DOI: https://doi.org/10.29298/rmcf.v10i51.223

Artículo

Diagrama para manejo de la densidad en rodales de *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham. en Puebla, México

A stand density diagram for *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham.in *Puebla*, Mexico

Juan Carlos Tamarit-Urias[1*], Gerónimo Quiñonez-Barraza[2], Héctor Manuel De los Santos-Posadas[3], Arturo Castañeda-Mendoza[4] y Wenceslao Santiago-García[5]

Abstract

A stand density diagram (DMD) is a technical tool for applying quantitative silviculture that contributes to improve the technical management of forests; however, the objective was to generate a density management diagram based on Reineke's stand density index to prescribe thinning for *Pinus patula* stands in *Puebla, Mexico*. Data from 252 inventory plots in maximum density that covered all growth conditions and the entire age range were processed. Density and quadratic diameter were processed by statistical regression adjusting Reineke's model. Self-thinning boundaries were fitted and compared to the data with ordinary least squares and stochastic frontier function (SFF) techniques, by Semi-Normal Model (SNM), the Normal Truncated Model (NTM) and the Normal-Exponential Model (NEM) approaches. An evaluation of the quality of statistical and graphical adjustment showed that the stochastic frontier regression technique (SFR) in its semi-normal modality was superior, so it was selected to determine the line of self-thinning. Maximum stand density indexes were 1 078 trees per hectare for a quadratic reference mean diameter of 20 cm. The DMD was generated by defining the different growth zones of Langsaeter. The DMD is useful to manage and prescribe the intensity of thinning as an intermediate silvicultural treatment in terms of the number of trees per hectare to be removed and their equivalent in basal area per hectare for even-aged stands.

Key words: Self-thinning, stand density index, patula pine, stochastic frontier regression, Reineke, even-aged stand.

Resumen:

Un diagrama para el manejo de la densidad (DMD) es una herramienta técnica para aplicar silvicultura cuantitativa, la que contribuye a mejorar el manejo técnico de los bosques. El objetivo fue generar un diagrama para manejar la densidad con base en el índice de densidad de rodal de *Reineke* en bosques coetáneos de *Pinus patula* en Puebla, México. Se procesó una muestra compuesta por 252 sitios de muestreo para inventario seleccionados en condiciones de máxima densidad, que cubrió todas las condiciones de crecimiento y del intervalo de edades. La información de densidad y diámetro cuadrático se procesó mediante regresión estadística ajustando la relación funcional tamaño-densidad de *Reineke*. Se comparó la técnica de mínimos cuadrados ordinarios contra la de regresión frontera estocástica en sus modalidades de modelo semi-normal, normal truncado y normal exponencial. Una evaluación de la calidad de ajuste estadístico y gráfico evidenció que la técnica de regresión frontera estocástica en su modalidad semi-normal fue superior, por lo que se seleccionó para determinar la línea de autoaclareo. El índice de densidad máximo fue de 1 078 árboles ha^{-1} para un Dq de referencia de 20 cm. El DMD se generó con la definición de las diferentes zonas de crecimiento de *Langsaeter*. El DMD es útil para gestionar y prescribir la intensidad de aclareos como tratamientos silvícolas intermedios, en términos del número de árboles en una hectárea por remover y su equivalente en área basal por hectárea para rodales coetáneos.

Palabras clave: Auto-aclareo, índice de densidad del rodal, pino pátula, regresión frontera estocástica, *Reineke*, rodal coetáneo.

Fecha de recepción/Reception date: 3 de mayo de 2018
Fecha de aceptación/Acceptance date: 06 de noviembre de 2018

[1]Campo Experimental San Martinito. CIR - Golfo Centro. INIFAP. México. Correo-e: tamarit.juan@inifap.gob.mx
[2]Campo Experimental Valle del Guadiana. CIR - Norte Centro. INIFAP. México.
[3] Colegio de Postgraduados. Campus Montecillo. México.
[4] Consultor y Asesor Forestal Independiente. México.
[5] Universidad de la Sierra Juárez. Ingeniería Forestal. México.

Introducción

Pinus patula Schiede ex Schltdl. & Cham. (pino pátula, pino llorón) es una de las principales especies maderables de coníferas de clima templado y es endémica de México; conforma rodales coetáneos puros, o bien es la especie dominante en bosques mixtos; sus árboles alcanzan un diámetro normal de 50 a 90 cm y altura de 30 a 35 m. Dada su abundancia, productividad y calidad de sus bosques, su madera es ampliamente utilizada para el aserrío; por lo que, se ha utilizado para establecer plantaciones forestales comerciales (Perry, 1991; Velázquez *et al*., 2004). Debido a su importancia económica es necesario actualizar y generar diferentes modelos alométricos y de crecimiento que constituyan herramientas para aplicar silvicultura cuantitativa, y con ello coadyuvar a la planificación y mejoramiento de su manejo técnico, para fines de producción y aprovechamiento maderable.

Una de las principales herramientas para la planeación y la realización del manejo forestal que brindan apoyo para el proceso de toma de decisiones por los responsables del manejo son los diagramas o guías para manejar densidad y prescribir aclareos como tratamientos silvícolas intermedios (Hernández *et al*., 2013; Corral-Rivas *et al*., 2015); principalmente, cuando los bosques se cultivan aplicando un sistema de manejo regular. La densidad es el factor más importante que el silvicultor puede manipular para influir en el establecimiento y desarrollo de las especies forestales de interés, para mejorar la calidad de la madera, la tasa de crecimiento en diámetro e incidir en la producción del volumen maderable, al redistribuir el potencial de crecimiento entre los individuos remanentes (Daniel *et al*., 1979; Pretzsch, 2009).

A partir de la relación definida entre la densidad o número de árboles (N) por unidad de superficie y su tamaño promedio se puede estudiar la dinámica, desarrollo, grado de competencia y productividad potencial de un rodal (Jayaraman y Zeide, 2007; Weiskittel *et al*., 2009). Para los silvicultores, resulta de particular interés el hecho de conocer el grado de ocupación de un sitio, para determinar el momento en el cual empieza el autoaclareo, como resultado de la mortalidad por competencia extrema

ante recursos escasos como espacio, agua, nutrimentos y luz solar; en tales condiciones, un incremento del tamaño promedio está asociado con una disminución progresiva de la densidad, hasta un límite determinado (Comeau *et al*., 2010). En esta relación, es posible expresar el tamaño promedio en términos del diámetro cuadrático medio (Dq), calculado como:

$$D_q = \sqrt{(40000/\pi)(AB/N)}$$

Donde:

AB = Área basal (m^2 ha^{-1})

N = Número de árboles ha^{-1}

Así, la relación queda definida por la función:

$$N = \alpha Dq^{-\beta}$$

Donde:

α y β = Parámetros por estimar mediante regresión estadística y corresponden al intercepto y la pendiente de la línea de autoaclareo (de máxima densidad o de mortalidad inminente), respectivamente.

Al predefinir un valor para el diámetro cuadrático de referencia (Dr), se obtiene la expresión general del índice de densidad de rodal (IDR) de *Reineke*, como una medida de la densidad relativa y de la ocupación del sitio, el cual se define como el número de árboles por hectárea para un diámetro cuadrático medio de referencia dado, que originalmente Reineke (1933) fijó a un valor de 25.4 cm.

Índice que expresa la relación entre el tamaño de los árboles y la densidad del rodal, con la función:

$$IDR = N(Dq/Dr)^{-\beta}$$

Donde:

β, cuando se desconoce, puede tomar el valor teórico constante de 1.605 para cualquier especie (Reineke, 1933). Sin embargo, algunos autores indican que el valor de la pendiente puede diferir significativamente entre especies por lo que se debe estimar para cada especie y región (Pretzsch y Biber, 2005; VanderSchaaf y Burkhart, 2007; Comeau *et al*., 2010; Navarro *et al*., 2011). El índice representa tanto la condición límite de sobrevivencia, como la trayectoria de autoaclareo de rodales individuales; tiene la ventaja de ser independiente de la calidad de sitio y de la edad del rodal (Long, 1985).

La densidad relativa se define como la razón entre la densidad actual de la masa y la densidad máxima dada por la línea de máxima densidad para un tamaño medio del árbol; para el caso del IDR se expresa con respecto a un Dq prefijado.

En términos prácticos, el índice constituye una herramienta silvícola cuantitativa de utilidad para el administrador forestal, le permite diagnosticar el estado de rodales individuales con el propósito de manejar la densidad, mediante la prescripción de aclareos en tiempo e intensidad de acuerdo al producto predefinido por obtener. La herramienta operativa que se genera a partir del IDR es un diagrama o guía para el manejo de la densidad (DMD) del rodal, que da lugar a un método para comparar, evaluar y decidir, de manera fácil y rápida, diferentes regímenes alternativos de aclareos para su implementación en el manejo de rodales.

Se ha demostrado que el valor del parámetro de la pendiente (β) varía en función, principalmente, de la especie; razón por la que se han desarrollado diferentes técnicas de ajuste del modelo de *Reineke*, orientadas a mejorar la definición de la línea de

autoaclareo (Santiago-García *et al*., 2013; Lopes *et al*., 2016). Otro aspecto técnico importante por considerar para ajustar el modelo, es el origen y la selección de la información dasométrica por utilizar. En ese contexto, el objetivo del presente trabajo fue generar un diagrama para el manejo de la densidad con base en el índice de densidad de rodal de *Reineke* en rodales coetáneos naturales de *Pinus patula* en Puebla, México, a partir de la evaluación de la calidad de ajuste del modelo tamaño-densidad por las técnicas de mínimos cuadrados ordinarios lineales y regresión frontera estocástica. El DMD será una herramienta técnica para aplicar silvicultura cuantitativa que permitirá prescribir regímenes de aclareos como tratamientos silvícolas intermedios, al aplicar un sistema de manejo regular para esta especie.

Materiales y Métodos

Caracterización del área de estudio

La información dasométrica que se utilizó fue colectada en predios forestales con programa de manejo para el aprovechamiento maderable de la Unidad de Manejo Forestal (Umafor) 2108, que corresponde a la región de Chignahuapan-Zacatlán, localizada al norte del estado de Puebla; geográficamente se localiza entre los paralelos 20°07’06” y 19°44’18” de latitud norte y entre los meridianos 97°57’18” y 97°38’42” de longitud oeste; se ubica en la Región Hidrológica (RH27) de la cuenca del Río Tecolutla. Esta Umafor está constituida por la Asociación Regional de Silvicultores de Chignahuapan-Zacatlán, A.C., conformada por silvicultores dueños poseedores de terrenos forestales.

Con la actual política pública del gobierno federal mexicano de incrementar la producción y productividad maderable, se le ha identificado como una importante cuenca de abasto forestal, con la incorporación de mejores prácticas y técnicas silvícolas intensivas que contribuyan a fortalecer y a mejorar el manejo forestal.

Tamaño de muestra y base de datos

Se procesó una muestra compuesta por 252 pares de observaciones sobre el número de árboles y el diámetro cuadrático promedio; fue seleccionada con base en un amplio conjunto de sitios de muestreo para inventario maderable, situados en predios forestales de los municipios Aquixtla, Chignahuapan, Ixtacamaxtitlán, Tetela de Ocampo y Zacatlán; los sitios fueron circulares, con una superficie de 1 000 m^2. Se eligieron aquéllos en los que *P. patula* conformó rodales coetáneos uniespecíficos y que, preferentemente, presentaban alta densidad, condición necesaria para cumplir el requerimiento de competencia extrema por recursos limitados. Adicionalmente, se tuvo el cuidado de que las observaciones de las variables dasométricas cubrieran todas las condiciones de crecimiento e intervalo de edades de la especie estudiada.

En cada sitio de muestreo, todos y cada uno de los árboles fueron medidos en su diámetro normal, el cual se registró en centímetros, con una cinta diamétrica modelo 283D/5m-CSE, también se contabilizó y registró el número de individuos por sitio. A partir de esta información se generó una base de datos y se derivaron, a nivel de hectárea, las variables dasométricas del rodal: densidad o número de árboles (N) y el diámetro cuadrático (Dq), cuyos estadísticos básicos se presentan en el Cuadro 1.

Cuadro 1. Estadísticos básicos de las variables dasométricas analizadas para generar el diagrama para el manejo de la densidad en rodales de *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham.

Variable	Mínimo	Máximo	Media	D.E.[1]	C.V[2]	Varianza
N	17.00	7 466.67	689.44	1 232.08	178.71	1 518 013.72
Dq	4.48	71.00	30.28	13.38	44.20	179.08

[1]Desviación estándar; [2]Coeficiente de variación.

La base de datos final fue auditada, mediante inspección gráfica, para corroborar que las variables de interés presentaran un comportamiento gráfico lógico, en forma de jota inversa (Figura 1); de esta manera, quedó preparada para el ajuste estadístico por regresión de la función tamaño-densidad basada en el índice de densidad de rodal de *Reineke*.

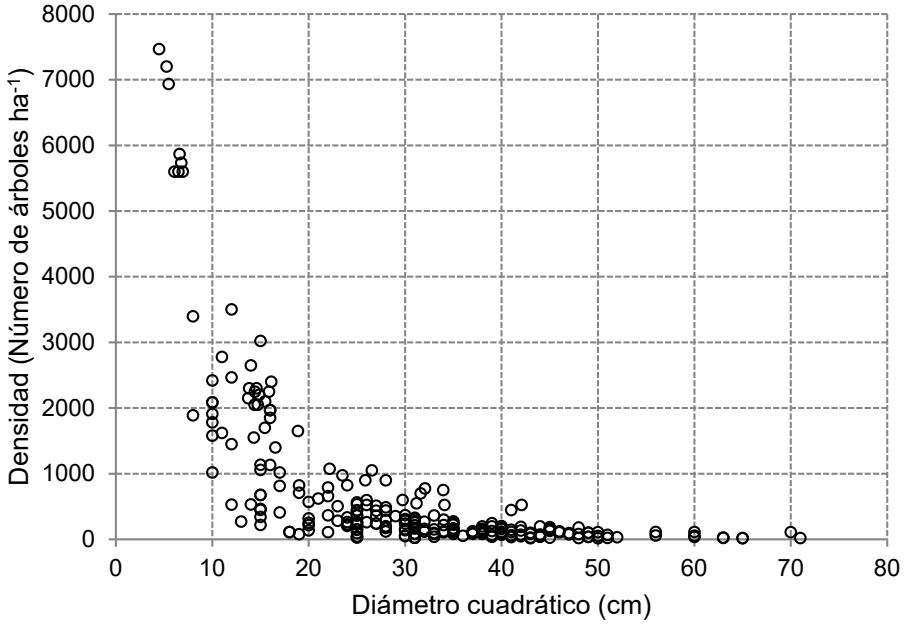

Figura 1. Comportamiento gráfico de las variables utilizadas en el análisis por regresión de la función tamaño-densidad de *Reineke*.

Análisis por regresión estadística

La función tamaño densidad de *Reineke* expresada en forma lineal, se ajustó por regresión estadística con el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) lineales, la estructura matemática linealizada del modelo de *Reineke* es de la forma:

$$Ln(N) = \alpha - \beta Ln(Dq) + \varepsilon \qquad (1)$$

Donde:

Ln = Función logaritmo natural

ε = Término del error que se distribuye como ε = idd N(0, σ^2)

Cuando la función se ajustó utilizando la técnica econométrica de regresión frontera estocástica (RFE), la estructura del modelo resultó:

$$Ln(N) = \alpha - \beta Ln(Dq) - u + v \qquad (2)$$

En este caso, el componente de error se divide en: 1) un componente de error que se asume para dar cuenta de la ineficiencia técnica en los datos (u_i); y 2) un componente de error asociado con la medición de las observaciones individuales (v_i).

v_i se asume como una perturbación simétrica distribuida independientemente de u_i, recoge las variaciones aleatorias en la producción debido a factores como errores aleatorios, errores en la observación y de medición de los datos; se asume que se distribuye en la forma:

$$v = \text{idd } N(0, \sigma^2_v)$$

u_i es un término asimétrico que recoge la ineficiencia técnica de las observaciones y se asume que se distribuye independientemente de v_i y de los regresores.

Bajo estos supuestos, se deben seleccionar distribuciones estadísticas para u_i, que se distribuyan para un solo lado, como en el caso de la modalidad de RFE seminormal y de la exponencial.

Si el valor de la ineficiencia técnica u_i se asume como cero, lo cual es menos probable con valores crecientes de u_i, entonces el modelo idd $N^+(0, \sigma^2_u)$ se refiere al modelo seminormal.

Si los u_i (i=1..., N) son variables aleatorias no negativas idd $N^+(0, \sigma^2_u)$, entonces el modelo se conoce como el modelo normal-truncado (en cero) (Kumbhakar y Lovell, 2000; Bi, 2004; Pretzsch y Biber, 2005; Zhang *et al*., 2005).

Cuando en el ajuste estadístico se usó el enfoque de RFE, se probaron las modalidades de Modelo Semi-Normal (MSN), Modelo Normal Truncado (MNT) y Modelo Normal Exponencial (MNE).

La función tamaño-densidad de *Reineke* se ajustó por MCO, con el procedimiento *Model* del paquete estadístico SAS/ETS® (Statistical Analysis System, 2011) versión 9.3. Cuando se usó RFE, la función se ajustó mediante el procedimiento QLIM del mismo paquete estadístico y versión; en este caso, el algoritmo utiliza la técnica de máxima verosimilitud para estimar la frontera y el parámetro de la ineficiencia técnica de las observaciones (u_i). La técnica de RFE, comparativamente, tiene como ventaja que estima valores extremos (frontera) de un conjunto de datos, en lugar de la media de una función que calcula el método de MCO.

El resultado y la calidad del ajuste por MCO se compararon con los ajustes obtenidos al utilizar RFE, los estadísticos de bondad de ajuste fueron el valor del logaritmo de verosimilitud (logLik), el criterio de información de *Akaike* (AIC) y el criterio de *Schwarz* (SchC), a los que, con base en Sakici *et al*. (2008) se les aplicó un sistema de calificación y se obtuvo una calificación total para cada modalidad de ajuste.

También, se consideró la significancia de los parámetros y las varianzas de los componentes del error, sobre todo la razón de varianzas de los componentes del error (λ); además de la varianza total (σ) (Weiskittel *et al*., 2009; Comeau *et al*., 2010; Zhang *et al*., 2013; Quiñonez-Barraza *et al*., 2018). Adicionalmente, para reforzar el criterio de selección, se realizó una comparación gráfica de las líneas de autoaclareo que generó cada una de las técnicas y modalidades de ajuste; principalmente, se observó el comportamiento de la trayectoria de las líneas de autoaclareo sobrepuestas a los datos observados. En el caso del ajuste por MCO, la línea de autoaclareo se determinó de acuerdo con Santiago-García *et al* (2013), en el que se modificó manualmente el valor

del intercepto (parámetro α) y se mantuvo fijo el valor de la pendiente (parámetro β), hasta alcanzar un $\alpha_{máx}$, que gráficamente se consideró apropiado.

Con los valores de los parámetros del mejor ajuste seleccionado, sobre un gráfico en escala logarítmica, se delimitó la línea de autoaclareo que una hectárea puede soportar sin autoaclareo, y que equivale a un IDR de 100 %, del IDR. Después, con base en la línea de IDR máximo, se estimaron las líneas que definieron cuatro diferentes zonas de crecimiento de *Langsaeter*, que conforman fajas o bandas de densidades relativas (Langsaeter, 1941; Daniel *et al*., 1979; Smith *et al*., 1997; Gilmore *et al*., 2005) sobre las cuales se deberá gestionar el manejo y crecimiento de los rodales orientados a cumplir el objetivo de producción maderable; de esta manera, queda construido el DMD.

La zona 1 de subutilización se delimitó hasta 25 % con respecto del IDR máximo; la zona 2 de transición se definió entre 25 y 35 %; la zona 3, que corresponde al máximo crecimiento del rodal por hectárea, se localizó entre 35 y 65 %; la zona 4, la de autoaclareo o mortalidad inminente, se ubicó de 65 a 100 %. En la construcción del DMD y para la definición del IDR se utilizó un Dq de referencia de 20 cm.

Resultados y Discusión

Calidad de ajuste y determinación de la línea de autoaclareo

El resultado del ajuste estadístico de la función tamaño-densidad de *Reineke* al utilizar la técnica de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) lineales y la de regresión frontera estocástica (RFE), en las modalidades de Modelo Semi-Normal (MSN), Modelo Normal Truncado (MNT) y Modelo Normal Exponencial (MNE) evidencia que, en todos los casos, los parámetros de la función son significativos (Cuadro 2).

Cuadro 2. Valores estimados de los parámetros y estadísticos de ajuste para la función tamaño-densidad de *Reineke* basado en el ajuste por MCO y por RFE.

Técnica de ajuste	Parámetro	Estimación	Error estándar	Valor de t	Significancia
MCO	α	12.745700	0.302450	42.14	<.0001
	β	-2.189370	0.090730	-24.13	<.0001
	σ	0.57644			
RFE-MSN	α	13.502400	0.299869	45.03	<.0001
	β	-2.176169	0.088676	-24.54	<.0001
	σ_v	0.445702	0.059947	7.43	<.0001
	σ_u	1.006725	0.102813	9.79	<.0001
	logLik	-280.018350			
	AIC	568.036710			
	SchC	582.154420			
	σ	1.100980			
	λ	2.258740			
RFE-MNT	α	13.377648	0.312935	42.75	<.0001
	β	-2.179757	0.086509	-25.2	<.0001
	σ_v	0.486052	0.066158	7.35	<.0001
	σ_u	1.437639	0.851967	1.69	0.0915
	μ	-1.945217	4.316169	-0.45	0.6522
	logLik	-279.626350			
	AIC	569.252690			
	SchC	586.899840			
	σ	1.517580			
	λ	2.957790			
RFE-MNE	α	13.291698	0.285911	46.49	<.0001
	β	-2.183796	0.084598	-25.81	<.0001
	σ_v	0.518719	0.050966	10.18	<.0001
	σ_u	0.564340	0.078648	7.18	<.0001
	logLik	-280.051220			
	AIC	568.102440			
	SchC	582.220150			
	σ	0.766520			
	λ	1.087950			

logLik = Logaritmo de verosimilitud; AIC = Criterio de información de *Akaike*; SchC = Criterio de *Schwarz*; σ = Varianza del error estimado como $(\sigma^2_u + \sigma^2_v)^{0.5}$; λ = Estadístico de ajuste Lambda estimado como la razón de varianzas σ_u/σ_v.

Sin embargo, para definir la línea de autoaclareo con la técnica de MCO es necesaria la intervención manual posterior al ajuste, debido a que la línea ajustada corresponde al promedio de la nube de datos observados y no al límite superior absoluto; tal situación ocasiona que la determinación de la referida línea en la frontera superior de los datos sea ineficiente, ya que para modificar el valor del intercepto se utiliza alguna metodología que considera diferentes criterios, como que coincida el número de árboles determinado por el IDR máximo (Comeau *et al*., 2010); o bien aumentar el valor del intercepto en 1.96 desviaciones estándar del error del modelo (Gezan *et al*., 2007).

Estos enfoques son prácticos, pero resultan subjetivos para estimar la línea de auto-aclareo (Santiago-García *et al*., 2013; Quiñonez-Barraza *et al*., 2018). Además, comparativamente, la técnica de MCO es sensible al conjunto de observaciones seleccionado a máxima densidad, ya que al ajustar el modelo se puede producir una línea de autoaclareo con pendiente inapropiada (Zhang *et al*., 2005). Por esas razones, se decidió seleccionar la mejor calidad de ajuste entre las diferentes modalidades probadas de la técnica de RFE, lo que garantiza que se obtenga una línea del máximo absoluto en forma directa e inmediata, y que técnicamente, es el límite correcto (Bi, 2004; Comeau *et al*., 2010).

La evaluación comparativa y un sistema de calificación implementado para seleccionar la mejor calidad de ajuste entre las diferentes modalidades al usar RFE revelan que la modalidad de MSN fue superior, ya que presentó los valores más bajos en los estadísticos de ajuste que corresponden al criterio de información de *Akaike* (AIC), y al criterio de información de *Schwarz* (SchC); así como con los segundos mejores valores del logaritmo de verosimilitud (logLik), de la varianza total del error (σ) y de la razón de varianzas de los componentes del error (λ), aunados a la alta significancia de los parámetros (cuadro 2 y 3). Adicionalmente, presentó la menor varianza del componente del error de medición (σ_v), y el segundo menor valor en la varianza del componente del error relativo al término de ineficiencia técnica de los datos observados (σ_u).

Cuadro 3. Evaluación comparativa y calificación de los estadísticos de bondad de ajuste para las diferentes modalidades analizadas de la técnica de RFE.

Modalidad de ajuste	**Calificación de los estadísticos de ajuste**					**Calificación total**
	logLik	**AIC**	**SchC**	**σ**	**λ**	
RFE-MSN	2	1	1	2	2	8
RFE-MNT	1	3	2	3	3	12
RFE-MNE	3	2	3	1	1	10

logLik = Logaritmo de verosimilitud; AIC = Criterio de información de *Akaike*; SchC = Criterio de *Schwarz*; σ = Varianza del error estimado como $(\sigma^2_u + \sigma^2_v)^{0.5}$; λ = Estadístico de ajuste Lambda estimado como la razón de varianzas σ_u/σ_v.

Este resultado se ratificó mediante una comparación e inspección visual grafica de la línea de autoaclareo que cada ajuste genera (Figura 2), lo cual confirmó que el ajuste por RFE-MSN tuvo un mejor patrón, ya que la línea se ajusta mejor al límite superior de los datos observados, que produjo la mejor definición de la frontera máxima; y por tanto, de la línea de autoaclareo.

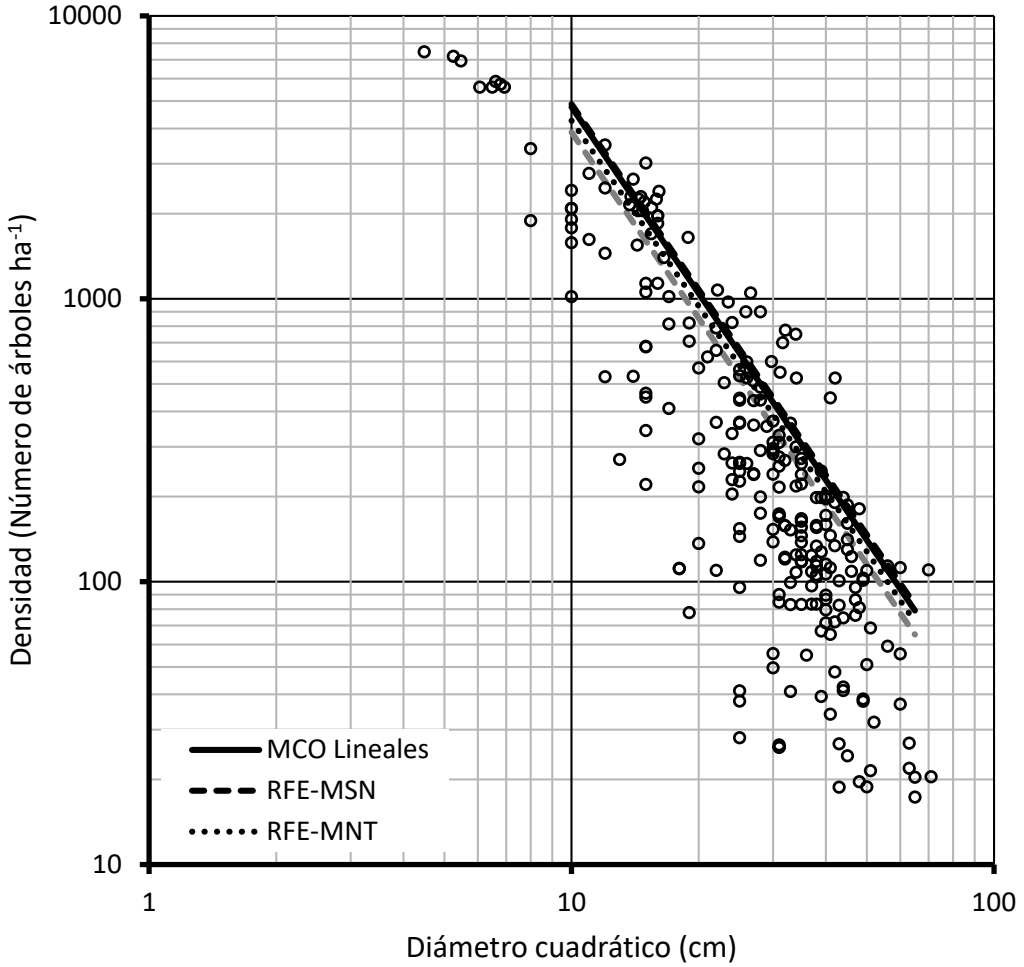

Figura 2. Comportamiento gráfico de la línea de autoaclareo generada a partir de la función tamaño-densidad de *Reineke* por las técnicas de ajuste evaluadas.

Al respecto, Zhang *et al*. (2005) señalan que esta modalidad de ajuste es el método de regresión más apropiado para estimar los coeficientes de la función de *Reineke* y la posterior línea de autoaclareo, ya que es posible utilizar la totalidad de la información N-Dq disponible de parcelas o sitios que se localizan cerca de un límite superior. Burkhart y Tomé (2012) refieren que con ello se elimina la necesidad de construir, de manera subjetiva, la base de datos para estimar los valores extremos de la función tamaño-densidad; con ese propósito se ha utilizado en diferentes especies de coníferas y de latifoliadas (Weiskittel *et al*.,

2009; Comeau *et al*., 2010; Reyes-Hernandez *et al*., 2013; Zhang *et al*., 2013; Lopes *et al*., 2016; Martínez, 2017).

La prueba de *Wald* y de razón de verosimilitud demostraron que el valor de la pendiente (β) del modelo tamaño-densidad, estimado mediante RFE-MSN, es estadísticamente diferente (con α=0.05) del valor teórico propuesto por Reineke (1933), de -1.605. Resultado que coincide con lo registrado por Reyes-Hernandez *et al*. (2013), quienes usaron la misma técnica y modalidad de ajuste en rodales de *Picea glauca* (Moench) Voss de la región de Alberta, Canadá, cuyo valor de la pendiente fue de -1.96. Sin embargo, es diferente a lo determinado por Santiago-García *et al*. (2013) para *P*. *patula* en la región de Zacualtipán, donde el intervalo de confianza al 95 % para el valor de la pendiente de -1.565 ±0.208 sí incluyó al valor teórico. En ese sentido, el intervalo al 95 % de confianza aquí determinado, para el parámetro en cuestión, fue de -1.998 a -2.341, el cual también es diferente al registrado por Quiñonez-Barraza *et al*. (2018) de -1.714 a -1.910, quienes usaron la misma técnica y modalidad para un grupo de especies del género *Pinus* en Durango, México.

En este contexto, se reafirma el argumento de que la pendiente (β) no siempre está cerca del valor teórico y que puede diferir significativamente entre taxones (Comeau *et al*., 2010; Santiago-García *et al*., 2013), lo cual se debe, en parte, a que distintas poblaciones presentan diferentes tasas de mortalidad, en función de su densidad, hábitos de crecimiento, factores de la productividad del sitio e incluso la edad de la masa (Bi *et al*., 2000; Weiskittel *et al*., 2009; Reyes-Hernandez *et al*., 2013). Lo anterior, conduce a la necesidad de desarrollar una alometría particular para cada especie de interés y con ello, evitar que se presenten errores al estimar y controlar la densidad (Pretzsch y Biber, 2005).

El IDR máximo estimado con el ajuste de RFE-MSN, cuando se usó un Dq de referencia de 20 cm, fue de 1 078 árboles, el cual difiere del documentado por Santiago-García *et al*. (2013) de 1 662 para la misma especie en la región de Zacualtipán, Hidalgo; en donde determinaron que la mejor técnica de ajuste fue la de RFE en su modalidad de MNT.

El IDR máximo es menor al que se estima en el estudio de Monroy (1997) para la misma especie en Huayacocotla, Veracruz, de 1 215 árboles con el Dq de referencia de 20 cm, en la que la función fue ajustada en su forma no lineal por MCO, con información de 42 sitios de muestreo temporales. También, el IDR máximo es diferente al consignado por Quiñonez-Barraza *et al*. (2018) de 1 603 para el mismo valor del Dq de referencia, en taxa de *Pinus* en Durango, México, mediante la técnica de RFE en la modalidad de MNT como la mejor para definir la línea de autoaclareo.

Construcción y uso del diagrama para manejar la densidad

Con base en la línea de máxima densidad, que en este caso correspondió a la que se derivó del ajuste bajo el enfoque de RFE-MSN, se construyó el diagrama para el manejo de la densidad de rodales coetáneos y uniespecíficos de *P*. *patula*. El número de árboles estimados, para los valores límites, en porcentaje del IDR, que define cada línea que delimita las zonas de crecimiento fueron 270, 380, 700 y 1 078 árboles ha^{-1}, para 25 %, 35 %, 65 % y 100 %, respectivamente; que a su vez, corresponden a las líneas de crecimiento libre (1), de transición (2), de máximo crecimiento por hectárea (3) y de autoaclareo (4) (Figura 3).

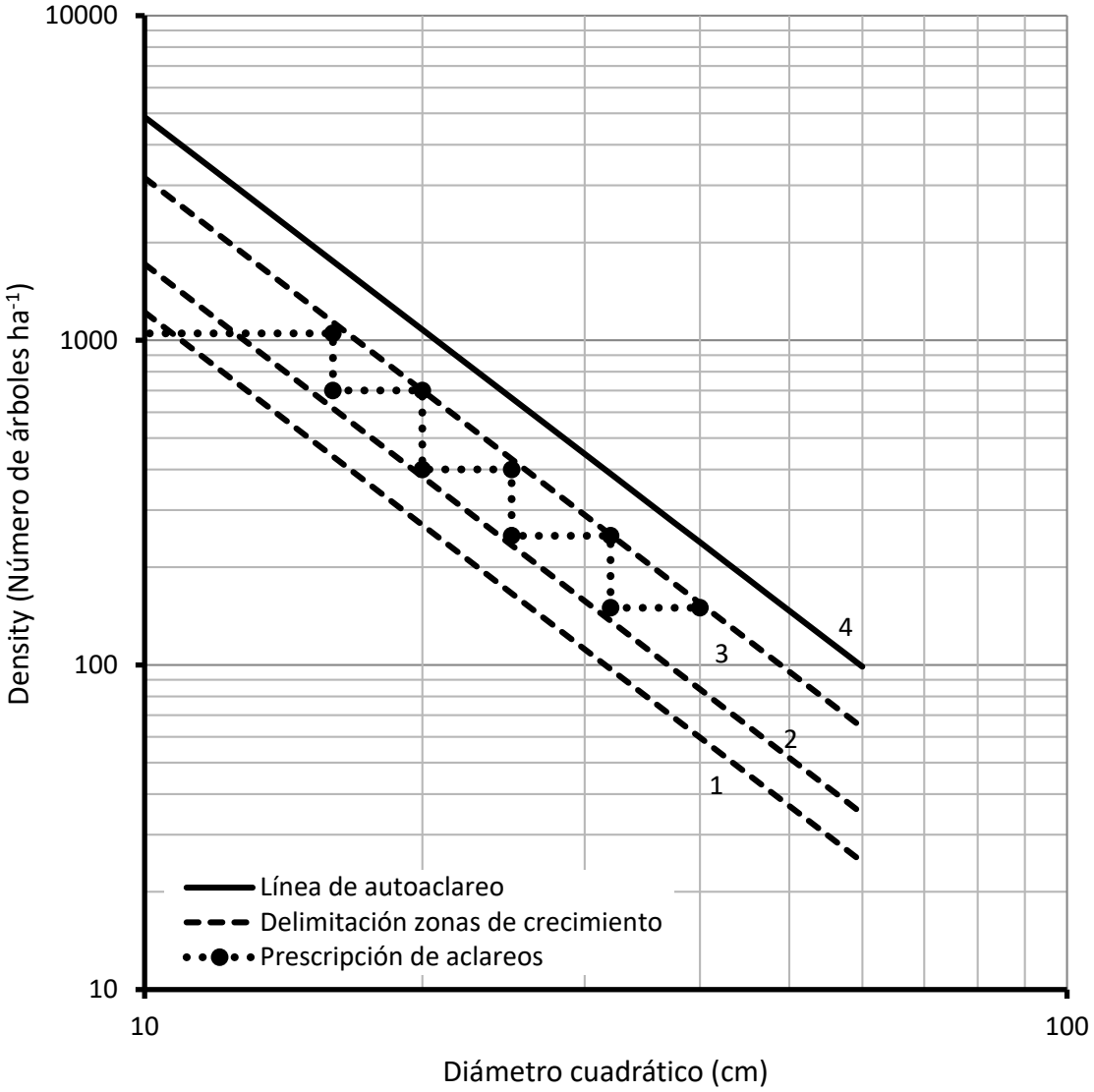

Figura 3. DMD basado en el IDR de *Reineke* para *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham. y ejemplo de prescripción de un programa de aclareos.

A partir del hecho de que el manejo de la densidad es el medio más eficiente de que dispone el silvicultor para alcanzar el objetivo de producción maderable de un rodal, y bajo el supuesto de que la densidad inicial es el punto de partida para prescribir un régimen de aclareos, y que después de practicar un aclareo no existe mortalidad por competencia; por lo que la densidad se mantiene constante hasta un siguiente aclareo.

Como ejemplo de la utilidad práctica y operativa del DMD, se ilustra la forma en que se genera un programa de aclareos como tratamientos silvícolas (cortas intermedias). Se parte de una densidad inicial (N) de 1 050 árboles ha^{-1} y se asume un valor teórico de Dq=1 cm, y que para cualquier densidad de un rodal, existe un tamaño máximo promedio en Dq o su equivalente en área basal que puede ser alcanzado, por lo que antes de que se llegue a la zona 4 de mortalidad inminente, se aplica un primer aclareo, en donde se procura que la densidad residual se ubique en el límite inferior de la zona de crecimiento 3 y, en este caso, se alcance un Dq=16 cm.

Desde ese punto, se deja crecer la masa hasta que su crecimiento en Dq, nuevamente, se presente en la vecindad de la línea de autoaclareo, y se requiera la práctica de un segundo aclareo (Figura 3).

Bajo los mismos criterios pueden realizarse aclareos subsecuentes hasta tener el crecimiento máximo posible en Dq, y lograr la densidad óptima deseada. Para maximizar la producción, la densidad de la masa debe mantenerse durante la mayor parte del turno entre la zona 3 y el comienzo de la zona 4.

En el Cuadro 3, para el ejemplo planteado, se presentan los respectivos valores de densidad y su equivalente en área basal por remover y el residual en cada aclareo, además de la intensidad de corta correspondiente. En este caso, en la cosecha final se tendrían 150 árboles con un Dq promedio de 40 cm, que equivaldría a un área basal de 18.8 m^2 ha^{-1}.

Cuadro 3. Programa de aclareos en términos del número de árboles, diámetro cuadrático y área basal para *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham.

Tratamiento silvícola	Densidad§ (N ha^{-1})	Dq† (cm)	I¶ (%)	Árboles 1	Árboles 2	Área basal 3	Área basal 4	Área basal 5
Preaclareo	1050 - 700	1 - 16	33	350	700	21.1	7.0	14.1
Primer aclareo	700 - 400	16 - 20	43	300	400	22.0	9.4	12.6
Segundo aclareo	400 - 250	20 - 25	38	150	250	19.6	7.4	12.3
Tercer aclareo	250 - 150	25 - 32	40	100	150	20.1	8.0	12.1

§ = Número de árboles antes y después de aplicar el aclareo; † = Crecimiento del diámetro cuadrático al aplicar el aclareo; ¶ = Intensidad de aclareo; 1 = Cantidad de árboles extraídos (N ha^{-1}); 2 = Cantidad de árboles remanentes (N ha^{-1}); 3 = Área basal total (m^2 ha^{-1}); 4 = Área basal extraída (m^2 ha^{-1}); 5 = Área basal residual (m^2 ha^{-1}).

De manera similar, con el DMD es posible prescribir un programa de aclareo para un rodal en determinada etapa de desarrollo; para ello, con base en un sistema de crecimiento y rendimiento maderable, o bien mediante sitios de muestreo para inventario maderable, se determina su densidad a nivel de hectárea y su respectivo Dq, procediéndose a determinar el IDR en que está el rodal en cuestión; o sobre el DMD se ubica el punto (N, Dq) en función de la zona de crecimiento en que este se localice, y se define la necesidad o no de aplicar un aclareo. Así, conforme a los criterios antes señalados, se analizan diferentes regímenes alternativos de manejo de la densidad y finalmente, se define el más apropiado con base en los objetivos de manejo y producción.

Con relación al primer aclareo, a pesar de que las dimensiones del producto que arroja no son comerciales, debe pensarse que el costo por realizarlo es en realidad una inversión, cuyo retorno y ganancia se reflejará en la cosecha final. Respecto al último aclareo, debe ser selectivo y efectuarse con más cuidado y conocimiento técnico. Hay

que tener presente, que a menor calidad de sitio, mayor tiempo le tomará a un rodal alcanzar la línea de autoaclareo.

Para un determinado rodal, se espera que el incremento en volumen del fuste sea cercano al máximo, cuando la densidad relativa esté en la zona (3) (Comeau *et al*., 2010), condición en la que los árboles aprovechan en forma más efectiva el espacio de crecimiento, sin presentar mortalidad por competencia. Para maximizar crecimiento e incremento en volumen, se requiere manejar la densidad, a través de la aplicación de aclareos, lo que de acuerdo con Pérez y Kanninen (2005) lleva a estimar un volumen inferior por unidad de superficie, pero con árboles de diámetros más grandes y mejor conformados a edades más jóvenes, lo que conlleva a incrementar su valor.

La frecuencia e intensidad de los aclareos es un compromiso entre las partes silvícola y financiera, esto garantizará la obtención de árboles con las dimensiones y calidad requeridas, de acuerdo al uso industrial, en el mínimo tiempo posible. En la aplicación práctica del DMD, es fundamental el criterio del técnico que realiza el manejo para identificar los árboles que deberán ser removidos con base en los objetivos comerciales establecidos.

Conclusiones

En el ajuste de la función tamaño-densidad de *Reineke,* la técnica de regresión frontera estocástica en la modalidad de Modelo Semi-Normal es estadísticamente superior que el método de mínimos cuadrados ordinarios, por lo que es una alternativa para estimar, de forma eficiente, el límite superior de la línea de autoaclareo. El diagrama para el manejo de la densidad generado con base en el índice de densidad de rodal de *Reineke* para *P*. *patula* en la región de Chignahuapan-Zacatlán Puebla, México, permitirá gestionar en forma adecuada la densidad de sus rodales. El diagrama es una herramienta analítica para la silvicultura cuantitativa de aplicación práctica y operativa inmediata, proporciona soporte al silvicultor para tomar decisiones de manejo técnico

de los rodales de *P. patula*, ya que le permite diagnosticar y determinar la necesidad de aplicar aclareos, así como la intensidad de los mismos, en términos del número de árboles por remover y su equivalente en área basal.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

Contribución por autor

Juan Carlos Tamarit Urias: análisis estadístico de la información y elaboración del manuscrito; Gerónimo Quiñonez Barraza: colaboración en el análisis estadístico de la información y en la construcción del diagrama para el manejo de la densidad; Héctor Manuel De los Santos-Posadas: colaboración en la elaboración del manuscrito en la parte de la Introducción, de Resultados y Discusión (principalmente en la revisión de literatura especializada, además de la elaboración de figuras) y en Conclusiones; Arturo Castañeda-Mendoza: coordinación para la realización de la etapa de trabajo de campo y de la colecta de la información; además, conformación y arreglo de bases de datos bajo un arreglo predefinido de las variables analizadas para su posterior procesamiento y análisis estadístico; Wenceslao Santiago-García: colaboración en el desarrollo y redacción del apartado de Materiales y Métodos; así como en procesamiento estadístico de la información e interpretación de los Resultados.

Referencias

Bi, H. 2004. Stochastic frontier analysis of a classic self-thinning experiment. Austral Ecology 29(4): 408-417.

Bi, H., G. Wan and N. D. Turvey. 2000. Estimating the self-thinning boundary line as a density-dependent stochastic biomass frontier. Ecology 81(6): 1477-1483.

Burkhart, H. E. and M. Tomé. 2012. Modeling forest trees and stands. Springer. New York, NY USA. 457 p.

Comeau, P. G., M. White, G. Kerr and S. E. Hale. 2010. Maximum density-size relationships for Sitka spruce and coastal Douglas-fir in Britain and Canada. Forestry 83(1): 461-468.

Corral-Rivas, S., J. G. Álvarez-González, J. J. Corral-Rivas, C. Wehenkel y C. A. López-Sánchez. 2015. Diagramas para el manejo de la densidad en bosques mixtos e irregulares de Durango, México. Bosque 36(3): 409-421.

Daniel, T. W., J. A. Helms and F. S. Baker. 1979. Principles of silviculture. 2nd Edition. McGraw-Hill. New York, NY USA. 500 p.

Gezan, S. A., A. Ortega y E. Andenmatten. 2007. Diagramas de manejo de densidad para renovales de roble, raulí y coigüe en Chile. Bosque 28(2): 97-105.

Gilmore, D. W., T. C. O'Brien and H. M Hoganson. 2005. Thinning red pine plantations and the Langsaeter hypothesis: a northern Minnesota case study. Northern Journal of Applied Forestry 22(1): 19-26.

Hernández R., J., J. J. García M., H. J. Muñoz F., X. García C., T. Sáenz R., C. Flores L. y A. Hernández R. 2013. Guía de densidad para manejo de bosques naturales de *Pinus teocote* Schlecht. *et* Cham. en Hidalgo. Revista Mexicana de Ciencias Forestales 4(19): 62-76.

Jayaraman, K. and B. Zeide. 2007. Optimizing stand density in teak plantations. Journal of Sustainable Forestry 24(4): 1-22.

Kumbhakar, S. C. and C. A. K. Lovell. 2000. Stochastic frontier analysis. Cambridge University Press. New York, NY USA. 333 p.

Langsaeter, A. 1941. Om tynning i enaldret gran-og furuskog. Meddelelser fra Det norske Skogforsøksvesen 8: 131-216.

Long, J. N. 1985. A practical approach to density management. Forestry Chronicle 61(1): 23-26.

Lopes P., E., N. Calegario, G. Saraiva N., E. de Almeida M. and J. de Almeida A. 2016. Estimate of stand density index for *Eucalyptus urophylla* using different fit methods. Revista Árvore 40(5): 921-929.

Martínez L., J. 2017. Guías de densidad para masas mezcladas de San Pedro El Alto, Zimatlán, Oaxaca. Tesis de Maestría. Postgrado en Ciencias Forestales. Colegio de Postgraduados. Texcoco, Edo. de Méx., México. 99 p.

Monroy R., C. R. 1997. Evaluación de crecimiento y productividad de *Pinus patula* Schl. *et* Cham., en la región de Huayacocotla, Veracruz, México. Tesis de Maestría. Facultad de Ciencias Forestales. Universidad Autónoma de Nuevo León. Linares, N.L., México. 120 p.

Navarro C., C., M. A. Herrera, F. Drake A. y P. J. Donoso. 2011. Diagrama de manejo de densidad y su aplicación a raleo en bosques de segundo crecimiento de *Drimys winteri* en el sur de Chile. Bosque 32(2): 175-186.

Perry, J. P. 1991. The pines of Mexico and central America. Ed. Timber Press. Portland, OR USA. 231 p.

Pérez, D. and M. Kanninen. 2005. Stand growth scenarios for *Tectona grandis* plantations in Costa Rica. Forest Ecology and Management 210: 425-441.

Pretzsch, H. and P. Biber. 2005. A re-evaluation of Reineke's rule and stand density index. Forest Science 51(4): 304-320.

Pretzsch, H. 2009. Forest dynamics, growth and yield: from measurement to model. Springer-Verlag Berlin. Heidelberg, Germany. 664 p.

Quiñonez-Barraza, G., J. C. Tamarit-Urias, M. Martínez-Salvador, X. García-Cuevas, H. M. de los Santos-Posadas and W. Santiago-García, W. 2018. Maximum density and density management diagram for mixed-species forests in Durango, Mexico. Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente 24(1): 73-90.

Reineke, L. H. 1933. Perfecting a stand-density index for even-aged forests. Journal of Agricultural Research 46: 627-638.

Reyes-Hernandez, V., P. G. Comeau and M. Bokalo. 2013. Static and dynamic maximum size-density relationships for mixed trembling aspen and white spruce stands in western Canada. Forest Ecology and Management 289: 300-311.

Santiago-García W., H. M. De los Santos-Posadas, G. Ángeles-Pérez, J. R. Valdez-Lazalde, D. H. Del Valle-Paniagua y J. J. Corral-Rivas. 2013. Auto-aclareo y guías de densidad para *Pinus patula* mediante el enfoque de regresión de frontera estocástica. Agrociencia 47: 75-89.

Sakici, O. E., N. Misira, H. Yavuza and M. Misira. 2008. Stem taper functions for *Abies nordmanniana* subsp. bornmulleriana in Turkey. Scandinavian Journal of Forest Research 23(6): 522-533.

Statistical Analysis System (SAS). 2011. SAS/STAT® 9.3 User's Guide. SAS Institute Inc. Cary, NC USA. n/p.

Smith, D. M., B. C. Larson, M. J. Kelty and P. M. S. Ashton. 1997. The practice of silviculture: Applied forest ecology. Ninth Edition. John Wiley & Sons, Inc. New York, NY USA. 537 p.

VanderSchaaf,C. L. and H. E. Burkhart. 2007. Comparison of methods to estimate Reineke's maximum size-density relationship. Forest Science 53(3): 435-442.

Velázquez, A., G. Ángeles, T. Llanderal, A. Román y V. Reyes. 2004. Monografía de *Pinus patula*. Conafor/Semarnat/Colpos. Jalisco, México. 124 p.

Weiskittel, A., P. Gould and H. Temesgen. 2009. Sources of variation in the self-thinning boundary line for three species with varying levels of shade tolerance. Forest Science 55(1): 84-93.

Zhang, L., H. Bi, J. H. Gove and L. S. Heath. 2005. A comparison of alternative methods for estimating the self-thinning boundary line. Canadian Journal of Forest Research 35(6): 1507-1514.

Zhang, J., W. W. Oliver and R. F. Powers. 2013. Reevaluating the self-thinning boundary line for ponderosa pine (*Pinus ponderosa*) forests. Canadian Journal of Forest Research 43(10): 963-971.