



Modelos locales altura-diámetro para *Pinus montezumae* Lamb. y *Pinus teocote* Schiede ex Schltld. en Nanacamilpa, Tlaxcala

Local height-diameter models for *Pinus montezumae* Lamb. and *Pinus teocote* Schiede ex Schltld. in Nanacamilpa, Tlaxcala

Vidal Guerra-De la Cruz^{1*}, Fabián Islas-Gutiérrez², Eulogio Flores-Ayala², Miguel Acosta-Mireles², Enrique Buendía-Rodríguez², Fernando Carrillo-Anzures², Juan Carlos Tamarit-Urías³ y Tomas Pineda-Ojeda²

Abstract

Field measurement of total height of standing trees imposes practical difficulties that increases time and costs of forest inventories. Moreover, height measurement is prone to mistakes especially in forests with dense understories. Allometric equations are a suitable option to estimate efficiently total height as a function of tree diameter. The aim of this study was to analyze allometric models to fit the total height-normal diameter relation for *Pinus montezumae* and *P. teocote* trees in the forest region of *Nanacamilpa, Tlaxcala*. Database consisted of 583 pairs of total height-normal diameter measurements for *P. montezumae* and 486 pairs for *P. teocote* covering a wide range of diameter classes. We evaluated 14 nonlinear and one linear models with regression analysis using the MODEL and REG procedures of SAS[®] respectively. Goodness of fit was assessed with R^2_{adj} , bias, root mean squared error, sum square error, mean square error, and Akaike's information criterion. The best model for *P. montezumae* was Yang's model (M2) with an $R^2_{adj}=0.91$, whereas the quadratic model (M10) was the best for *P. teocote* with an $R^2_{adj}=0.87$. Such models described with precision the relationship between height and diameter these tree species in the western region of the state of *Tlaxcala*.

Key words: Central Mexico, forest management, growth models, pines, non-linear regression, allometric relations.

Resumen

La medición en campo de la altura total de los árboles implica dificultades prácticas que incrementan los tiempos y costos del inventario. Además, su medición está propensa a errores, en particular en sitios con sotobosques densos. Las relaciones alométricas son una alternativa viable para estimar en forma eficiente la altura en función del diámetro normal. El objetivo de este estudio fue analizar modelos de crecimiento y alométricos para determinar el de mejor ajuste en la relación altura-diámetro para árboles de *Pinus montezumae* y *Pinus teocote* de la región forestal Nanacamilpa, Tlaxcala. Para el análisis, se obtuvieron 583 pares de datos de diámetro normal-altura total para *P. montezumae* y 468 pares para *P. teocote*. La muestra abarcó un amplio intervalo de categorías diamétricas. Se evaluaron 14 modelos no lineales y uno lineal, mediante análisis de regresión con el procedimiento MODEL de SAS[®] para los no lineales, y REG para el lineal. La bondad de ajuste se evaluó con base en la R^2_{adj} , el sesgo, la raíz del error cuadrático medio, la suma de cuadrado del error, el cuadrado medio del error y el criterio de información de Akaike. El mejor modelo para estimar la altura de *Pinus montezumae* fue el propuesto por Yang (M2) con una $R^2_{adj}=0.91$, y para *P. teocote* el cuadrático (M10) con una $R^2_{adj}=0.87$. Ambos modelos describen con precisión la relación alométrica entre el diámetro y la altura en árboles de las especies estudiadas en la región occidental del estado de Tlaxcala.

Palabras clave: Centro de México, manejo forestal, modelos de crecimiento, pinos, regresión no lineal, relaciones alométricas.

Fecha de recepción/Reception date: 8 de agosto de 2018

Fecha de aceptación/Acceptance date: 15 de octubre de 2018

¹*INIFAP-CIR-Centro-Sitio Experimental Tlaxcala. México. Correo-e: guerra.vidal@inifap.gob.mx

²INIFAP-CIR-Centro-Campo Experimental Valle de México. México.

³INIFAP-CIR-Golfo Centro-Campo Experimental San Martinito. México.

Introducción

El manejo forestal con fines maderables requiere mediciones precisas de los atributos o variables de los árboles para tener estimaciones confiables que faciliten una adecuada toma de decisiones. Entre las variables más importantes que se miden en los inventarios forestales están la altura total y el diámetro normal (a 1.3 m) de los individuos arbóreos, las cuales son básicas para estimar los volúmenes de madera o biomasa (Xionweng y Brockway, 2017); también son esenciales para estudios de crecimiento y rendimiento de árboles individuales, por lo que su utilidad es reconocida en la ejecución del manejo técnico (Peng *et al.*, 2001; Osman *et al.*, 2013).

Sin embargo, la medición en campo de la altura total de los árboles en pie, a diferencia del diámetro normal, implica dificultades prácticas que incrementan los tiempos y costos del inventario (Trincado y Leal, 2006; Sharma, 2009). Además, su medición está propensa a errores, en particular en bosques con sotobosques densos o donde coexisten árboles de distintas edades, especies, tamaños, vigor o clases de copa (Temesgen *et al.*, 2014; Arnoni *et al.* 2016).

Una alternativa que supera las limitaciones referidas consiste en estimar la altura total como una función del diámetro normal, el cual se mide con mayor facilidad y precisión; para ello se utilizan modelos matemáticos que relacionan las dos variables (Trincado y Leal, 2006). Con ese fin se han desarrollado modelos lineales y no lineales, en su mayoría asintóticos, que permiten calcular con certidumbre la altura total de un árbol en función de su diámetro normal (Rijal *et al.*, 2012; Arnoni *et al.*, 2016; Duan *et al.*, 2018). Clutter *et al.* (1983), Ahmadi *et al.* (2013) y Mehtätalo *et al.* (2015) consideran que la estimación a través de modelos no lineales es mucho mejor que con modelos lineales.

Asimismo, se recomienda que los modelos sean determinados por separado para cada especie de interés (Misir, 2010; VanderSchaaf, 2014; Sharma y Breidenbach, 2015) y por región (Crecente-Campo *et al.*, 2010; Coble y Young-Jin, 2011). Algunos estudios señalan que estas relaciones son particulares y dependientes de las condiciones del sitio, por lo que es común obtener modelos locales (Corral-Rivas *et al.*, 2014) de aplicación restringida, o bien

incorporar en los modelos algunas características del sitio o atributos del rodal (*i.e.* la densidad, altura dominante, estructura, entre otras) que también influyen en la relación altura-diámetro (Gonzalez-Benecke *et al.*, 2013; Ahmadi y Alavi, 2016), lo que permite obtener modelos generalizados (Corral-Rivas *et al.*, 2014; Hernández *et al.*, 2015) cuyo ámbito de aplicación es más amplio.

En la actualidad, existen varios modelos para describir de manera apropiada el comportamiento de la altura total en función del diámetro normal, los cuales se han usado ampliamente en otros países (Arnoni *et al.*, 2016; Ahmadi y Alavi, 2016). Por ejemplo, modelos como los de *Chapman-Richards*, *Weibull*, *Schnute*, el logístico modificado y la función exponencial son de amplia aplicación por sus capacidades predictivas (Peng *et al.*, 2001; Temesgen *et al.*, 2014; Ahmadi y Alavi, 2016).

Sin embargo, a pesar de su relevancia, en México son escasos los estudios en los que se estima la altura total en función del diámetro normal; por ejemplo, Valdez-Lazalde y Lynch (2000) ajustaron dicha relación con modelos no lineales para *Pinus patula* Schiede ex Schtdl. et Cham. en el estado de Puebla; Hernández *et al.* (2015) compararon 13 modelos generalizados para analizar la relación diámetro-altura para *Pinus teocote* Schtdl. et Cham.; en tanto que Corral-Rivas *et al.* (2014) probaron 27 modelos y determinaron que el modelo *Bertalanffy-Richards* fue el que presentó mejores ajustes para seis de 13 grupos de especies de coníferas y latifoliadas.

Pinus montezumae Lamb. y *P. teocote* son especies de importancia comercial maderable, de distribución amplia en el país. El primero, alcanza en algunos sitios hasta 35 m de altura y diámetros de 1.0 m; en tanto, *P. teocote* es un árbol de porte mediano, con copa redondeada e irregular, que alcanza entre 10 y 20 m de altura, aunque los valores máximos registrados son de 75 cm de diámetro y hasta 25 m en altura (Perry, 1991; Martínez, 1992). Los dos taxones se aprovechan de manera comercial en varias regiones de México, como es el caso de la región Calpulalpan-Nanacamilpa en el estado de Tlaxcala, cuyo historial de manejo forestal se remonta a más de tres décadas (Guerra *et al.*, 2008). Debido a su amplia distribución geográfica en el territorio nacional, es posible esperar variaciones importantes en su alometría;

no obstante, en la región de estudio se carece de modelos que describan su relación altura total-diámetro normal (h-d).

Por lo anterior, el objetivo del presente estudio fue analizar 15 modelos estadísticos y proponer el de mejor calidad de ajuste para estimar la altura total en función del diámetro normal para árboles de *Pinus montezumae* y *P. teocote* en la región forestal de Nanacamilpa, en Tlaxcala, México.

Materiales y Métodos

Área de estudio

La región de estudio se ubica en la parte occidental de Tlaxcala, México. Limita al norte con la región de Calpulalpan y al sur con el estado de Puebla; la región de Nanacamilpa está incluida en su totalidad dentro de la región fisiográfica del Eje Neo-volcánico Transversal, entre las coordenadas geográficas 19°27'30" y 19°30'38" de latitud norte y 98°38'17" y 98°32'17" de longitud oeste (Figura 1). Presenta un intervalo altitudinal de 2 600 a 3 300 m; con clima del tipo C(w₂), templado-subhúmedo, con lluvias en verano, temperatura media anual de entre 12 °C y 18 °C (Inegi, 2009).

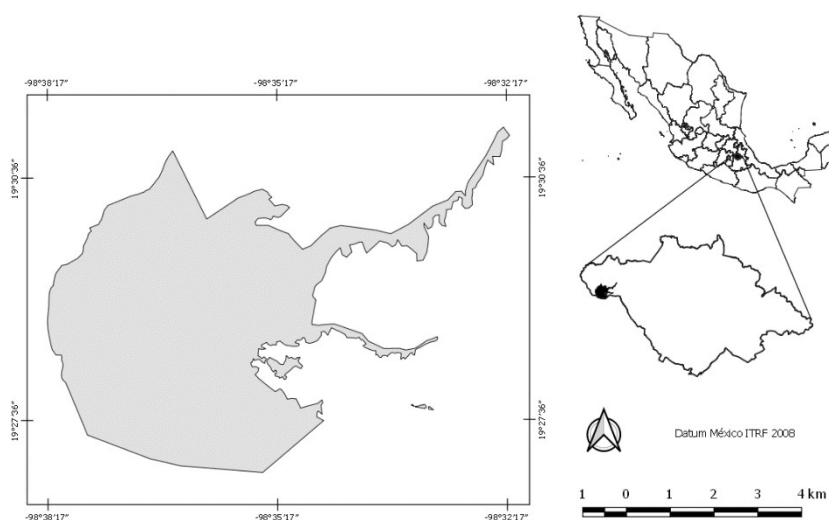


Figura 1. Ubicación de la región forestal de Nanacamilpa, Tlaxcala.

Los tipos de vegetación más representativos corresponden a los bosques de coníferas y latifoliadas, cuyas especies más sobresalientes son *Pinus montezumae*, *P. teocote*, *P. pseudostrobus* Lindl., *Abies religiosa* (Kunth) Schlttdl. & Cham. y *Quercus laurina* Bonpl., las cuales se desarrollan sobre cambisoles húmicos y eutricos, así como en andosoles húmicos de texturas arcillosa y arcillo-limosas (Inegi, 2009). El manejo forestal en la región se desarrolló, inicialmente, bajo el sistema regular que incluye cortas de regeneración y aclareos a lo largo del turno (Guerra *et al.*, 2008).

Obtención de datos de campo

La información de campo se obtuvo a través del levantamiento de sitios de muestreo para inventario, cuya forma y distribución se basó en el diseño utilizado en el Inventario Nacional Forestal y de Suelos que considera a un conglomerado como unidad primaria, compuesto por cuatro parcelas de 400 m² como unidades de muestreo secundarias (Conafor, 2012). Se establecieron 16 conglomerados distribuidos de forma sistemática en el área de estudio, en los que se realizó la medición de las variables dasométricas de interés de todos los árboles vivos, completos y sanos, cuyo diámetro normal (1.3 m del nivel del suelo) fuera igual o mayor a 7.5 cm. Además, se incluyeron 186 árboles de *P. teocote* con diámetros superiores a 30 cm, que fueron escasos en las parcelas de muestreo.

El diámetro normal se midió con una cinta diamétrica marca *Richter*[®] de 5 m, en tanto que la altura total se obtuvo con un hipsómetro digital *Vertex III Haglof*[®] con un transmisor ultrasónico T3. Aunque se consideraron todas las especies arbóreas de cada unidad secundaria de muestreo, para el estudio solo se integraron los datos de *P. montezumae* y *P. teocote*, por ser las taxa mejor representados en el área, cuya densidad promedio es de 231 y 112 árboles ha⁻¹, respectivamente. Con esta información se conformó una base de datos para el análisis de regresión, que incluyó un total de 583 pares de datos de diámetro normal-altura total para *P. montezumae* y de 468 pares para *P. teocote*. Los estadísticos descriptivos se presentan en el Cuadro 1.

Cuadro 1. Estadísticos básicos de las variables analizadas de las dos especies estudiadas.

Estadístico	<i>Pinus montezumae</i>		<i>Pinus teocote</i>	
	d (cm)	h (m)	d (cm)	h (m)
Mínimo	7.5	2.5	7.5	4.9
Máximo	80.9	42	80.9	32.1
Promedio	26.7	17.73	24.9	15.7
Desviación estándar	19.962	10.502	17.102	6.341
Coefficiente de variación	0.75	0.59	0.69	0.40
Curtosis	-0.88	-1.32	0.13	-0.52
Asimetría	0.76	0.50	1.09	0.75

d = Diámetro normal (1.30 m); h = Altura total

Análisis estadístico

Se ajustaron los datos altura-diámetro de *P. montezumae* y *P. teocote* mediante análisis de regresión lineal y no lineal; se probaron 14 modelos no lineales utilizados de manera extensa en la literatura especializada sobre biometría forestal (Cuadro 2). Debido a que en las bases de datos solo se incluyeron árboles con diámetro normal ≥ 7.5 cm y, por tanto, no se midieron diámetros cercanos o iguales a cero, en ningún caso se integró de manera explícita la constante de 1.3 en los modelos, la cual condiciona a que la altura estimada sea de 1.3 m cuando el diámetro normal es igual a cero. Además, en términos prácticos, pocas veces se requiere estimar alturas de diámetros cercanos a cero, por lo que su interés es teórico (Trincado y Leal, 2006).

Aunque la mayoría de los estudios sobre la relación h-d consideran modelos no lineales por ser los que mejor describen el crecimiento, en este caso se consideró un modelo con estructura lineal en los parámetros (M10), ya que en algunos casos ha mostrado buenos resultados en el ajuste de este tipo de relaciones (García *et al.*, 2017).

Cuadro 2. Modelos utilizados para determinar la altura total a partir de diámetro normal de *Pinus montezumae* Lamb. y *Pinus teocote* Schiede ex Schldl.

Identificador	Modelo	Referencia
(M1)	$h = \beta_0 [1 - e^{\beta_1 d}]^{\beta_2}$	Clutter <i>et al.</i> (1983)
(M2)	$h = \beta_0 [1 - e^{\beta_1 d^{\beta_2}}]$	Temesgen <i>et al.</i> (2014)
(M3)	$h = e^{\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{d + \beta_2}\right)}$	Temesgen <i>et al.</i> (2014)
(M4)	$h = \beta_0 e^{(-\beta_1 d^{-\beta_2})}$	Castillo-Gallegos <i>et al.</i> (2018)
(M5)	$h = \frac{d^{\beta_0}}{\beta_1 + \beta_2 d^{\beta_0}}$	Castillo-Gallegos <i>et al.</i> (2018)
(M6)	$h = \frac{\beta_0 d}{\beta_1 + d}$	Castillo-Gallegos <i>et al.</i> (2018)
(M7)	$h = \beta_0 d^{(\beta_1 + \beta_2 d)}$	Sharma (2009)
(M8)	$h = \frac{\beta_0}{1 + \beta_1^{-1} d^{-\beta_2}}$	Castillo-Gallegos <i>et al.</i> (2018)
(M9)	$h = \beta_0 + \beta_1 d^{\beta_2}$	García <i>et al.</i> (2017)
(M10)	$h = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 d^2$	García <i>et al.</i> (2017)
(M11)	$h = \beta_0 e^{\beta_1 \left(\frac{1}{d}\right)}$	García <i>et al.</i> (2017)
(M12)	$h = e^{\beta_0 + \beta_1 \ln(d)}$	García <i>et al.</i> (2017)
(M13)	$h = \beta_0 \left(1 + \frac{1}{d}\right)^{-\beta_1}$	Castillo-Gallegos <i>et al.</i> (2018)
(M14)	$h = \beta_0 \left(-\ln\left(\frac{1}{d}\right)\right)^{\beta_1}$	Castillo-Gallegos <i>et al.</i> (2018)
(M15)	$h = \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{d}\right)^{-\beta_2}$	Castillo-Gallegos <i>et al.</i> (2018)

h = Altura total; d = Diámetro normal; β_i = Parámetros del modelo.

El análisis de regresión se realizó con el programa SAS® ver 9.3 (SAS, 2011). Para los modelos no lineales se usó el procedimiento *MODEL*, mediante cuadrados mínimos ordinarios, mientras que para el modelo lineal se empleó el procedimiento REG del mismo programa de análisis estadístico. La bondad de ajuste de cada modelo se evaluó con el coeficiente de determinación corregido por el número de parámetros (R^2_{adj}) como indicador de la proporción de la varianza explicada por la variable independiente, el sesgo, la raíz del error cuadrático medio (RECM), la suma de cuadrados del error (SCE), el cuadrado medio del error (CME), la significancia de los estimadores y el criterio de información de *Akaike* (AIC). Este último, es un criterio muy confiable al comparar modelos con diferente número de parámetros (Sharma, 2009).

Para mayor objetividad en la selección del mejor modelo por especie, los criterios de bondad de ajuste indicados se jerarquizaron con base en el procedimiento descrito por Tamarit *et al.* (2014), para generar un índice de calidad cuyo valor total permitió identificar más fácilmente al modelo con el mejor ajuste en cada caso. Aunque los criterios de ajuste estadístico fueron la base principal para la selección del mejor modelo, también se analizó su congruencia biológica, dado que esta es una característica deseable en cualquier modelo de crecimiento (Sharma, 2009). Algunos autores han indicado la importancia de considerar la capacidad predictiva de los modelos, en particular en alturas de árboles de mayores dimensiones (Moore *et al.*, 1996; Zhao *et al.*, 2006), lo que implica la búsqueda de un comportamiento razonable de la curva ajustada en todo el intervalo de datos, con atención especial en el límite superior.

Debido a lo anterior, el comportamiento asintótico de la curva de cada especie se juzgó en función de los valores máximos de crecimiento en altura citados en la literatura y en los datos observados. Así, la descripción gráfica del modelo dentro y fuera del intervalo de los datos observados fue un criterio adicional para la selección. Asimismo, se verificó el cumplimiento de los supuestos básicos de la regresión (*i.e.* la normalidad en la distribución de los errores), a través de la prueba de *Shapiro-Wilk*, junto con el análisis gráfico de los residuales para observar las tendencias antes de hacer inferencias sobre los estimadores de los parámetros en cada modelo (Kutner *et al.*, 2005).

Resultados y Discusión

Pinus montezumae

El ajuste de los modelos analizados se muestra en el Cuadro 3. Se observa que, en general, todos los modelos probados para *P. montezumae*, sin importar su forma y número de parámetros, mostraron buenos ajustes dado que la varianza explicada (R^2_{adj}) por la variable independiente fue mayor a 89 % en todos los casos.

Cuadro 3. Estadísticos de bondad de ajuste de los modelos analizados para *Pinus montezumae* Lamb.

Modelo	SCE	CME	RECM	R^2_{adj}	Sesgo	AIC	Calificación Total
M1	5 557.8	9.58	3.10	0.91	0.03	1 320.53	(29)
M2	5 538.2	9.55	3.09	0.91	0.05	1 318.48	(28)
M3	5 582.9	9.63	3.10	0.91	0.01	1 323.16	(31)
M4	5 772.1	9.95	3.16	0.91	0.02	1 342.59	(58)
M5	5 621.4	9.69	3.11	0.91	0.04	1 327.16	(40)
M6	5 747.6	9.89	3.15	0.91	-0.06	1 338.11	(47)
M7	5 487.9	9.46	3.08	0.91	0.04	1 313.16	(21)
M8	5 621.4	9.69	3.11	0.91	0.04	1 327.16	(47)
M9	5 936.8	10.24	3.20	0.91	0.0004	1 358.99	(64)
M10	5 477.7	9.44	3.07	0.91	0.001	1 312.07	(10)
M11	6 803.6	11.71	3.42	0.89	0.20	1 436.44	(90)
M12	6 357.6	10.94	3.31	0.90	-0.09	1 396.91	(66)
M13	6 634.2	11.42	3.38	0.90	0.19	1 421.74	(84)
M14	5 858.9	10.08	3.18	0.91	-0.002	1 349.29	(58)
M15	5 656.3	9.75	3.12	0.91	0.02	1 330.77	(47)

R^2_{adj} = Coeficiente de determinación ajustado; $RMSE$ = Raíz del error cuadrático medio; SSE = Suma de cuadrados del error; MSE = Error cuadrado medio; AIC = Criterio de información de Akaike.

El índice de calidad de ajuste, dado por la calificación total de cada modelo, evidencia que los cinco mejores modelos son M10, M7, M2, M1 y M3 (todos con tres parámetros) por ser los que menores valores acumularon; es decir, son los que mostraron los mejores valores de todos los criterios de ajuste. Cabe hacer notar que los modelos de dos parámetros (M6, M11-M14) tuvieron valores pobres en los errores (*SCE*, *CME* y *RECM*) por lo que sus calificaciones globales resultaron, en general, menos adecuadas que los de tres parámetros. Además, tres de ellos no cumplieron con el supuesto de normalidad en los residuales, por lo que fueron descartados en la selección.

Aunque la evaluación con el índice sugiere cuales modelos tuvieron mejor comportamiento estadístico, al observar la significancia de los estimadores de cada modelo se observa que todos resultaron significativos, excepto el mejor calificado (M10), que presenta un parámetro (b_0) no significativo (Cuadro 4), razón por la que también se desestimó.

Cuadro 4. Valores y significancia de los estimadores de los modelos analizados para *Pinus montezumae* Lamb.

Modelo	b_0	Pr > t 	b_1	Pr > t 	b_2	Pr > t
M1	40.145	<.0001	0.031	<0.0001	0.144	0.0039
M2	38.681	<.0001	-0.018	<0.0001	1.135	<0.0001
M3	4.049	<.0001	-38.875	<0.0001	10.547	<0.0001
M4	113.019	<.0001	6.653	<0.0001	0.412	<0.0001
M5	1.219	<.0001	1.623	<0.0001	0.019	<0.0001
M6	72.625	<.0001	71.206	<0.0001		
M7	0.826	<.0001	1.037	<0.0001	-0.002	<0.0001
M8	51.746	<.0001	0.012	<0.0001	1.219	<0.0001
M9	-15.519	0.0009	9.941	0.0012	0.388	<0.0001
M10	0.188	0.6196	0.909	<0.0001	-0.006	<0.0001
M11	42.222	<.0001	-16.945	<0.0001		
M12	0.583	<.0001	0.716	<0.0001		
M13	42.893	<.0001	17.863	<0.0001		
M14	1.276	<.0001	2.313	<0.0001		
M15	38.664	<.0001	-0.018	<0.0001	1.135	<0.0001

b_0 , b_1 y b_2 = Coeficientes de regresión; $Pr>[t]$ = Probabilidad de t .

Los cuatro restantes mejores modelos cumplieron con el supuesto de normalidad de residuales (no se rechaza H_0 , $p < 0.05$) (Figura 2). Corral-Rivas *et al.* (2014) al estudiar la relación h-d para 25 especies en el norte de México, indican que el modelo local de *Bertalanffy-Richards* es el más consistente al mostrar valores de R^2 de entre 0.6 y 0.8 en siete especies de pino. Los resultados de este trabajo coinciden con el estudio referido, ya que el modelo (M1) junto con el de *Yang* (M2), cuya estructura es parecida, presentaron resultados muy similares, con valores de R^2_{adj} de 0.91. Asimismo, Castillo-Gallegos *et al.* (2018) determinaron que el modelo local de *Richards* fue el mejor para modelar la relación h-d para *P. chiapensis* (Martínez) Andresen en Veracruz, México, pero con valores de R^2 mucho menores. Con base en lo anterior, el criterio final para decidir cuál es el mejor modelo para *P. montezumae* en el presente trabajo fue la congruencia biológica, mediante el análisis de su comportamiento gráfico.



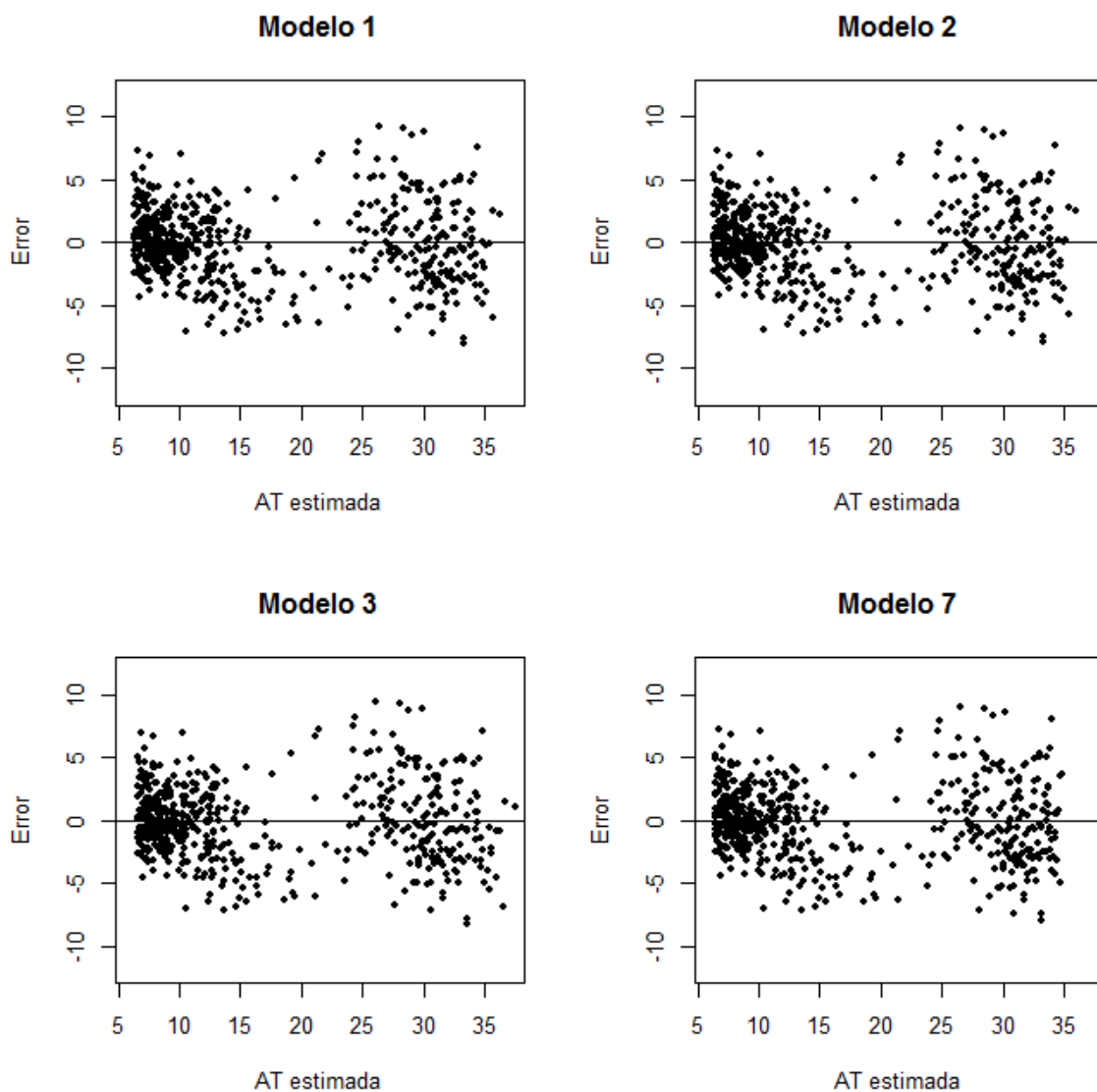


Figura 2. Distribución de residuales de los cuatro mejores modelos de altura-diámetro ajustados para *Pinus montezumae* Lamb.

En el intervalo de datos observados, los cuatro mejores modelos mostraron un comportamiento muy parecido hasta un diámetro aproximado de 60 cm, después del cual las proyecciones de altura se diferencian (Figura 3), en particular con el M3 que predice valores mayores de altura, sin mostrar una tendencia asintótica, aun fuera del intervalo de datos. Por el contrario, el modelo de *Sharma* (M7) indica valores más bajos y un máximo de 35 m de altura para diámetros ligeramente superiores a 80

cm, después de los cuales predice alturas menores, lo que puede no ser del todo aceptable para *P. montezumae*.

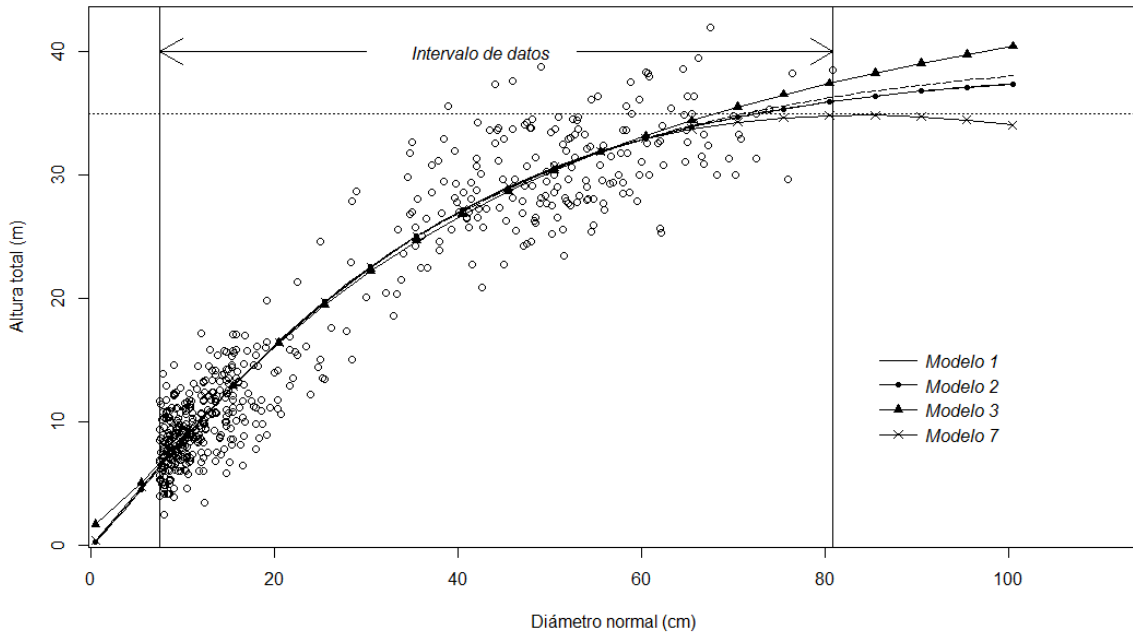


Figura 3. Trayectorias de las curvas generadas con los mejores modelos de altura-diámetro y datos observados para *Pinus montezumae* Lamb.

Al respecto, Zhao *et al.* (2006) consideran que entre los atributos deseables de las ecuaciones altura-diámetro están el de alcanzar una asíntota en diámetros mayores y presentar siempre una pendiente positiva, ninguno de las cuales se observó con el M7. En tanto, los modelos de Richards (M1) y de Yang (M2) se comportan de manera similar, incluso en el límite superior de los datos y muestran una tendencia asintótica alrededor de 38 m de altura, en diámetros cercanos a 100 cm; esto es razonable, desde el punto de vista biológico, para árboles de *P. montezumae*, en particular en regiones con buena calidad de sitio (Rodríguez *et al.*, 1988). Sin embargo, dado que el modelo de Yang (M2) es más conservador, además de sus mejores valores de ajuste, en comparación con el de Richards (M1), se considera como el más apto para

estimar la altura total en árboles de *P. montezumae* en la región de estudio y queda expresado en la siguiente forma:

$$h = 38.681 [1 - e^{-0.018 d^{1.135}}]$$

Donde:

h = Altura total

d = Diámetro normal

Pinus teocote

En general, los valores de ajuste de los modelos probados para la especie también fueron adecuados, a partir de que son modelos locales (Cuadro 5). Hernández *et al.* (2015) estimaron alturas para *P. teocote* mediante ecuaciones generalizadas en el estado de Hidalgo, y obtuvieron valores de R^2_{adj} de 0.93. Bajo el procedimiento de jerarquización de los criterios seguidos en el presente estudio, se observa que el modelo con mejor ajuste a los datos, por su menor valor en el índice, es el modelo cuadrático (M10), cuyo coeficiente de determinación ajustado (R^2_{adj}) es de 0.87, el cual supera al registrado por Corral-Rivas *et al.* (2014) para la misma especie ($R^2 < 0.7$) en el norte de México.



Cuadro 5. Estadísticos de bondad de ajuste de los modelos analizados para *Pinus teocote* Schiede ex Schltdl.

Modelo	SCE	CME	RECM	R²_{adj}	Sesgo	AIC	Calificación Total
M1	2 569.5	5.53	2.35	0.86	0.01	803.00	(37)
M2	2 570.9	5.53	2.35	0.86	0.02	803.27	(51)
M3	2 518.0	5.42	2.33	0.87	0.002	793.53	(12)
M4	2 841.5	6.11	2.47	0.85	0.57	850.10	(80)
M5	2 570.9	5.53	2.35	0.86	0.01	803.26	(48)
M6	2 793.7	6.00	2.45	0.85	0.09	840.15	(72)
M7	2 568.4	5.52	2.35	0.86	0.01	802.80	(28)
M8	2 570.9	5.53	2.35	0.86	0.01	803.26	(55)
M9	2 568.5	5.52	2.35	0.86	-0.001	802.82	(25)
M10	2 505.0	5.39	2.32	0.87	0.004	791.10	(9)
M11	3 835.9	8.23	2.87	0.80	0.11	988.53	(89)
M12	2 571.1	5.52	2.35	0.86	0.003	801.29	(25)
M13	3 726.6	8.00	2.83	0.80	0.11	975.00	(83)
M14	2 733.2	5.87	2.42	0.85	0.04	829.91	(66)
M15	2 569.7	5.53	2.35	0.86	0.01	803.04	(40)

R^2_{adj} = Coeficiente de determinación ajustado; $RMSE$ = Raíz del error cuadrático medio; SSE = Suma de cuadrados del error; MSE = Error cuadrado medio; AIC = Criterio de información de *Akaike*.

Con base en el sistema de calificación, después del M10 los mejores modelos resultaron ser M3, M12, M9 y M7; sin embargo, respecto a las pruebas de hipótesis sobre los estimadores, el valor de b_0 con el M9, y de b_2 con el M7 no fueron significativos ($P < 0.05$) (Cuadro 6), por lo que no se consideraron para su análisis posterior. En todo caso, M3 y M12 se ubicaron en segundo y tercer lugar, respectivamente (Cuadro 5), con la ventaja de que todos sus coeficientes fueron significativos ($p < 0.05$) y en ambos casos se cumple el supuesto de normalidad en los residuales, con base en los gráficos de dispersión (Figura 4) y el estadístico de SW (> 0.97).

Cuadro 6. Valores y significancia de los estimadores de los modelos analizados para *Pinus teocote* Schiede ex Schltdl.

Modelo	b_0	Pr > t	b_1	Pr > t	b_2	Pr > t
M1	85.542	0.2886	0.002	0.6007	-0.743	<0.0001
M2	392.281	0.8367	-0.007	0.8331	0.567	<0.0001
M3	4.028	<0.0001	-63.758	<.0001	27.165	<0.0001
M4	928.458	0.6718	6.180	0.0031	0.132	0.0889
M5	0.564	<0.0001	0.363	<.0001	0.001	0.8711
M6	41.496	<0.0001	34.639	<.0001		
M7	2.651	<0.0001	0.576	<.0001	-0.0002	0.4754
M8	878.678	0.8638	0.003	0.8613	0.565	<0.0001
M9	1.197	0.5005	2.252	0.0033	0.596	<0.0001
M10	5.085	<0.0001	0.527	<.0001	-0.003	<0.0001
M11	30.357	<0.0001	-12.421	<.0001		
M12	1.030	<0.0001	0.553	<.0001		
M13	30.800	<0.0001	13.130	<.0001		
M14	2.184	<0.0001	1.768	<.0001		
M15	0.0002	0.6991	0.177	0.0017	0.572	<0.0001

b_0 , b_1 y b_2 = Coeficientes de regresión; $Pr > [t]$ = Probabilidad de t .

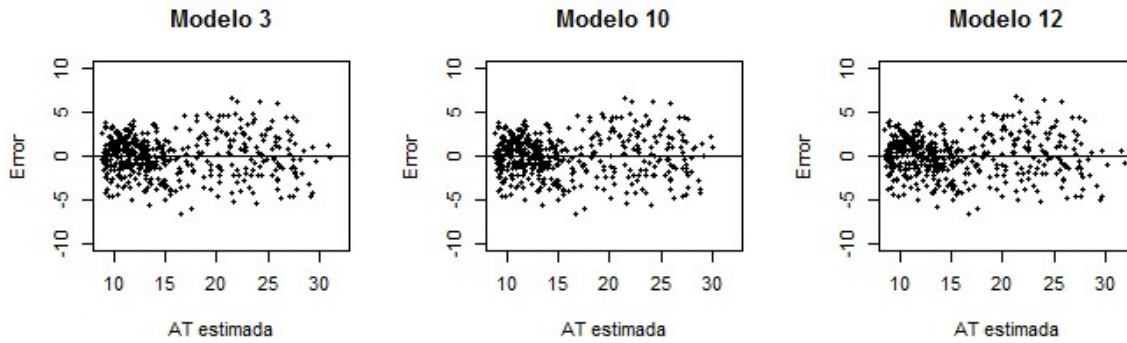


Figura 4. Distribución de residuales de los tres mejores modelos de altura-diámetro ajustados para *Pinus teocote* Schiede ex Schltdl.

De forma gráfica, los modelos M3, M10 y M12 describieron trayectorias similares hasta un diámetro aproximado de 65 cm (Figura 5), después del cual solo el modelo M10 presentó un descenso en el valor de la pendiente de la curva, mientras que M3 y M12 mantuvieron su trayectoria ascendente, aun fuera del intervalo de los datos. Es evidente, que con esos dos modelos hay una tenencia a sobrestimar la altura total (>32 m) para árboles con diámetros cercanos a 80 cm, por lo que se consideran no adecuados para modelar esta relación. La tendencia mostrada por la curva que genera el modelo M10 parece más razonable y lógica para *P. teocote*, cuyos diámetros y alturas máximas difícilmente pueden ser mayores a 85 cm y 32 m, respectivamente. Por ejemplo, Hernández *et al.* (2015) documentan valores máximos de 72 cm en diámetro y 31 m de altura para la misma especie.



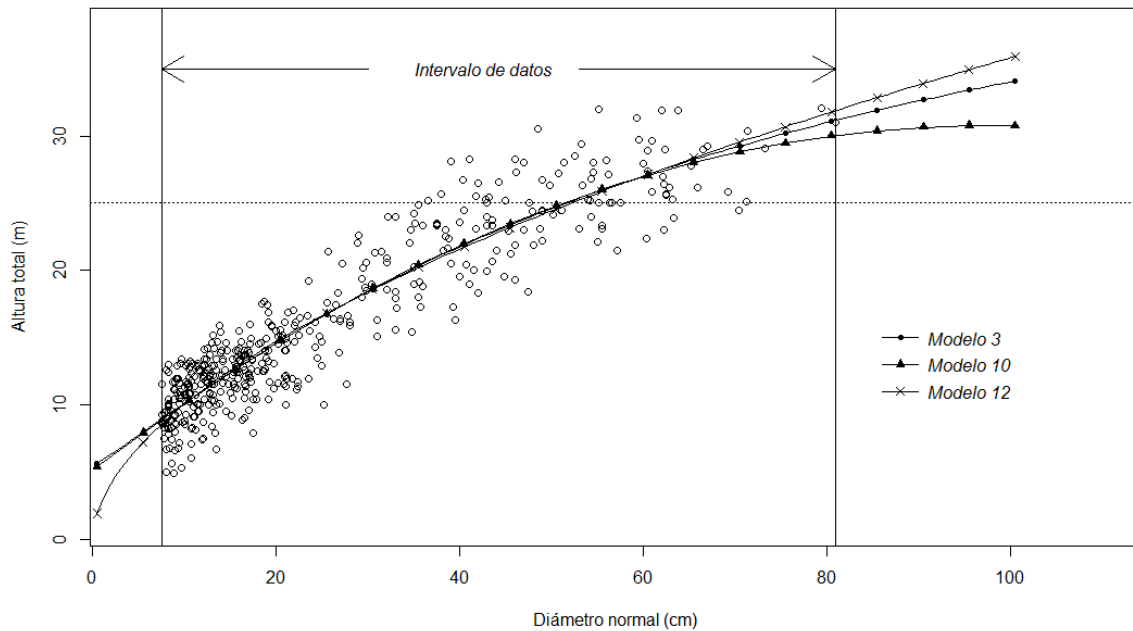


Figura 5. Trayectorias de las curvas generadas con los mejores modelos de altura-diámetro y datos observados para *Pinus teocote* Schiede ex Schtdl.

Por lo tanto, la ecuación final (Modelo 10) para estimar la altura total de árboles de *P. teocote* a partir del diámetro normal en la región de estudio queda expresada de la siguiente manera:

$$h = 5.085 + 0.527d - 0.003d^2$$

Donde:

h = Altura total

d = Diámetro normal

Los modelos locales de altura-diámetro seleccionados para *Pinus montezumae* y *P. teocote* son específicos de las condiciones propias de los bosques de la región

occidental del estado de Tlaxcala. Por sus valores adecuados de ajuste estadístico y su congruencia biológica, pueden ser aplicados en la práctica silvícola de dicha zona. Además, serán útiles en futuras investigaciones; por ejemplo, para generar sistemas de crecimiento y rendimiento maderable de las dos especies de *Pinus* estudiadas, pero siempre restringidas a la misma área geográfica.

Conclusiones

En general, los modelos probados para las dos especies tienen buenos ajustes, ya que explican más de 80 % de la varianza de la altura total en ambos casos. Los mejores modelos para estimar la altura total en función del diámetro normal para árboles individuales son el de *Yang* (M2) para *Pinus montezumae* y el cuadrático (M10) para *P. teocote*, en virtud de su mejor calidad de ajuste y de la congruencia biológica mostrada en la descripción gráfica de la relación altura-diámetro. Estos modelos locales permitirán realizar estimaciones de altura total de los árboles con precisiones superiores a 87 % en bosques de *P. montezumae* y *P. teocote* bajo manejo en la región de Nanacamilpa del estado de Tlaxcala.

Agradecimientos

El presente estudio fue financiado por el Instituto Nacional de Investigaciones Forestales Agrícolas y Pecuarias. Los autores agradecen al ejido San José Nancamilpa, Tlax., por las facilidades otorgadas para el desarrollo del trabajo de campo.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

Contribución por autor

Vidal Guerra-De la Cruz: diseño y estructura del manuscrito, análisis de datos, y redacción del manuscrito; Fabián Islas-Gutiérrez: captura de datos, análisis estadístico; Eulogio Flores-Ayala: coordinación de trabajo de campo, toma de datos de campo, revisión del documento; Miguel Acosta-Mireles: toma de datos de campo, análisis de información, revisión del documento; Enrique Buendía-Rodríguez: análisis de información, redacción y revisión del documento; Fernando Carrillo-Anzures: toma de datos de campo, revisión del documento; Juan Carlos Tamarit-Urías: análisis de datos, revisión del documento; Tomas Pineda-Ojeda: toma de datos de campo, revisión del documento.

Referencias

Ahmadi, K. and Alavi S. J. 2016. Generalized height-diameter models for *Fagus orientalis* Lipsky in Hyrcanian forest, Iran. *Journal of Forest Science* 62(9): 413–421.

Ahmadi, K., S. J. Alavi, M. T. Kouchaksaraei and W. Aertsens 2013. Non-linear height-diameter models for oriental beech (*Fagus orientalis* Lipsky) in the Hyrcanian forests, Iran. *Biotechnology, Agronomy, Society and Environment* 17(3): 431-440.

Arnoni, C. E., T. Schroder and C. A. Guimarães. 2016. Height-diameter relationships for *Araucaria angustifolia* (Bertol.) Kuntze in Southern Brazil. *CERNE* 22(4): 493-500.

Castillo-Gallegos, E., J. Jarillo-Rodríguez y R. Escobar- Hernández. 2018. Relación altura-diámetro en tres especies cultivadas en una plantación forestal comercial en el este tropical de México. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente* 24 (1): 33-48.

Clutter, J. L., J. C. Fortson, L. V. Pienaar, G. H. Brister and R. L. Bailey. 1983. *Timber Management: A quantitative approach*. John Wiley & Sons. New York, NY USA. 333 p.

Crecente-Campo F., M. Tomé, P. Soares and U. Diéguez-Aranda. 2010. A generalized nonlinear mixed-effects height-diameter model for *Eucalyptus globulus* L. in northwestern Spain. *Forest Ecology and Management* 259: 943-952.

Coble, D. W. and L. Young-Jin. 2011. A mixed-effects height-diameter model for individual loblolly and slash pine trees in east Texas. *Southern Journal of Applied Forestry* 35(1): 12-17.

Comisión Nacional Forestal (Conafor). 2012. Inventario Nacional Forestal y de Suelos. Informe 2004-2009. Coordinación General de Planeación e Información. Gerencia de Inventario Forestal y Geomática. Zapopan, Jal., México. 212 p.

Corral-Rivas, S., J. G. Álvarez-González, F. Crecente-Campo and J. J. Corral-Rivas. 2014. Local and generalized height-diameter models with random parameters for mixed, uneven-aged forests in Northwestern Durango, Mexico. *Forest Ecosystems* 1(6): 1-9. DOI:10.1186/2197-5620-1-6.

Duan, G., Z. Gao, Q. Wang and L. Fu. 2018. Comparison of different height-diameter modelling techniques for prediction of site productivity in natural uneven-aged pure stands. *Forests* 9(2):63-81. DOI:<https://doi.org/10.3390/f9020063>.

García C., X., J. Hernández R., A. Hernández R., J. Quiñonez B., J. C. Tamarit U. y G. G. García E. 2017. Predicción del diámetro normal, altura y volumen a partir del diámetro del tocón en especies tropicales. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales* 8(43): 90-116. DOI:<https://doi.org/10.29298/rmcf.v8i43.67>.

Gonzalez-Benecke, C. A., S. A. Gezan, T. A. Martin, W. P. Crooper, L. J. Samuelson, and D. J. Leduc. 2014. Individual tree diameter, height and volumen functions for longleaf pine. *Forest Science* 60(1):43-56.

Guerra de la C., V., F. Carrillo. A. y M. Acosta M. 2008. El aprovechamiento de los recursos forestales maderables. *In: Guerra de la C., V. y C. Mallén R. (comp.) Tlaxcala, sus recursos forestales: Conservación, aprovechamiento y bases para su manejo sustentable. Libro Técnico Núm. 4. INIFAP-Cenid-Comef. México, D.F., México. pp. 30-43.*

Hernández R., J., X. García C., A. Hernández R., J. J. García M., H. J. Muñoz F., C. Flores L. y G. G. García-Espinoza. 2015. Ecuaciones altura-diámetro generalizadas para *Pinus teocote* Schlecht. & Cham. en el estado Hidalgo. Revista Mexicana de Ciencias Forestales 6(31): 8-21. DOI:<https://doi.org/10.29298/rmcf.v6i31.192>.

Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática (Inegi). 2009. Prontuario de información geográfica municipal de los Estados Unidos Mexicanos Nanacamilpa de Mariano Arista, Tlaxcala. Clave geoestadística 29021.

<http://mapserver.inegi.org.mx/mgn2k/> (7 de agosto de 2018).

Kutner, M. H., C. J. Nachtsheim, J. Neter and W. Li. 2005. Applied linear statistical models. 5th edition. Ed. McGraw-Hill-Irwing. New York, NY USA. 1396 p.

Martínez, M. 1992. Los pinos mexicanos. 3^a edición. Ediciones Botas. México, D. F., México. 361 p.

Mehtätalo, L., S. de Miguel and T. G. Gregoire 2015. Modeling height-diameter curves for prediction. Canadian Journal of Forest Research 45: 826-837.

Misir, N. 2010. Generalized height-diameter models for *Populus tremula* L. stands. African Journal of Biotechnology 9(28): 4348-4355.

Moore, J. A., L. Zhang and D. Stuck. 1996. Height-Diameter equations for ten tree species in the Inland Northwest. Western Journal of Applied Forestry 11(4):132-137.

Osman, E. M. H., E. Z. A. Idris and E. M. M. Ibrahim. 2013. Modelling height-diameter relationships of selected economically important natural forest species. Journal of Forest Products and Industries 2(1): 34-42.

Peng, C., L. Zhang and J. Liu. 2001. Developing and validating nonlinear height-diameter models for major tree species of Ontario's boreal forests. Northern Journal Applied Forestry 18 (3):87-94.

Perry, 1991. The pines of Mexico and Central America. Timber Press Portland, OR USA. 231 p.

Rijal, B., A. R. Weiskittel and J. A. Kershaw. 2012. Development of regional height to diameter equations for 15 tree species in the North American Acadian Region. *Forestry* 85(3): 379-390.

Rodríguez F., C., H. Ramírez M., G. Zarate de Lara, A. Fierros G. y C. A. Ortiz S. 1998. Determinación de calidad de estación de *Pinus montezumae* Lamb., a través de análisis troncales en el Campo Experimental Forestal San Juan Tetla, Puebla. *Agrociencia* 72: 87-94.

Statistical Analysis System (SAS). 2011. SAS® Versión 9.3. SAS Institute Inc. Cary, NC USA. n/p.

Sharma, R. P. 2009. Modelling height-diameter relationship for Chir pine trees. *Banko Janakari* 19(2): 3-9.

Sharma, R. P. and J. Breidenbach. 2015. Modeling height-diameter relationships for Norway spruce, scots pine, and downy birch using Norwegian national forest inventory data. *Forest Science and Technology* 11(1): 44-53.

Tamarit U., J. C., H. M. De los Santos P., A. Aldrete, J. R. Valdez L., H. Ramírez M. y V. Guerra De la C. 2014. Sistema de cubicación para árboles individuales de *Tectona grandis* L. f. mediante funciones compatibles de ahusamiento-volumen. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales* 5 (21): 58-74. DOI: <https://doi.org/10.29298/rmcf.v5i21.358>.

Temesgen, H., C. H. Zhang and X. Zhao H. 2014. Modelling tree height-diameter relationships in multi-species and multi-layered forests: A large observational study from Northeast China. *Forest Ecology and Management* 316: 78-89.

Trincado, G. y C. Leal D. 2006. Ecuaciones locales y generalizadas de altura diámetro para pino radiata (*Pinus radiata*). *Bosque* 27(1):23-34. DOI: 10.4067/S0717-92002006000100003

Valdez-Lazalde, J. R. and T. B. Lynch. 2000. Merchantable and total volume equations for thinned natural stands of *patula pine*. *Agrociencia* 34(6):747-758.

VanderSchaaf, L. C. 2014. Mixed-effects height–diameter models for ten conifers in the inland Northwest, USA. *Southern Forests* 76(1): 1-9.

Xiongwen, C. and D. G. Brockway. 2017. Height-diameter relationships in longleaf pine and four swamp tree species. *Journal of Plant Studies* 6(2): 94-101.

Zhao, W., E. G. Mason and J. Brown. 2006. Modelling height-diameter relationships of *Pinus radiata* plantations in Canterbury, New Zealand. *NZ Journal of Forestry* 23–27.