a biological concept that can be expressed mathematically. That is why it was decided to represent quality station through a value or index which is a quantitative expression of quality station. In that sense, the use of height growth of trees living in low competition as an indicator of quality station of a forest stand is justified because good quality areas are also station areas of good growth in height for many species. In other words, for most species, the potential volume production and height growth are positively correlated (Diéguez-Aranda *et al.*, 2009). The practical utility of this correlation comes from the empirical evidence that indicates that the pattern of growth in height of the larger trees in regular masses (corresponding to the dominant and co-dominant sociological classes, and therefore with little competition from the rest of the trees) is little affected by stand density and intermediate cuttings carried out within moderately wide limits spacing, which depends on the species (Clutter *et al.*, 1983). Therefore, the most common techniques for estimating the quality of a stand station based on the analysis of the evolution of the average height of dominant trees with age, height called dominant.

Almost every site index curves recently published especially developed using the methodology of algebraic differential equations (ADA for its acronym in English) (Bailey and Clutter, 1974) or its generalization (GADA for its acronym in English) (Cieszewski and Bailey, 2000). The main limitation of the ADA methodology is that most of the derived models are anamorphic or have a common asymptote (Bailey and Clutter, 1974; Cieszewski and Bailey, 2000), while its generalization can be obtained with families which are both, polymorphic and multiple asymptotes (Cieszewski, 2002).

Casi todas las curvas de índice de sitio publicadas recientemente se han desarrollado utilizando, en especial, la metodología de ecuaciones en diferencias algebraicas (ADA por sus siglas en inglés) (Bailey y Clutter, 1974) o su generalización (GADA por sus siglas en inglés) (Cieszewski y Bailey, 2000). La principal limitación de la metodología ADA es que la mayoría de los modelos derivados son anamórficos o tienen una asíntota común (Bailey y Clutter, 1974; Cieszewski y Bailey, 2000), mientras que con su generalización pueden obtenerse familias que sean a la vez polimórficas y con múltiples asíntotas (Cieszewski, 2002).

Dado que en la región forestal de Santiago Papasquiaro, Durango, no se cuenta con ecuaciones de índice de sitio validadas científicamente, el objetivo de este trabajo fue construir curvas de calidad de estación para *Pinus arizonica* Engelm., *P. durangensis* Martínez, *P. leiophylla* Schiede ex Schltdl. & Cham. y *P. teocote* Schiede ex Schltdl. & Cham., mediante el Método de Diferencias Algebraicas Generalizado.

MATERIALES Y MÉTODOS

Área de estudio

El estudio se llevó a cabo en la región forestal de Santiago Papasquiaro, ubicada al noroeste del estado de Durango, y que abarca 628 000 ha, aproximadamente. Se localiza a los 24°52'22" de latitud norte y los 106°03'46" de longitud oeste (Figura 1). La altitud varía entre 2 400 y 3 000 m. La temperatura media anual oscila de los 12 - 21 °C, mientras que la precipitación promedio anual alcanza de los 800 hasta los 1 200 mm (UAFSP, 2010).

Datos

Se utilizaron pares de datos altura dominante-edad procedentes del análisis troncal de 202 árboles dominantes de todas las calidades de estación, y distribuidos de la siguiente manera: 46 árboles de *Pinus arizonica*, 73 de *P. durangensis*, 29 de *P. leiophylla* y 54 de *P. teocote*. Los árboles fueron derribados a una altura del tocón de 0.3 m, que posteriormente fueron seccionados a la altura del diámetro normal (1.3 m) y a intervalos de alturas variables (de 1 a 2.5 m) a partir de los 1.3 m. La edad de cada sección y alturas verdaderas fueron determinadas por medio del algoritmo de Fabbio *et al.* (1994). El valor máximo, mínimo y medio, así como la desviación estándar de la altura total y la edad de los árboles muestra se presentan en el Cuadro 1, donde N, Media, Min, Max y Desv. est., son el número de pares de datos de altura-edad, los valores medio, mínimo y máximo y la desviación estándar, respectivamente.



Since in the forest region of Santiago Papasquiaro, Durango, there are no site index equations scientifically validated, the aim of this work was to build quality station curves for *Pinus arizonica* Engelm., *P. durangensis* Martínez, *P. leiophylla* Schiede ex Schltdl. & Cham., and *P. teocote* Schiede ex Schltdl. & Cham., using the Generalized Algebraic Difference Method.

MATERIALS AND METHODS

Study area

The study was conducted in the forest region of Santiago Papasquiaro, located at the northwest of the state of Durango, which covers around 628 000 ha. It is located between 24°52'22" north and 106°03'46" west (Figure 1). Altitude varies from 2 400 to 3 000 m. The average annual temperature ranges between 12 and 21 °C, while the average annual precipitation reaches 800 to 1 200 mm, UAFSP (2010).

Data

Pairs of dominant height-age data were used, from the stem analysis of 202 dominant trees of all site qualities, and distributed as follows: 46 trees of *Pinus arizonica*, 73 *P. durangensis*, 29 *P. leiophylla* and 54 *P. teocote*. Trees were felled to a stump height of 0.3 m, which were subsequently sectioned at the level of the normal diameter (1.3 m) and heights at varying intervals (1 to 2.5 m) from 1.3 m. The age of each section and real heights were determined by using the algorithm of Fabio *et al.* (1994). The maximum, minimum and average value as well as the standard deviation of the total height and age of sample trees are presented in Table 1, where N, Mean, Min, Max and Standard Deviation are the number of data pairs of age-height, the mean, minimum and maximum values and the standard deviation, respectively.

Estimate of real heights

The height of each cutting section overestimates the actual height that the tree had at the age indicated by the section as the cross section in the log seldom coincides with the beginning of a year, by introducing a bias in subsequent calculations (Dyer and Bailey, 1987; Fabio *et al.*, 1994).

To solve this problem it is advisable to use the Carmean algorithm (1972) and the amendment proposed by Newberry (1991) for the end log, methodologies that have accomplished the best results when calculating the true heights (Dyer and Bailey, 1987; Fabio *et al.*, 1994). This method is based on two assumptions: a) tree grows at a constant rate between two sections, and b) the cut is made, on average, in the center of the growth in height of one year. The equation used to calculate the true height varies with the part of the tree (equations 1, 2 and 3).

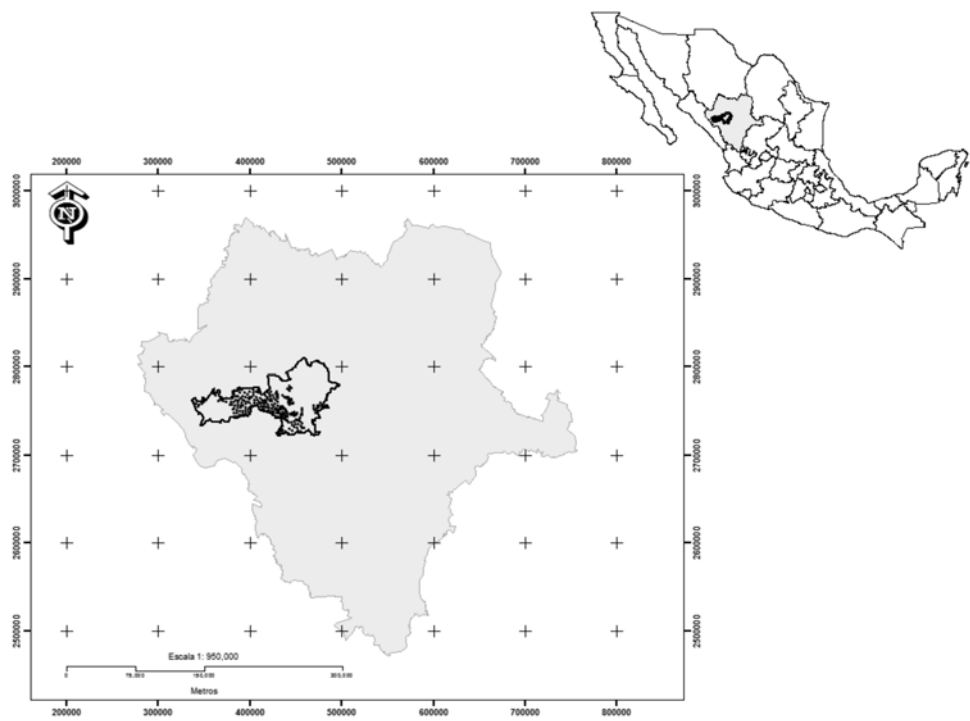


Figura 1. Localización geográfica del área de estudio.
Figure 1. Geographical location of the study area.

Cuadro 1. Estadísticos descriptivos de las variables medidas en las especies evaluadas.
Table 1. Descriptive statistics of the variables measured in the species tested.

Especie	N	Edad				Desv. est.	Altura				
		Media	Min	Max			N	Media	Min	Max	Desv. est.
<i>Pinus arizonica</i> Engelm.	685	37.9	3	139		26.6	685	9.42	0.04	30.51	7.14
<i>Pinus durangensis</i> Martínez	939	41.4	3	186		32.9	939	8.30	0.06	26.50	6.39
<i>Pinua teocote</i> Schiede ex Schltdl. & Cham.	637	36.3	3	152		26.6	637	7.74	0.09	26.60	6.00
<i>Pinus leiophylla</i> Schiede ex Schltdl. & Cham.	426	45.2	3	170		33.3	426	9.05	0.08	27.55	6.84

Estimación de las alturas verdaderas

La altura de cada sección de corta sobrestima la altura real que el árbol tenía a la edad que indica la sección, ya que la sección de corte en la troza rara vez coincide con el comienzo de un año, introduciendo un sesgo en los cálculos posteriores (Dyer y Bailey, 1987; Fabio *et al.*, 1994).

Para solucionar este inconveniente se utilizaron el algoritmo de Carmean (1972) y la modificación propuesta por Newberry (1991) para la troza final, metodologías que han presentado los mejores resultados para calcular las alturas verdaderas (Dyer y Bailey, 1987; Fabio *et al.*, 1994). Este método se basa en dos supuestos: a) el árbol crece a un ritmo constante entre dos secciones, y b) el corte se realiza, como media, en el centro del

Where:

- H_1 and H_2 = Heights of the lower and upper sections of the log
- N_1 and N_2 = Number of rings of the lower and upper section of the log
- N_0 = Age of the tree, that is, the number of rings of the stump (in the stump $N_0 = N_1$)
- T_0 = Age of the tree when it reached the $H1$ height, that is $N_0 - N_1$
- T = The whole number 1 to $N_1 - N_2$

Analyzed models

In this study, three models were fitted in the GADA format widely used to describe growth in terms of dominant height in relation to

crecimiento en altura de un año. La ecuación empleada para calcular la altura verdadera varía según la parte del árbol (ecuaciones 1, 2 y 3).

$$\text{Tocón: } H_T = T \left(\frac{H_2}{N_1 - N_2 + 0.5} \right) \quad (1)$$

$$\text{Troza: } H_{T_0+T} = H_1 + \left[\left(\frac{H_2 + H_1}{2 \cdot (N_1 - N_2)} \right) + (T-1) \cdot \left(\frac{H_2 + H_1}{(N_1 - N_2)} \right) \right] \quad (2)$$

$$\text{Punta: } H_{T_0+T} = H_1 + \left(\frac{H_2 + H_1}{2 \cdot (N_1 - 0.5)} \right) + (T-1) \cdot \left(\frac{H_2 + H_1}{(N_1 - 0.5)} \right) \quad (3)$$

Donde:

H_1 y H_2 = Alturas de las secciones inferior y superior de la troza

N_1 y N_2 = Número de anillos de las secciones inferior y superior de la troza

N_0 = Edad del árbol, es decir el número de anillos del tocón (en el tocón $N_0 = N_1$)

T_0 = Edad del árbol cuando alcanzó la altura H_1 , es decir $N_0 - N_1$

T = Número entero de 1 a $N_1 - N_2$

Modelos analizados

En el presente estudio se ajustaron tres modelos en forma GADA ampliamente utilizados para describir el crecimiento en altura dominante con relación a la edad: Korf, Hossfeld y Bertalanffy-Richards (Barrio *et al.*, 2006; Castedo *et al.*, 2007; Vargas-Larreta *et al.*, 2010). La expresión de los modelos base así como su formulación GADA se presentan en el Cuadro 2.

Descripción de la metodología GADA

Muchos modelos que describen la relación altura dominante-edad están expresados en forma de diferencias algebraicas (ADA), metodología introducida en el campo forestal por Bailey y Clutter (1974). Estas se fundamentan en el hecho de poder modelar el crecimiento de una determinada variable con una familia de curvas originadas por una ecuación base cuya forma es $Y=f(t)$ con todos los parámetros comunes excepto uno, que es un parámetro específico del sitio forestal, de forma que se podrían obtener para cada modelo base, diferentes ecuaciones según sea el número de parámetros que este contenga.

age: Korf, Hossfeld and Bertalanffy-Richards (Barrio *et al.*, 2006; Castedo *et al.*, 2007; Vargas-Larreta *et al.*, 2010). The expression of the base models and their GADA formulation are presented in Table 2.

Where:

Y = Dominant height (m)

t_{10} = Reference age or basic age (years)

a_i = Parameters in the basic equation

b_i = Global parameters in the dynamic equation GADA (formulation)

GADA methodology description

Many models describing the dominant height-age relationship are expressed as algebraic differences (ADA) methodology introduced in forestry by Bailey and Clutter (1974). These are based on being able to model the growth of a given variable with a family of curves based originated by an equation whose form is $Y = f(t)$ with all common parameters except one, which is a specific parameter of the forest site, in such a way that different equations could be obtained for each base model, depending on the number of parameters contained therein.

For most base models, only one of the parameters to be estimated a_i , ..., depends directly on the forest site conditions are common and the rest, which gives rise to two types of quality curves in depending on the nature of high-aging curves generated: i) anamorphic several asymptotes and ii) a single polymorphic asymptote. In many cases, the methodology ADA may be sufficient to model dominant height in relation to the age of a particular species. Sometimes it is necessary to generate a family of curves with multiple asymptotes polymorphic, so Cieszewski and Bailey (2000) proposed a generalization of this approach which they called method generalized algebraic difference equations (Generalized Algebraic Difference Approach, GADA), which allows that more than one parameter of a model depends on the quality station.

The first step of the GADA method is to select a basis equation and identify the parameters therein which are desired to be site specific. Then, it must be explicitly defined how these parameters change between different sites by replacing them with explicit functions of X (the independent variable describing hidden site productivity as a result of management practices, soil conditions and ecological factors and climate) and new parameters. Thus, the bi-dimensional basic equation initially selected ($Y = f(t)$) is expanded into a three dimensional equation ($Y = f(t, X)$) which discloses both transverse and longitudinal change with two independent variables (X, t). Because X cannot be measured accurately and even cannot be defined in functional terms, the last step of the GADA methodology consists of replacing X by equivalent conditions to the initial which represent specific observations of the two observable variables t and Y (e. g. t_0, Y_0), so that the model can be defined implicitly (e. g. $Y = f(t, t_0, Y_0)$) (Cieszewski and



Cuadro 2. Modelos base y su correspondiente formulación GADA ajustados en este estudio.

Table 2. Basic models and its corresponding fitted GADA formulation in this study.

Ecuación base	Parámetros relacionados al sitio	Solución para X con valores iniciales ()	Ecuación dinámica
Korf: $Y = a_1 e^{-a_2 t^{a_3}}$	$a_1 = e^X$ $a_2 = (b_1 + b_2)/X$	$X_0 = \frac{1}{2} t_0^{-b_3} \left\{ b_1 + t_0^{-b_3} \ln(Y_0) + \sqrt{4b_2 t_0^{-b_3} + [-b_1 - t_0^{-b_3} \ln(Y_0)]^2} \right\}$	$Y = e^{X_0} e^{\left(\frac{b_1 + b_2}{X_0} \right)^{b_3}}$
Hossfeld: $Y = \frac{a_1}{1 + a_2 t^{a_3}}$	$a_1 = b_1 + X$ $a_2 = b_2/X$	$X_0 = \frac{1}{2} \left[Y_0 - b_1 + \sqrt{(Y_0 - b_1)^2 + 4b_2 Y_0 t_0^{-b_3}} \right]$	$Y = \frac{b_1 + X_0}{1 + b_2/X_0 t_0^{-b_3}}$
Bertalanffy -Richards: $Y = a_1 [1 - e^{-a_2 t}]^{a_3}$	$a_1 = e^X$ $a_3 = b_2 + b_3/X$	$X_0 = \frac{1}{2} \left[\ln Y_0 - b_2 L_0 + \sqrt{(\ln Y_0 - b_2 L_0)^2 - 4b_3 L_0} \right]$ donde: $L_0 = \ln [1 - e^{-b_1 t_0}]$	$Y = Y_0 \left(\frac{1 - e^{-b_1 t}}{1 - e^{-b_1 t_0}} \right)^{b_2 + b_3/X_0}$

Donde:

- Y = Altura dominante (m),
- t_i = Edad de referencia o edad base (años),
- a_i = Parámetros en la ecuación base,
- b_i = Parámetros globales en la ecuación dinámica (formulación GADA).

Para la mayoría de los modelos base, solamente uno de los parámetros que se va a estimar $a_1, \dots, a_n$ depende directamente de las condiciones del sitio forestal y el resto son comunes, lo que da lugar a dos tipos de curvas de calidad, en función de la naturaleza de las curvas altura-edad que generan: i) anamórficas con varias asíntotas y, ii) polimórficas con una única asíntota. En muchos casos, la metodología ADA puede ser suficiente para modelar la altura dominante con relación a la edad de una especie en particular. En otras ocasiones es necesario generar una familia de curvas polimórficas con múltiples asíntotas, por lo que Cieszewski y Bailey (2000) propusieron una generalización de esta metodología a la cual llamaron método de ecuaciones en diferencias algebraicas generalizado (Generalized Algebraic Difference Approach, GADA), la cual permite que más de un parámetro de un modelo dependa de la calidad de estación.

El primer paso de la metodología GADA es seleccionar una ecuación base e identificar en ella los parámetros que se desea sean específicos del sitio. A continuación, debe definirse de forma explícita cómo cambian dichos parámetros entre las diferentes estaciones reemplazándolos con funciones explícitas de X (una variable independiente oculta que describe la productividad del sitio como resultado de las prácticas de manejo, las condiciones del suelo y los factores ecológicos y climáticos) y nuevos parámetros

Bailey, 2000; Cieszewski, 2002). During this process redundant parameters are often eliminated, from which a model is obtained with a number of parameters less than or equal to that of the original base equation.

Fitting methods

The fitting procedure for the estimation of the parameters was the nested iterative procedure (Cieszewski, 2003) which is an invariant method with respect to the reference age, which has been used in other studies (Vargas-Larreta *et al.*, 2010). This method estimates the site-specific effects and assumes that the data always contain measurement errors and random errors, which must be modeled (Diéguez-Aranda *et al.*, 2005).

The procedure begins with the estimation of global parameters (b_1, b_2 and b_3 in the dynamic equations of Table 2), considering the local parameter as a constant (H_0), which varies for each tree and that, initially, is assigned the average height observed at a given base age as a value. In the second step, the estimated values of the global parameters are constants and the local parameter (H_0) is estimated for each tree. Afterwards, the estimated value for each tree of the local parameter is taken as a constant and model is fitted to estimate global parameters again. This procedure is repeated successively until the global parameters are stabilized using as criterion that the reduction of the mean square error of the model between two or more consecutive iterations is less than 0.0001 (Larreta Vargas *et al.*, 2010).



De este modo, la ecuación base bidimensional inicialmente seleccionada ($Y=f(t)$) se expande en una ecuación tridimensional ($Y=f(t,X)$) que describe tanto cambios transversales como longitudinales con dos variables independientes (t y X). Debido a que X no se puede medir con precisión e incluso no se puede definir en términos funcionales, el último paso de la metodología GADA consiste en sustituir X por condiciones iniciales equivalentes que representan observaciones puntuales de las dos variables observables t e Y (e. g. t_0, Y_0), de manera que el modelo se pueda definir implícitamente (e. g. $Y=f(t, t_0, Y_0)$) (Cieszewski y Bailey, 2000; Cieszewski, 2002). Durante este proceso a menudo se eliminan parámetros redundantes, de lo que se obtiene un modelo con un número de parámetros menor o igual al de la ecuación base original.

Métodos de ajuste

El procedimiento de ajuste para la estimación de los parámetros fue el denominado método iterativo (*nested iterative procedure*) (Cieszewski, 2003) que es un método invariante con respecto a la edad de referencia, el cual ha sido utilizado en otros estudios (Vargas-Larreta *et al.*, 2010). Este método estima los efectos específicos del sitio y asume que los datos siempre contienen errores de medición y errores aleatorios, los cuales deben ser modelados (Diéguez-Aranda *et al.*, 2005).

Este proceso comienza con la estimación de los parámetros globales (b_1, b_2 y b_3 en las ecuaciones dinámicas del Cuadro 2), que considera constante el parámetro local (H_0), mismo que varía para cada árbol y al que, en principio, se le asigna como valor, la altura media observada a una edad base determinada. En el segundo paso los valores estimados de los parámetros globales también se toman como constantes y el parámetro local (H_0) se estima para cada árbol, y se ajusta una vez más el modelo empleando como valor inicial para los parámetros locales la altura observada a la mitad de la edad del árbol. Posteriormente, el valor estimado para cada árbol del parámetro local es una constante y se ajusta el modelo para estimar de nuevo los parámetros globales. Este procedimiento se repite sucesivamente hasta que los parámetros globales se estabilizan utilizando como criterio que la reducción del error medio cuadrático del modelo entre dos o más iteraciones consecutivas sea menor de 0.0001 (Vargas-Larreta *et al.*, 2010).

Análisis estadístico

En el análisis de ecuaciones de regresión que describen el comportamiento de individuos a lo largo del tiempo (datos longitudinales) es frecuente que los errores no sean independientes (presencia de autocorrelación). La autocorrelación conlleva a estimaciones sesgadas de los errores estándar asociados a los parámetros, lo que invalida los procedimientos de contraste de hipótesis y de estimación de intervalos de confianza de las estimaciones de los parámetros.

Statistical analysis

In the analysis of regression equations that describe the behavior of individuals over time (longitudinal data) it is common that errors are not independent (presence of autocorrelation). Autocorrelation leads to biased estimates of the standard errors associated with the parameters, which invalidates the hypothesis testing procedures and the estimation of the confidence interval of the parameter estimates. In this work an autoregressive model (CAR (x)) was used to correct the inherent dependence of the longitudinal data that were used (Gregoire *et al.*, 1995). According to Zimmerman and Núñez-Antón (2001), in an x order autoregressive structure (CAR (x)) the error term is expanded as:

$$H_{ij} = f(H_j, t_i, t_j, \beta) + e_{ij} \quad e_{ij} = \sum_{k=1}^{k=x} I_k \rho_k^{h_{ij}-h_{ij-k}} e_{ij-k} + \varepsilon_{ij} \quad (7)$$

Where:

- H_{ij} = Prediction of the height by using H_j (j height), t_i (i age) and t_j ($j \neq i$ aged) as predictive variables
- β = Vector of the parameters to be estimated
- e_{ij} = i - e^{th} Residual of the i - e^{th} individual
- e_{ij-k} = j - k - e^{th} residual del j - e^{th} individual
- $I_k = 1$ when $j > k$ and 0 when $j < k$,
- ρ_k = Continuous autorregressive parameter of the k order to be estimated, and $h_{ij}-h_{ij-k}$ is the distance of the j - e^{th} to the j - k - e^{th} observation in each i tree árbol, with $h_{ij} > h_{ij-k}$.
- ε_{ij} = Term of the error, independent now and with the zero normal mean distribution

The simultaneous fit of the growth equation and structure of the error, given by the autoregressive model, the procedure was performed by using the MODEL procedure of the SAS statistical package / ETSTM (SAS Institute Inc, 2004), which allows a dynamic update of the waste .

Selecting the best model

The analysis of the fitting ability of the models was based on numerical and graphic comparisons. The following statistics were calculated: the root of the mean quadratic error (REMC for its acronym in Spanish) and the determination coefficient for non-linear regression (R^2). Even if there are some objections related to the use of R^2 in non-linear regression, the general usefulness of some global measure of the predictive ability of the model seems to eliminate some of these limitations (Ryan, 1997). The expression of such statistics is the following:

$$REMC = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - p}} \quad (8)$$

En este trabajo se utilizó un modelo autorregresivo (CAR(x)) para corregir la dependencia inherente a los datos longitudinales empleados (Gregoire *et al.*, 1995). De acuerdo a Zimmerman y Núñez-Antón (2001), en una estructura autorregresiva de orden x (CAR(x)) el término de error se expande como:

$$H_{ij} = f(H_j, t_i, t_j, \beta) + e_{ij} \quad e_{ij} = \sum_{k=1}^{k=\infty} I_k \rho_k^{h_{ij}-h_{ij-k}} e_{ij-k} + \varepsilon_{ij} \quad (7)$$

Donde:

H_{ij} = Predicción de la altura utilizando H_i (altura i), t_i (edad i), y t_j (edad $j \neq i$) como variable predictoras
 β = Vector de parámetros a estimar
 e_{ij} = j -ésimo residuo del i -ésimo individuo
 e_{ij-k} = $j-k$ -ésimo residuo del i -ésimo individuo
 $I_k = 1$ cuando $j > k$ y 0 cuando $j < k$,
 ρ_k = Parámetro autorregresivo continuo de orden k a ser estimado, y $h_{ij}-h_{ij-k}$ es la distancia de la j -ésima a la $j-k$ -ésima observación en cada árbol i , con $h_{ij} > h_{ij-k}$
 ε_{ij} = Término del error, ahora independiente y con distribución normal de media cero.

El ajuste simultáneo de la ecuación de crecimiento y de la estructura del error dada por el modelo autorregresivo, se realizó con el procedimiento MODEL del paquete estadístico SAS/ETS™ (SAS Institute Inc., 2004), que permite una actualización dinámica de los residuos.

Selección del mejor modelo

El análisis de la capacidad de ajuste de los modelos se basó en comparaciones numéricas y gráficas. Se calcularon los siguientes estadísticos: la raíz del error medio cuadrático (REMC) y el coeficiente de determinación para regresión no lineal (R^2). Aunque existen varias objeciones relacionadas con el uso de la R^2 en regresión no lineal, la utilidad general de una medida global de la capacidad predictiva del modelo parece anular algunas de esas limitaciones (Ryan, 1997). La expresión de estos estadísticos es la siguiente:

$$REMC = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - p}} \quad (8)$$

$$R^2 = r_{Y_i \hat{Y}_i}^2 \quad (9)$$

Donde:

Y_i e $\hat{Y}_i$ = Valores observado, estimado y promedio de la variable dependiente,

$$R^2 = r_{Y_i \hat{Y}_i}^2 \quad (9)$$

Where:

Y_i and $\hat{Y}_i$ = Observed, estimated and average values of the dependent variable

$Y_i \hat{Y}_i$ = Total number of observations used to fit the model

p = Number of the parameters to be estimated

$r_{Y_i \hat{Y}_i}^2$ = Correlation coefficient between Y_i and $\hat{Y}_i$

Among the various available graphic methods to evaluate the goodness of fit of the models, the following were used: i) the fitted curves overlap the trajectories of the heights observed over time, ii) representation of residuals versus the values predicted by the model and iii) representation of the residuals against residuals with different delays to prove the correction of the autocorrelation of the errors by means of modeling the structure of the error.

RESULTS AND DISCUSSION

Structure of the data mean

In Figure 2 are shown the growth trajectories in heights that come from the stem analysis and the real structure of the mean for each one of the species that were studied. In general terms, a fall of the mean around 100 years occurred, even though for most of the species a fall was observed between 60 and 80 years old, which means a lack of information for the best site qualities. The representation of the real structure of the mean is important because one of this falls might have an impact in the quality of fit from a lack of data of these ages (Álvarez-González *et al.*, 2005).

Selecting the best mode

To detect autocorrelation problems between residues of the same tree, models 4, 5 and 6 were fitted (Table 2) regardless of the structure parameters of the error autocorrelation (P_i). Table 3 presents the parameter estimates and goodness of fit statistics obtained from the fit of the three base models without considering the structure of the error for each of the species.

The average errors (IR) obtained with the model of Korf for all species ranged from 0.77 (*P. teocote*) to 0.99 m (*P. arizonica*) (Table 3); it is worth noting that equations 5 and 6 showed similar IR values. For all of the species, the three models explained more than 94% of the variance in dominant height growth in terms of age, excelling in all cases Korf model (equation 4), with values greater than 0.98 R^2 , except for *P. leiophylla*, this model is the one with the best fittings, although the difference with the best for this species (equation 5) was minimal.

$Y_i \hat{Y}_i$ = Número total de observaciones utilizadas para ajustar el modelo
 p = Número de parámetros a estimar y
 $r_{Y_i \hat{Y}_i}^2 = r_{Y_i \hat{Y}_i}^2$ = Coeficiente de correlación entre Y_i e $\hat{Y}_i$

Entre los diferentes métodos gráficos disponibles para la evaluación de la bondad de ajuste de los modelos se emplearon los siguientes: i) superposición de las curvas ajustadas sobre las trayectorias de las alturas observadas a lo largo del tiempo, ii) representación de los residuos frente a los valores predichos por el modelo, y iii) representación de los residuos frente a residuos con diferentes retrasos para comprobar la corrección de la autocorrelación de los errores mediante la modelización de la estructura del error.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Estructura de la media de los datos

En la Figura 2 se presentan las trayectorias de crecimiento en altura provenientes de los análisis troncales y la estructura real de la media para cada una de las especies estudiadas. En general, existió una caída de la media en torno a los 100 años, aunque para la mayoría de las especies se observó entre 60 y 80 años, lo que indica una falta de información en las mejores calidades de estación. La representación de la estructura real de la media es importante porque una caída de estas puede tener efecto en la calidad de los ajustes debido a la falta de datos en esas edades (Álvarez-González *et al.*, 2005).

Selección del mejor modelo

Para detectar problemas de autocorrelación entre los residuos de un mismo árbol se realizó el ajuste de los modelos 4, 5 y 6 (Cuadro 2) sin tener en cuenta los parámetros de la estructura de autocorrelación del error (P_i). El Cuadro 3 presenta las estimaciones de los parámetros y los estadísticos de bondad de ajuste obtenidos en el ajuste de los tres modelos base, sin considerar la estructura del error para cada una de las especies.

Los errores medios (REMC) obtenidos con el modelo de Korf para todas las especies osciló entre 0.77 (*P. teocote*) y 0.99 m (*P. arizonica*) (Cuadro 3), destacando que las ecuaciones 5 y 6 presentaron valores de REMC similares. Para todas las especies los tres modelos explicaron más del 94% de la varianza del crecimiento en altura dominante en función de la edad, destacando en todos los casos el modelo de Korf (ecuación 4), con valores de R^2 mayores de 0.98; excepto para *P. leiophylla*, este modelo fue el que presentó los mejores ajustes, aunque la diferencia con el mejor para esta especie (ecuación 5) fue mínima.

Pinus teocote showed good adjustments for the three equations, however, the parameter b_1 of the Korf model (equation 4) was non-significant, a situation that also occurred to *P. leiophylla*, for which, despite having high fit statistics, parameter b_2 Korf models (Equation 4) and Bertalanffy-Richards (Equation 6) were not significant at the 1%.

Since the differences between the goodness of fit statistics were minimal, the selection of the best model was based on graphic analysis overlapping the quality curves generated with each model on the original data to compare their ability to describe the dominant height-age relationship (Figure 3).

The graphical comparison allows to observe that the Bertalanffy-Richards equation (Equation 6) describes slightly better individual growth trends in height, mainly at ages over 80 years for all species. In all cases, the curves generated by equation 6 present more plausible asymptotic values than those generated with the equations 4 and 5, with which the asymptote is reached at a much higher age of 180 years. For example, for *P. teocote* the asymptote appears at an age of about 140 years with Bertalanffy-Richards model, with a value of 33 m for the best quality station, close to the maximum height reported for this species in the region (García and Gonzalez, 2003), while from equations 4 and 5 the asymptotes are reached at heights of 38 and 40 m, values far above the maximum that this species can get.

For *P. durangensis* the asymptote obtained with equation 6 in the best quality station was 38 m, a value close to the maximum height reported for this species (40 m) in the state of Durango (García and González, 2003); in contrast, with equation 4 (Korf), dominant height growth did not stabilize until the age of nearly 180 years, whereas with equation 5 (Hossfeld) the asymptote is reached at a height of 33 m, well below the maximum heights that this species can record in the best quality forests.

This analysis reinforces the point made by Diéguez-Aranda *et al.* (2006), who argue that different models can have the same statistical goodness of fit or comparison but a different response.

Finally, the trend of bias (Figure 4) of each model was analyzed in estimating the age class heights for each species.

In general, the estimation of heights with the Richards- Bertalanffy model describes a distribution of bias around the zero line, while the Korf and Hossfeld equations show a bias greater virtually in all age classes, primarily between 40 and 60 years and in younger ages.

Larreta Vargas *et al.* (2010) found that Bertalanffy-Richards model also proved to be the best to describe the height growth of *Pinus cooperi* in the region of El Salto, Durango, noting that the other models compared by these authors were also the Korf and Hossfeld. The results of this study are also consistent with those

Cuadro 3. Parámetros estimados y estadísticos de ajuste de los modelos evaluados sin considerar la estructura del error.
 Table 3. Parameter estimates and fit statistics of the models evaluated without considering the structure of the error.

Especie	Modelo	Parámetro	Valor estimado	Error Std. aprox.	Valor-t	Valor-p aprox.	REMC	R ²
<i>Pinus arizonica</i> Engelm.	4	b_1	-45.2384	5.5961	-8.08	<.0001	0.993	0.981
		b_2	257.5268	22.256	11.57	<.0001		
		b_3	0.7033	0.027	25.67	<.0001		
	5	b_1	15.3048	1.362	11.23	<.0001	0.998	0.981
		b_2	19774.76	2261.8	8.74	<.0001		
		b_3	1.8347	0.0297	61.8	<.0001		
	6	b_1	0.0272	0.0009	28.7	<.0001	1.019	0.979
		b_2	-1.4711	0.2099	-7.01	<.0001		
		b_3	11.4920	0.7209	15.94	<.0001		
<i>Pinus durangensis</i> Martínez	4	b_1	-106.14	12.0367	-8.82	<.0001	0.892	0.980
		b_2	527.458	54.2578	9.72	<.0001		
		b_3	0.5397	0.0173	31.16	<.0001		
	5	b_1	27.7622	1.1282	24.61	<.0001	0.893	0.981
		b_2	5784.998	920.7	6.28	<.0001		
		b_3	1.6636	0.0166	100.13	<.0001		
	6	b_1	0.01780	0.0005	34.06	<.0001	0.915	0.979
		b_2	-2.3997	0.1571	-15.28	<.0001		
		b_3	14.0793	0.5295	26.59	<.0001		
<i>Pinus leiophylla</i> Schiede ex Schltdl. & Cham.	4	b_1	15.7898	0.9009	17.53	<.0001	0.956	0.980
		b_2	-11.0535	4.3707	-2.53	0.0118		
		b_3	0.4499	0.0249	18.05	<.0001		
	5	b_1	15.5885	3.1504	4.95	<.0001	0.942	0.981
		b_2	34262.14	5417.6	6.32	<.0001		
		b_3	1.6767	0.0236	71	<.0001		
	6	b_1	0.01542	0.0007	22.04	<.0001	0.951	0.981
		b_2	0.2909	0.1681	1.73	0.044		
		b_3	5.0036	0.6032	8.29	<.0001		
<i>Pinus teocote</i> Schiede ex Schltdl. & Cham.	4	b_1	1.6548	1.9323	0.86	0.392	0.779	0.983
		b_2	56.1622	8.5395	6.58	<.0001		
		b_3	0.5313	0.0211	25.24	<.0001		
	5	b_1	5.44732	3.2942	1.65	<.0987	0.786	0.981
		b_2	29415.49	3844.1	7.65	<.0001		
		b_3	1.658737	0.0219	75.62	<.0001		
	6	b_1	0.01949	0.0007	27.91	<.0001	0.795	0.983
		b_2	0.70022	0.1262	5.55	<.0001		
		b_3	3.5316	0.4358	8.1	<.0001		



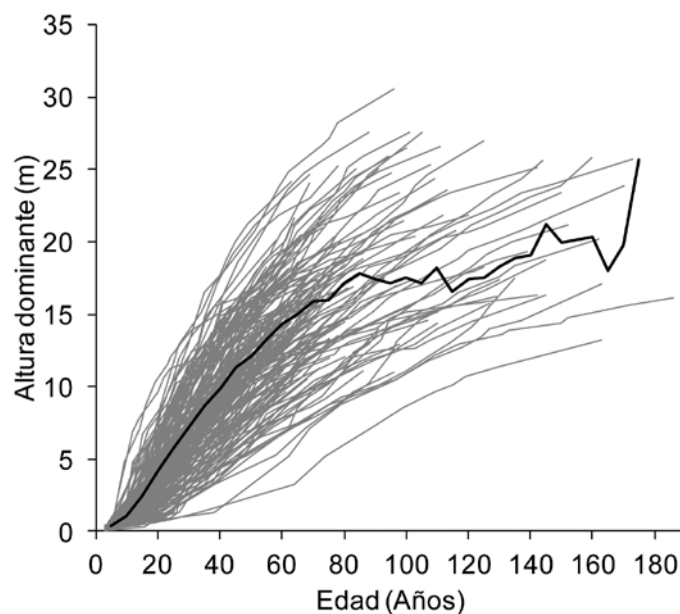


Figura 2. Superposición de los datos de análisis troncales y la estructura real de la media (línea sólida).

Figure 2. Overlapping of the data from stem analysis and the real structure of the mean (solid line).

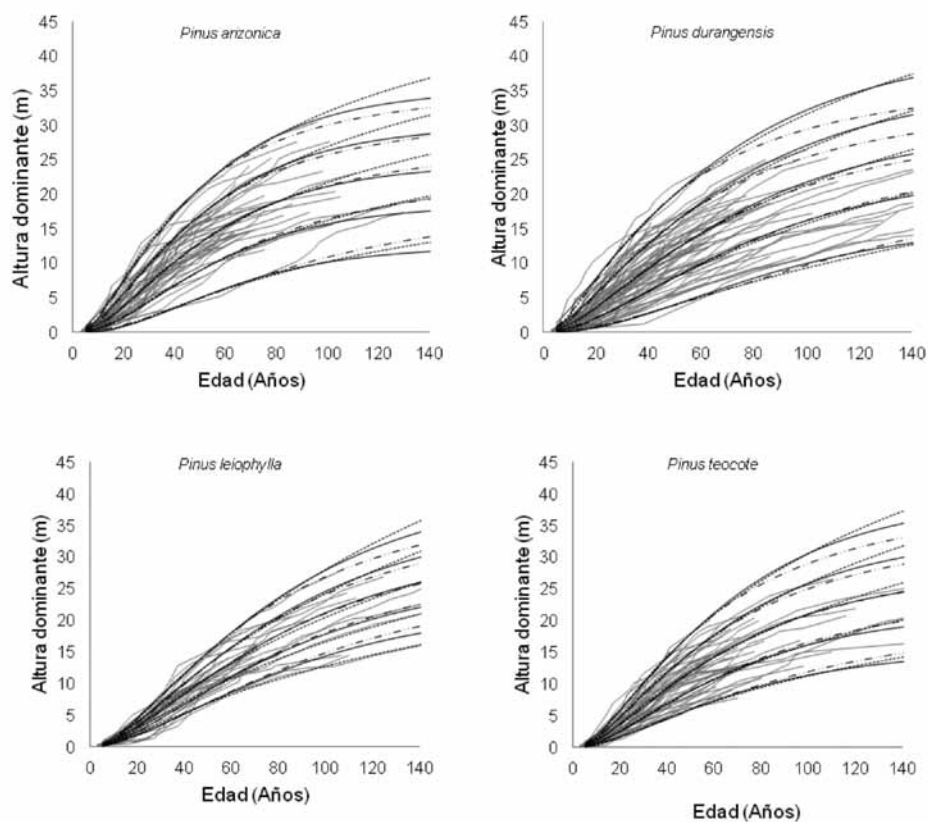


Figura 3. Sobreposición de las curvas de calidad a los datos originales generadas con los modelos de Korf (línea discontinua), Hosfeld (línea punteada) y Bertalanffy-Richards (línea continua).

Figure 3. Overlay curves of the original data quality models generated with Korf (discontinuous line), Hosfeld (dotted line) and Bertalanffy-Richards models (solid line).

Para *Pinus teocote* las tres ecuaciones mostraron buenos ajustes, sin embargo, el parámetro b_1 del modelo de Korf (ecuación 4) fue no significativo, situación que también ocurrió para *P. leiophylla*, para la cual, a pesar de sus estadísticos de ajuste altos, el parámetro b_2 de los modelos de Korf (ecuación 4) y Bertalanffy-Richards (ecuación 6) fueron no significativos a nivel de 1%.

Dado que las diferencias entre los estadísticos de bondad de ajuste fueron mínimas, la selección del mejor modelo se apoyó en el análisis gráfico sobreponiendo las curvas de calidad generadas con cada modelo sobre los datos originales para comparar su capacidad para describir la relación altura dominante-edad (Figura 3).

reported by Santiago *et al.* (2009). Based on the above, it was decided to select the Bertalanffy-Richards model for further analysis.

Modelling the error structure

After selecting the best model (equation 6), it was proceeded to adjust it again, by integrating a second-degree autoregressive model (CAR (2)) in order to correct for potential autocorrelation of the errors. Figure 5 shows the trend of the residual equation 6 by adjusting regardless autocorrelation errors. After correction of the autocorrelation using the second-order autoregressive model, the trend in the residuals disappears (Figure 5).

Cuadro 4. Estimaciones de los parámetros y estadísticos de bondad de ajuste del modelo 6 integrando un modelo autorregresivo CAR(2).
Table 4. Parameter estimates and goodness-of-fit of the model 6 CAR integrated autoregressive model (2).

Modelo	Especie	Parámetro	Valor estimado	Error Std. Aprox.	Valor-t	Valor-p aprox.	REMC	R ²
6	<i>Pinus arizonica</i> Engelm.	b_1	0.022939	0.0012	18.42	<.0001	0.689	0.9907
		b_2	-0.26195	0.2036	-1.29	0.1987		
		b_3	6.32735	0.6983	9.06	<.0001		
		ρ_1	0.99074	0.0046	216.56	<.0001		
		ρ_2	0.92689	0.0069	133.34	<.0001		
6	<i>Pinus durangensis</i> Martínez	b_1	0.014255	0.0007	21.13	<.0001	0.639	0.9901
		b_2	-2.43018	0.2156	-11.27	<.0001		
		b_3	13.28394	0.7262	18.29	<.0001		
		ρ_1	0.98941	0.0046	216.77	<.0001		
		ρ_2	0.93093	0.0061	152.81	<.0001		
6	<i>Pinus leiophylla</i> Schiede ex Schltdl. & Cham.	b_1	0.010439	0.0009	10.86	<.0001	0.689	0.9901
		b_2	-0.30258	0.2571	-1.18	0.24		
		b_3	5.70930	0.9203	6.2	<.0001		
		ρ_1	0.97515	0.0084	116.66	<.0001		
		ρ_2	0.94366	0.0078	121	<.0001		
6	<i>Pinus teocote</i> Schiede ex Schltdl. & Cham.	b_1	0.01618	0.0010	15.99	<.0001	0.595	0.9902
		b_2	0.54769	0.1654	3.31	0.001		
		b_3	2.68035	0.5569	4.81	<.0001		
		ρ_1	0.98970	0.0052	192.29	<.0001		
		ρ_2	0.95414	0.0056	170.97	<.0001		



Cuadro 5. Expresión final de las ecuaciones desarrolladas.

Table 5. Final expression of the formulated equations

Especie	Bertalanffy-Richards	
		(10)
	$Y=Y_0 \left[\frac{1-e^{-0.022929t}}{1-e^{-0.022929t_0}} \right]^{-0.26195+6.327345/X_0}$	
<i>Pinus arizonica</i>	$X_0 = \frac{1}{2} \left[\ln Y_0 + 0.26195 L_0 + \sqrt{(\ln Y_0 + 0.26195 L_0)^2 - 4 * 6.327345 L_0} \right]$ $L_0 = \ln [1 - e^{-0.022929t_0}]$	
		(11)
	$Y=Y_0 \left[\frac{1-e^{-0.014255t}}{1-e^{-0.014255t_0}} \right]^{2.43018+13.28394/X_0}$	
<i>Pinus durangensis</i>	$X_0 = \frac{1}{2} \left[\ln Y_0 + 2.43018 + \sqrt{(\ln Y_0 + 2.43018 L_0)^2 - 4 * 13.28394 L_0} \right]$ $L_0 = \ln [1 - e^{-0.014255t_0}]$	
		(12)
	$Y=Y_0 \left[\frac{1-e^{-0.010439t}}{1-e^{-0.010439t_0}} \right]^{-0.30258+5.709296/X_0}$	
<i>Pinus leiophylla</i>	$X_0 = \frac{1}{2} \left[\ln Y_0 + 0.30258 L_0 + \sqrt{(\ln Y_0 + 0.30258 L_0)^2 - 4 * 5.709296 L_0} \right]$ $L_0 = \ln [1 - e^{-0.010439t_0}]$	
		(13)
	$Y=Y_0 \left[\frac{1-e^{-0.016179t}}{1-e^{-0.016179t_0}} \right]^{0.547686+2.680348/X_0}$	
<i>Pinus teocote</i>	$X_0 = \frac{1}{2} \left[\ln Y_0 - 0.547686 L_0 + \sqrt{(\ln Y_0 - 0.547686 L_0)^2 - 4 * 2.680348 L_0} \right]$ $L_0 = \ln [1 - e^{-0.016179t_0}]$	

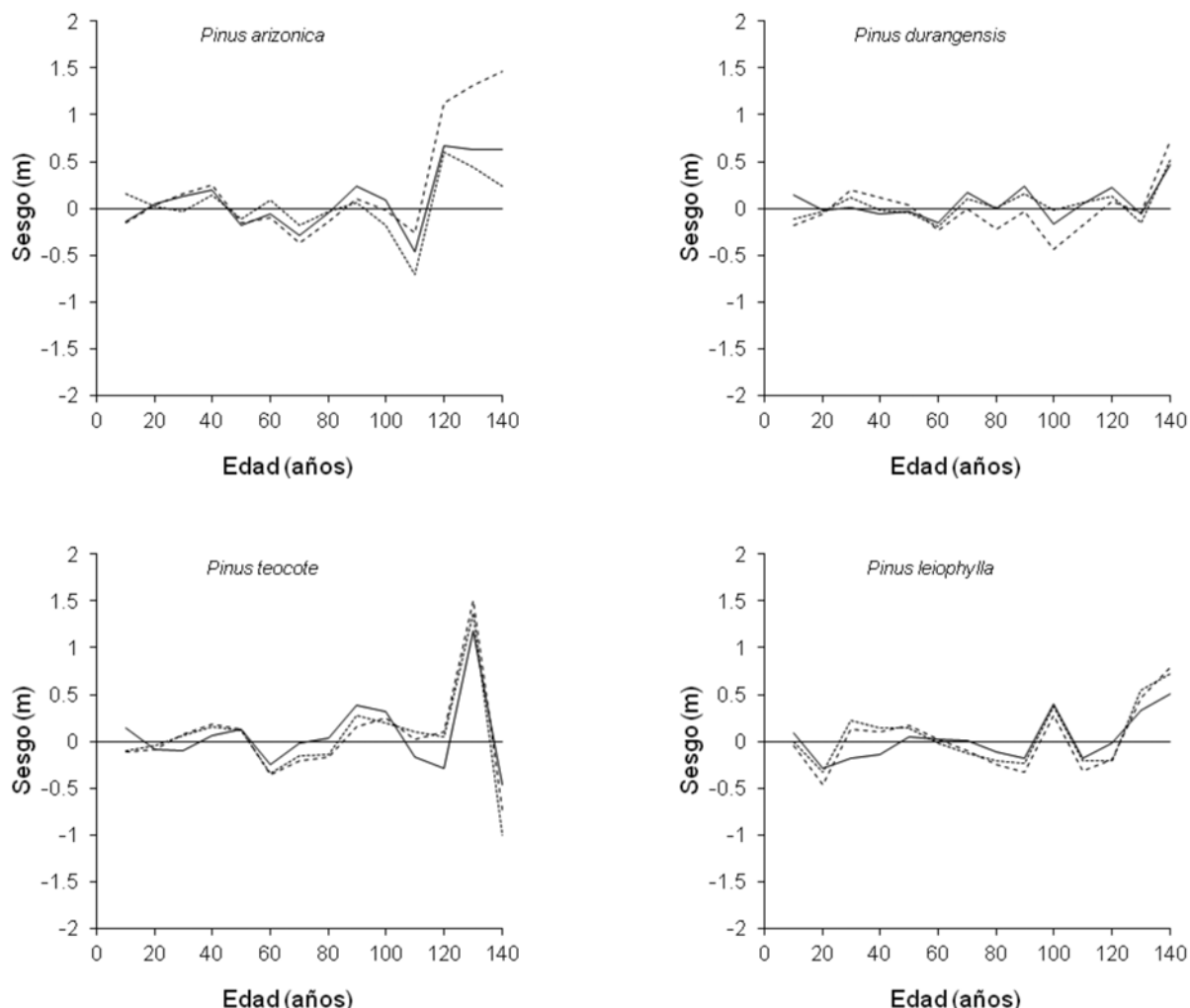


Figura 4. Sesgo en las predicciones de altura estimadas con los modelos de Korf (línea discontinua), Hosfeld (línea punteada) y Bertalanffy-Richards (línea continua).

Figure 4. Bias in estimated height predictions with Korf (dashed line), Hosfeld (dotted line) and Bertalanffy-Richards models (solid line).

La comparación gráfica permite observar que la ecuación de Bertalanffy-Richards (ecuación 6) describe ligeramente mejor las tendencias individuales de crecimiento en altura, principalmente a edades superiores a los 80 años para las cuatro especies. En todos los casos, las curvas generadas con la ecuación 6 presentan valores asíntóticos más plausibles que las generadas con las ecuaciones 4 y 5, con las cuales la asíntota se alcanza a edades mucho mayores de 180 años. Por ejemplo, para *P. teocote* la asíntota se aprecia a una edad aproximada de 140 años con el modelo de Bertalanffy-Richards, con un valor de 33 m para la mejor calidad de estación, altura cercana a la máxima registrada para este taxon en la región (García y González, 2003), mientras que con las ecuaciones 4 y 5 las asíntotas se manifiestan en alturas de 38 y 40 m, valores muy por encima de los máximos que esta especie puede llegar a tener.

The model considers autocorrelation correction of errors explains over 99% of the variance of height growth of all species (Table 4), with an average error from 0.60 (*P. teocote*) to 0.69 m (*P. arizonica* and *P. leiophylla*), values slightly lower than those obtained in the fit excluding the autoregressive model (Table 3), in addition to providing a random pattern of residuals around the zero line with homogeneous variance without detected no clear tendency (Figure 6); these results are similar to those obtained by Diéguez-Aranda *et al.* (2005), Corral-Rivas *et al.* (2004) and Vargas-Larreta *et al.* (2010).

The final expression of the equation in each species GADA based Bertalanffy-Richards model shown in Table 5, whereas in Figure 7, curves generated with the aforementioned quality equations (8, 9, 10 and 11) (Table 5).

En cambio, para *P. durangensis* la asíntota obtenida con la ecuación 6 en la mejor calidad de estación fue 38 m, valor cercano a la altura máxima citada para esta especie (40 m) en el estado de Durango (García y González, 2003), en cambio con la ecuación 4 (Korf) el crecimiento en altura dominante no se estabilizó hasta una edad cercana a los 180 años, mientras que con la ecuación 5 (Hossfeld) la asíntota se alcanza a una altura de 33 m, muy por debajo de las alturas máximas que esta especie puede alcanzar en las mejores calidades de estación.

Este análisis refuerza lo señalado por Diéguez-Aranda *et al.* (2006), quienes afirman que diferentes modelos pueden presentar los mismos estadísticos de bondad de ajuste o de comparación, pero una respuesta distinta.

Finalmente, se analizó la tendencia del sesgo (Figura 4) de cada modelo en la estimación de las alturas por clases de edad para cada especie.

En general, la estimación de alturas con el modelo de Bertalanffy-Richards describe una distribución del sesgo alrededor de la línea del cero, mientras que las ecuaciones de Korf y Hossfeld muestran un sesgo mayor prácticamente en todas las clases de edad, en particular entre los 40 y 60 años y para edades jóvenes.

Vargas-Larreta *et al.* (2010) encontraron que el modelo de Bertalanffy-Richards también resultó ser el mejor para describir el crecimiento en altura dominante de *Pinus cooperi* en la región de El Salto, Durango, destaca que los otros modelos comparados por estos autores fueron también el de Korf y Hossfeld. Los resultados del presente trabajo también son consistentes con los consignados por Santiago *et al.* (2009). Con base en lo anterior se decidió seleccionar el modelo de Bertalanffy-Richards para posteriores análisis.

Modelización de la estructura del error

Una vez seleccionado el mejor modelo (ecuación 6), se procedió a ajustarlo nuevamente integrando un modelo autorregresivo de segundo grado (CAR(2)) con la finalidad de corregir la potencial autocorrelación de los errores. La Figura 5 ilustra la tendencia de los residuales al ajustar la ecuación 6 sin tener en cuenta la autocorrelación de los errores. Después de la corrección de la autocorrelación con el modelo autorregresivo de segundo orden, la tendencia en los residuales desaparece (Figura 5).

El modelo que considera la corrección de la autocorrelación de los errores explica por encima del 99% de la varianza del crecimiento en altura dominante de todas las especies (Cuadro 4), con un error medio entre 0.60 (*P. teocote*) y 0.69 m (*P. arizonica* y *P. leiophylla*), valores ligeramente menores a los obtenidos en el ajuste sin considerar el modelo autorregresivo (Cuadro 3), además de proveer un patrón aleatorio de los residuales alrededor de

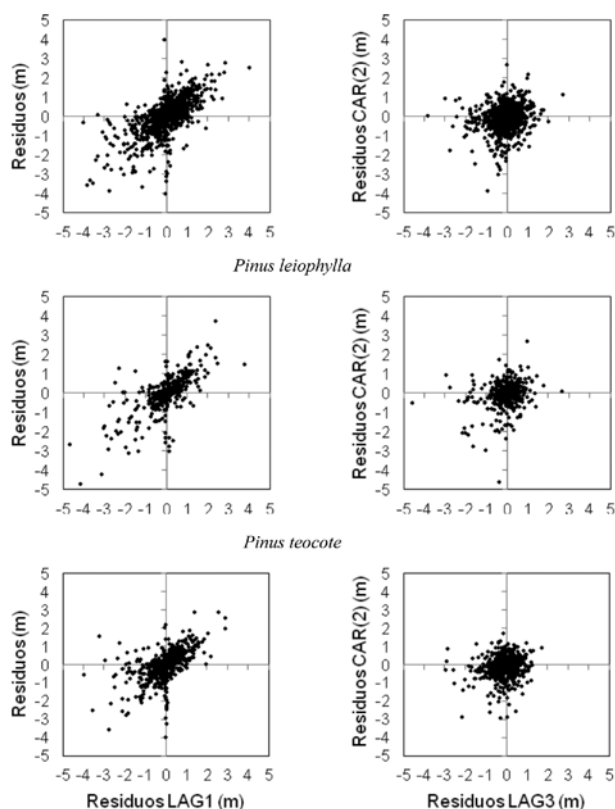


Figura 5. Residuos frente a: residuos de la observación anterior (residuos LAG1) y residuos de la observación realizada tres mediciones antes (residuos LAG3) para la ecuación [6] ajustada a los datos de *P. arizonica* Engelm., *P. durangensis* Martínez, *P. leiophylla* Schiede ex Schltdl. & Cham. y *P. teocote* Schiede ex Schltdl. & Cham., sin considerar los parámetros autocorregresivos (1ª columna) y usando un modelo autorregresivo de orden 2 CAR (2) (2ª columna).

Figure 5. Residuals versus residues of the previous observation (LAG1 residuals) and residuals of the observation made three measurements earlier (LAG3 residuals) to the equation [6] fitted to the data of *P. arizonica* Engelm., *P. durangensis*, Martínez, *P. leiophylla* Schiede ex Schltdl. & Cham. and *P. teocote* Schiede ex Schltdl. & Cham., regardless of the autocorregressive parameters (1st column) and using an autoregressive model of a 2 CAR (2) order (2nd column).



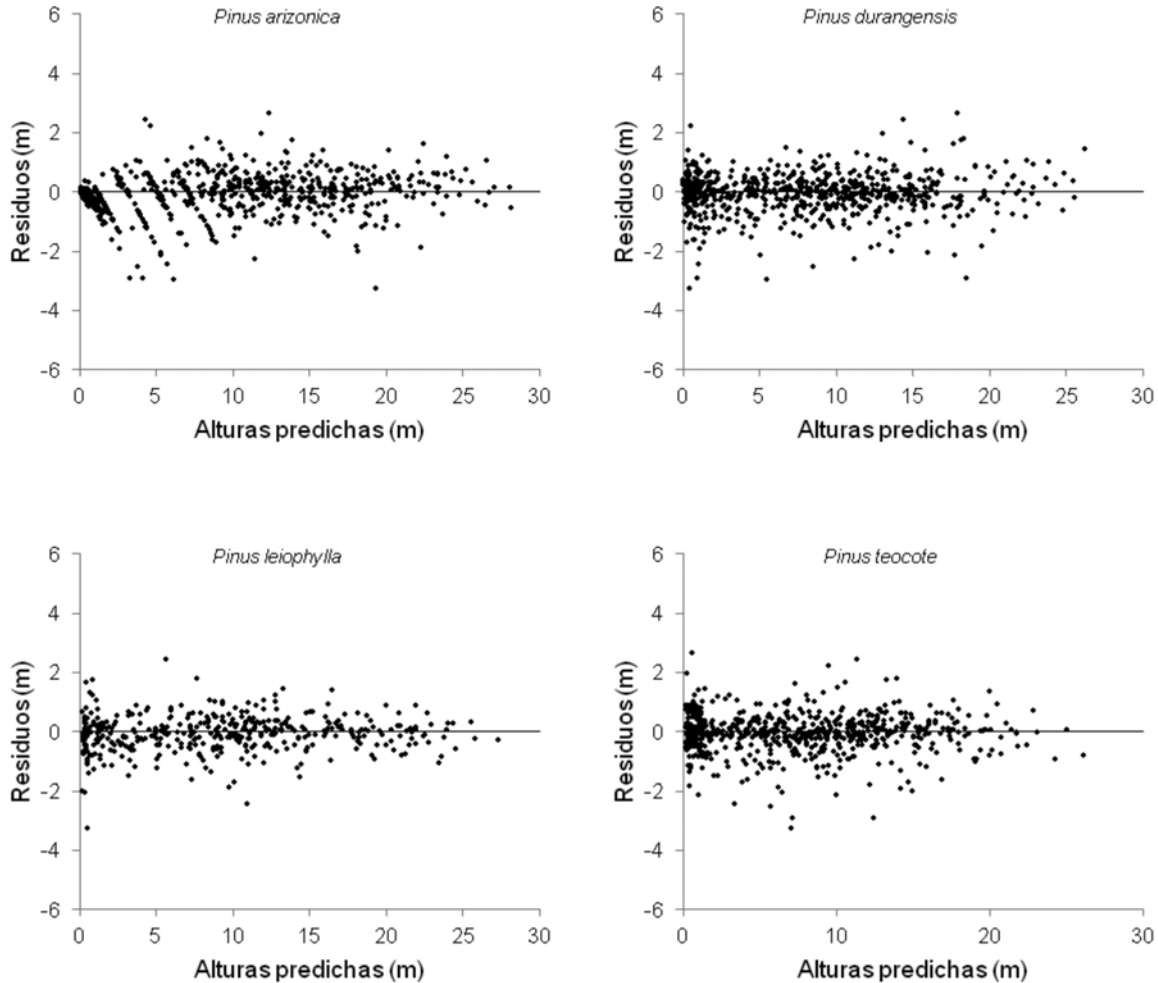


Figura 6. Residuos frente a alturas predichas estimadas con la ecuación (6) considerando el modelo autorregresivo CAR(2).

Figure 6. Residuals versus predicted heights estimated with equation (6) considering the CAR autoregressive model (2).

la línea del cero con varianza homogénea y sin detectarse ninguna tendencia clara (Figura 6); estos son resultados similares a los obtenidos por Diéguez-Aranda *et al.* (2005), Corral-Rivas *et al.* (2004) y Vargas-Larreta *et al.* (2010).

Es importante señalar que desde el punto de vista práctico, los parámetros ρ_1 y ρ_2 , utilizados para modelar la estructura del error, generalmente no se utilizan (Diéguez-Aranda *et al.*, 2006). El propósito principal de modelar la estructura del error es obtener estimaciones consistentes de los parámetros, de sus errores estándar, y el parámetro específico de la calidad de estación estimado para cada individuo se suprime de forma similar como en el proceso de autocorrelación (Cieszewski, 2001), así, la altura estimada en función de su edad en un nuevo individuo se incorpora directamente para realizar predicciones.

It is important to note that, from a practical standpoint, ρ_1 and ρ_2 parameters, are generally not used for modelling the structure of the error (Diéguez-Aranda *et al.*, 2006). The main purpose of modeling the error structure is to obtain consistent estimates of the parameters and their standard errors, and parameter specific quality estimate for each individual station is suppressed in a similar way as in the autocorrelation process (Cieszewski, 2001); thus, the estimated height based on their age into a new individual is included directly to make predictions.

Where:

Y_0 = Dominant height (m) at the t_0 age (years)

Y = Estimated height (m) at the t age (years)

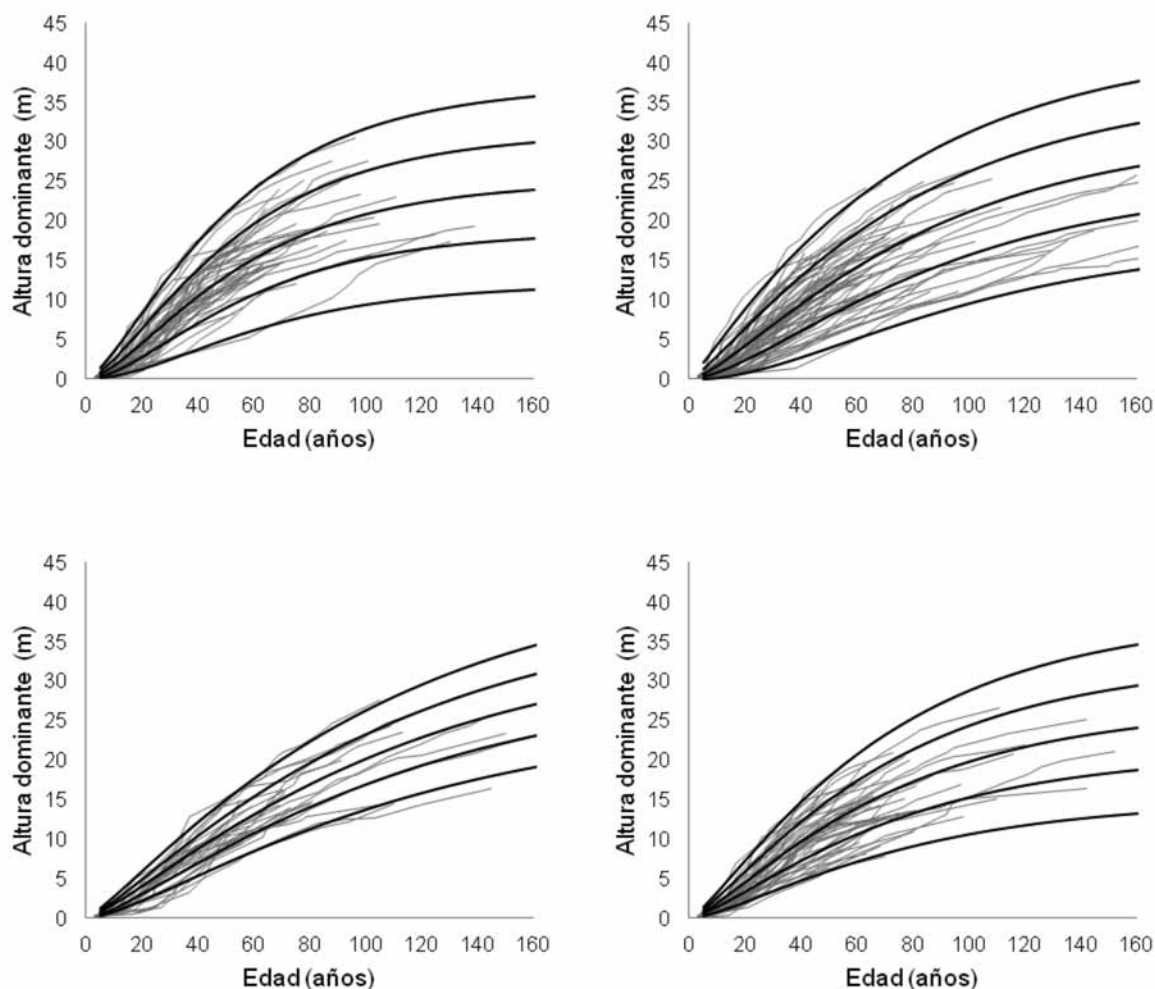


Figura 7. Curvas de calidad a la edad de referencia de 50 años para *P. arizonica* (arriba-izq.), *P. durangensis* (arriba-der.), *P. leiophylla* (abajo-izq.) y *P. teocote* (abajo-der.) construidas con el modelo dinámico de Bertalanffy-Richards ajustado con el modelo autorregresivo CAR(2).

Figure 7. Quality curves at the reference age of 50 years for *P. arizonica* Engelm. (up-left), *P. durangensis* Martínez (up-right), *P. leiophylla* Schiede ex Schltdl. & Cham. (down-left) and *P. teocote* Schiede ex Schltdl. & Cham. (down-right) built with the dynamic model of Bertalanffy-Richards fitted with the CAR(2) autoregressive model.

La expresión final de la ecuación en forma GADA para cada especie basada en el modelo de Bertalanffy-Richards se muestra en el Cuadro 5, mientras que en la Figura 7, las curvas de calidad generadas con las mencionadas ecuaciones (8, 9, 10 y 11) (Cuadro 5).

Donde:

Y_0 = Altura dominante (m) a la edad t_0 (años)
 Y = Altura estimada (m) a la edad t (años).



CONCLUSIONES

Los parámetros de bondad de ajuste no mostraron diferencias significativas entre modelos, sin embargo, el análisis gráfico permitió concluir que el modelo de Bertalanffy-Richards fue el que presentó el comportamiento biológico más lógico al sobreponer las curvas de índice de sitio sobre los datos originales.

Las ecuaciones obtenidas son polimórficas con múltiples asíntotas e invariantes con respecto a la edad de referencia, además estiman directamente la altura dominante y el índice de sitio a cualquier altura y edad de referencia.

El uso de estas ecuaciones permitirá mejorar significativamente la estimación actual del potencial productivo de las especies estudiadas, a través de su incorporación a los programas de manejo forestal vigentes para la región forestal de Santiago Papasquiaro, Durango. 🌱

REFERENCIAS

- Álvarez-González, J. G., M. Barrio, F. Castedo, U. Diéguez-Aranda y A. D. Ruíz-González. 2005. Modelos para la gestión forestal: una revisión de las metodologías de construcción de modelos de masa. EDP Sciences. Madrid, España. 13 p.
- Bailey, R. and J. Clutter. 1974. Base-age invariant polymorphic site curves. *For. Sci.* 20: 155-159.
- Barrio-Anta, M., F. Castedo-Dorado, U. Diéguez-Aranda, J. G. Álvarez-González, B. R. Parresol and R. Rodríguez Soalleiro. 2006. Development of a basal area growth system for maritime pine in northwestern Spain using the generalized algebraic difference approach. *Can. J. For. Res.* 36(6): 1461-1474.
- Carmean, W. H. 1972. Site index curves for upland oaks in the Central States. *For. Sci.* 18: 109-120.
- Castedo-Dorado, F., U. Diéguez-Aranda, M. Barrio-Anta and J. G. Álvarez-González. 2007. Modelling stand basal area growth for radiata pine plantations in northwestern Spain using the GADA. *Ann. For. Sci.* 64: 609-619.
- Cieszewski, C. J. 2001. Three methods of deriving advanced dynamic site equations demonstrated on inland Douglas-fir site curves. *Can. J. For. Res.* 31: 165-173.
- Cieszewski, C. J. 2002. Comparing fixed-and variable-base-age site equations having single versus multiple asymptotes. *For. Sci.* 48: 7-23.
- Cieszewski, C. J. 2003. Developing a well-behaved dynamic site equations using a modified Hossfeld IV function $Y_3(\alpha m)/(c + x m - 1)$, a simplified mixed-model and scant subalpine fir data. *For. Sci.* 49: 539-554.
- Cieszewski, C. J. and R. L. Bailey. 2000. Generalized algebraic difference approach: theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *For. Sci.* 46(1): 116-126.
- Clutter, J., J. Fortson, L. Piennar, H. Brister and R. Bailey. 1983. Timber management: a quantitative approach. John Wiley & Sons, Inc. New York, NY. USA. 125 p.
- Corral-Rivas, J. J., J. G. Álvarez-González, A. D. Ruíz and K. Gadow. 2004. Compatible height and site index models for five pine species in El Salto, Durango (Mexico). *For. Ecol. Manage.* 201: 145-160.
- Davis, L. S., K. N. Johnson, P. S. Bettinger and T. E. Howard. 2001. Forest Management: to sustain ecological, economic and social values. McGraw-Hill Series in Forest Resources. 4th Ed. New York, NY. USA. 804 p.
- Diéguez-Aranda, U., J. G. Álvarez-González, M. Barrio-Anta and A. Rojo-Alboreca. 2005. Site quality equations for *Pinus sylvestris* L. plantations in Galicia (north-west Spain). *Ann. For. Sci.* 62: 143-152.

CONCLUSIONS

The goodness of fit parameters showed no significant differences between models, however, the graphic analysis to conclude that the Bertalanffy-Richards model was the one that presented the most logical biological behavior by overlaying the site index curves on the original data.

The equations obtained are polymorphic with multiple asymptotes and invariant with respect to the reference age, and they also estimate directly dominant height and site index at any reference height and reference age.

These equations will significantly improve the current estimate of the productive potential of the species studied, through their inclusion into the existing forest management programs for the forest region of Santiago Papasquiaro, Durango. 🌱

End of the English version

- Diéguez-Aranda, U., H. E. Burkhart and R. L. Amateis. 2006. Dynamic Site Model for Loblolly Pine (*Pinus taeda* L.) plantations in the United States. *For. Sci.* 52(3): 262-272.
- Diéguez-Aranda, U., A. Rojo-Alboreca, F. Castedo-Dorado, J. G. Álvarez-González, M. Barrio-Anta, F. Crecente-Campo, J. M. González-González, C. Pérez-Cruzado, R. J. Rodríguez-Soalleiro, C. A. López-Sánchez, M. A. Balboa-Murias, J. J. Gorgoso-Varela y F. Sánchez-Rodríguez. 2009. Herramientas silvícolas para la gestión forestal sostenible en Galicia. Dirección Xeral de Montes, Consellería do Medio Rural, Xunta de Galicia. 272 p.
- Dyer, M. E. and R. L. Bailey. 1987. A test of six methods for estimating true heights from stem analysis data. *For. Sci.* 33: 3-13.
- Fabbio, G., M. Frattegiani and C. C. Manetti. 1994. Height estimation in stem analysis using second differences. *For. Sci.* 40: 329-340.
- García, A. and M. S. González. 2003. Pináceas de Durango. Instituto de Ecología, A.C. - CONAFOR Durango, México. 90 p.
- Gregoire, T., G., O. Schabenberger and J. P. Barrett. 1995. Linear modelling of irregularly spaced, unbalanced, longitudinal data from permanent-plot measurements. *Can. J. For. Res.* 25: 137-156.
- Newberry, J., D. 1991. A note on Carmean's estimate of height from stem analysis data. *For. Sci.* 37(1): 368-369.
- Prodan, M., R. Peters, F. Cox y P. Real. 1997. Mensura forestal. Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura (IICA)/Deutsche Gesellschaft für Technische Zusammenarbeit (GTZ). San José, Costa Rica. 561 p.
- Ryan, T. P. 1997. Modern regression methods. John Wiley and Sons, Inc. New York, NY. USA. 128 p.
- Santiago, J., W. 2009. Método de diferencias algebraicas generalizado para la estimación del índice de sitio de *Pinus cooperi* Blanco, en El Salto, Durango. Tesis de Maestría. Instituto Tecnológico de El Salto, Dgo. 41 p.
- System Statistical Analysis (SAS). 2004. User's Guide SAS. SAS/ETS™. Version 9.1. SAS Institute Inc. Cary, NC. USA. s/p
- Vargas-Larreta, B., J. G. Álvarez-González, J. J. Corral-Rivas y O. Aguirre C. 2010. Construcción de curvas dinámicas de índice de sitio para *Pinus cooperi* Blanco. *Fitotecnia Mexicana.* 33(4): 343-351.
- Zimmerman, D., L. and V. Núñez-Antón. 2001. Parametric modelling of growth curve data: An overview (with discussion). *Test* 10: 1-73.