Marcela Ferrari Escolá, Rosa María Farfán Márquez

MULTIPLICAR SUMANDO: UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Multiply by summing: an experience with senior high school students

RESUMEN

En este artículo reportamos una experiencia realizada con estudiantes de bachillerato fundamentada en la Socioepistemología y tomando elementos de la Ingeniería didáctica como metodología de investigación. El propósito fue generar un ambiente particular que favoreciera la emergencia de lo logarítmico utilizando material manipulable rescatando argumentos primigenios de Stiffer, Napier y Briggs. El análisis de las argumentaciones individuales y grupales de los estudiantes que emergen al descubrir la regla de multiplicar sumando como herramienta para facilitar cálculos y utilizarla para construir más fichas y la ficha general del juego, evidencia un acercamiento a la covariación y propiedades logarítmicas.

PALABRAS CLAVE:

- *Sociepistemología*
- *Propiedades logarítmicas*
- *Multiplicar sumando*

ABSTRACT

In this article we report an experience carried out with senior high school students based on Socioepistemology and adopting didactic engineering as research methodology. The purpose was to generate a particular environment that would favor the emergence of the logarithmic using manageable materials, rescuing primordial arguments by Stiffer, Napier y Briggs. The analysis of the students' individual and collective argumentations which arise when discovering and using the rule of multiply by summing as a tool to facilitate operations in order to construct more charts as well as the game's general chart, demonstrates an approach to the covariation and the logarithmic properties.

KEY WORDS:

- *Socioepistemology*
- *Logarithmic properties*
- *Multiply by summing*

RESUMO

Neste texto relatamos uma experiência realizada com alunos do ensino médio com base no Socioepistemologia e adotando engenharia didática como metodologia de pesquisa. O objetivo foi criar um ambiente particular favorecendo o aparecimento do logarítmo usando material manipulável resgatando alguns argumentos primários de Stiffer, Napier y Briggs. A

PALAVRAS CHAVE:

- *Sociepistemologia*
- *Propriedades dos logaritmos*
- *Multiplicar adicionando*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2017) *20* (2): 137-166.
Recepción: Agosto 10, 2015 / Aceptación: Junio 25, 2017. DOI: 10.12802/relime.17.2021

análise dos argumentos individuais e grupais dos alunos, que emergem ao descobrir a regra da multiplicar adicionando como uma ferramenta para facilitar os cálculos e a sua utilização para construir mais peças do jogo bem como as peças gerais, revela uma aproximação à covariância e propriedades dos logaritmos.

RÉSUMÉ

Dans cet article, on fait le rapport d'une expérience réalisée avec des étudiants du lycée d'après la théorie de la socioépistémologie et en adoptant l'ingénierie didactique comme méthode de recherche. L'objectif a été de susciter une ambiance spéciale qui permettrait l'émergence du logarithmique en utilisant du matériel maniable et en récupérant les arguments originaires de Stiffer, Napier et Briggs. L'analyse des argumentations des étudiants, individuelles et en groupe, qui ont émergé de la découverte de la règle de multiplier en additionnant en tant qu'outil pour rendre plus facile les calculs et en l'utilisant pour construire plus de fiches et la fiche générale du jeu ; met en évidence une approche a la « covariación » et les propriétés logarithmiques.

MOTS CLÉS:

- *Socioépistémologie*
- *Propriétés logarithmiques*
- *Multiplier en additionnant*

1. Introducción

Los problemas del aprendizaje de función han sido documentados por investigadores desde los inicios de la matemática educativa. Su discusión ha ido evolucionando en diferentes direcciones y su estudio sigue siendo de interés. Entre las primeras publicaciones se percibe la necesidad de explicar el porqué de las dificultades que presentan los estudiantes ante nociones del Cálculo, como se refleja en Dubinsky y Harel (1992) donde se evidencian distintos abordajes de la problemática sobre aprendizaje de función. Varios investigadores se interesaron por la articulación de representaciones de las funciones, proponiendo juego de marcos (Douady, 1986) o sistemas de notación (Kaput, 1992) o registros de representación semiótica (Duval, 1995). Otros, en cambio, lo hicieron por la visualización de funciones (Zimmermann & Cunningham, 1991; Even & Brukheimer, 1998; Bagni, 2004) como construcción de conocimientos.

Otros establecen, en cambio, que el alumno debe construir, al menos, una visión de proceso de la función para fomentar la formación de una visión de objeto

(Dubinsky, 1992; Slavit, 1997), o aquellos que afirman que desarrollar un razonamiento covariacional les permitirá construir una visión más integral de las funciones a través de eventos dinámicos (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, 2002; Oehrtman, Carlson & Thompson, 2008; Johnson, 2015; Hitt & Gonzáles, 2015) o recuperar la idea de movimiento en geometría dinámica como generador de los primeros pasos hacia la formalización del concepto de función (Falcade Laborde & Mariotti, 2007; Hoffkamp, 2011).

Vemos, en estos reportes de investigación de diferentes épocas y miradas teóricas, el lugar preponderante conferido a la apropiación de función. Basta mirar los índices y resúmenes de distintas revistas científicas y de difusión de nuestra disciplina, para observar la profusión en el abordaje de esta problemática. Más difícil es encontrar reflexiones sobre funciones particulares tales como funciones cuadráticas (Ellis, 2011), funciones periódicas (Dreyfus & Eisenberg, 1983; Buendía, 2010), funciones exponenciales (Confrey & Smith, 1994 y 1995; Ellis, Ozgur, Kulow, Williams & Amidon, 2012; Castillo - Garsow, Johnson y Moore, 2013), funciones trigonométricas (Martínez - Sierra, 2012; Moore, 2014) y en específico alrededor de la función logarítmica que se discute en esta investigación. La inclusión de estos estudios sobre funciones en particular, rompe con el paradigma de que el estudio global del concepto de función es susceptible de llevar a casos particulares, olvidando que cada función específica tiene sus constructos sociales y referenciales específicos por lo que su complejidad responde a diferentes ámbitos de la construcción social del pensamiento matemático.

Al intentar posicionar nuestra investigación, hallamos reportes en dos direcciones, aquellos que evidencian el ámbito escolar y la problemática suscitada alrededor de la función logarítmica (Liang & Wood, 2005; Abrate & Pochulu, 2007; Ferrari & Farfán, 2008 y 2010; Park & Choi, 2013; Kenney & Kastberg, 2013) y aquellos que centran su mirada en la historia de los logaritmos (Ayoub, 1993; Cantoral & Farfán, 2004; Gonzáles & Vargas, 2007; Schubring, 2008; Panagiotou, 2011) pocos de los cuales giran hacia su impacto escolar o a cuestionar la matemática escolar actual, pero que nos enriquecen con estudios puntuales de originales o fuentes primarias. De estos reportes y de exploraciones con profesores y alumnos, surge la necesidad de profundizar en la problemática de la enseñanza de los logaritmos. Provoca también cuestionar modelos de difusión de conocimientos, elementos que siendo útiles en determinados momentos perturban en otros niveles, es decir, devienen en obstáculos epistemológicos, tal el caso de las estructuras multiplicativas para la enseñanza de la potenciación (Confrey & Smith, 1995) y su posterior utilización para implementar la generalización hacia la noción de "función exponencial" y por ende, para la significación de los logaritmos.

En Ferrari (2008) encontramos que la presentación escolar de los logaritmos, absolutamente escindida de sus orígenes, vaciada de significados, nos confiere una primera explicación del por qué los alumnos no logran articular las diferentes presentaciones de los logaritmos. Nos referimos a su presentación primera como "el exponente al que se debe elevar una base para obtener determinado valor"; a su íntima vinculación con las exponenciales "al ser una función inversa de la otra"; y, por último, ser la "respuesta de una integral singular" ($\int x^{-1}dx$) que se escapa de un patrón ($\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$), sin olvidar su desarrollo en serie de potencias también presente en el discurso matemático escolar.

En la actualidad, la función logaritmo es una noción cuya vigencia en los planes de estudio está seriamente amenazada, pese a que su carácter de poderosa herramienta matemática es incuestionable. Los logaritmos nos permiten linealizar fenómenos exponenciales así como describir otros cuyas variables demandan números muy grandes (en sonido o sismos) o pequeños (pH) entre otras aplicaciones. En efecto, ha desaparecido de varios currículos escolares de bachillerato, mismos que la utilizan en cursos de física o química que obliga a los docentes a implementar estrategias axiomáticas sustitutas o "parches" para su utilización efectiva.

En nuestra investigación retomamos de Confrey y Smith (1995), que *"the construction of a counting and a splitting world and their juxtaposition through covariation provide the basis for the construction of an exponential function"* (p.80) idea que extendemos a la función logarítmica.

Iniciamos entonces, la exploración con estudiantes de bachillerato considerando, como hipótesis epistemológica que la incorporación explícita de la relación entre una progresión aritmética y una geométrica, que denominamos *covariación logarítmica*, como la esencia misma de los logaritmos, propiciaría una integración, quizás más efectiva y por tanto más robusta, de esta noción como función. Adquiere mayor sentido, entonces, estudiar la argumentación que desarrollen los estudiantes al involucrarlos en un ambiente especial, diseñado desde los argumentos que dirigieron la evolución de los logaritmos.

2. La socioepistemología como sustento teórico

Abordamos esta problemática con un estudio sistémico, donde se entremezclan las prácticas escolares inherentes a la transmisión del saber, las prácticas de referencia que reflejan el desarrollo de ese saber, las prácticas sociales que hablan de interacciones y herramientas así como las prácticas discursivas que evidencian la significación y consensos adoptados todo lo cual nos anuncia, en definitiva, comunidades que entrelazan sus producciones, donde el tiempo y el lugar, los sujetos y sus interrelaciones, los argumentos y herramientas, los avances y retrocesos, van construyendo el conocimiento.

Según Cantoral (2013), interesa reflexionar sobre el discurso matemático escolar. Dado que el saber matemático se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares, su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento, de manera que afectan también a las relaciones que se establecen entre los estudiantes y su profesor. En su intento por difundir estos saberes, se forman discursos que facilitan la comunicación en matemáticas y favorecen la formación de consensos.

La socioepistemología, sustento teórico de nuestra investigación, propicia la confluencia y relación dialéctica de aspectos que consideramos fundamentales al abordar un fenómeno didáctico. Contemplar y analizar el devenir de una noción a un objeto de saber; caracterizar las concepciones de los alumnos; dar cuenta de cómo vive una noción en las aulas y el discurso matemático escolar que se genera, ser conscientes que la matemática es un bien cultural inmerso en una sociedad y tiempo determinados que condiciona su comunicación y apropiación (Cantoral, 2013) conlleva profundizar en la reorganización de la obra matemática, en la reconstrucción de significados y en la matemática como actividad humana (Cordero, Cen & Suárez, 2010).

El conocimiento matemático es argumentativo y surge en la participación de individuos en *"una práctica de explicar"* (Garfinkel, 1967, p.1 citado en Krummheruer, 2015), la cual demanda, según Buendía (2005), presentar una postura con la conciencia de que existe otra opinión, implícita o explícita, diferente de la propia. En este sentido, la argumentación involucra resignificados, procedimientos, proceso y objetos la cual se cristaliza en una situación específica (Cordero, 2007) propiciando la emergencia de un argumento, es decir, un invento, una construcción original, planteado para la situación expresa y que utiliza material conocido (Billing, 1989). Coincidimos con Krummheuer (2015) en que el foco principal debe estar sobre el análisis del proceso y no del producto, pues al analizarlo se descubre un cierto dominio de realidad, que está, de algún modo, entre el nivel sociológico de los aspectos institucionalizados escolarmente y el nivel psicológico del individuo de conocimiento.

En el caso de los logaritmos, eje de esta investigación, consideramos que la transposición didáctica (Chevallard, 1995) a la que inevitablemente todo concepto es sometido antes de ser introducido al aula, ha “destazado” a los logaritmos, los ha convertido en objetos útiles que deben ser manipulados con soltura. Toda transposición genera una nueva epistemología del concepto, y en este caso comienza a producirse y reflejarse en los textos y en su tratamiento desde el siglo XVIII. Podemos considerar un antes y un después de Euler y una reformulación de los mismos con Cauchy tiempo después.

Efectivamente, en nuestra indagación socioepistemológica (Ferrari, 2008) concluimos que se pueden distinguir, bajo esta óptica, tres etapas en el desarrollo de los logaritmos si tomamos como eje central la relación entre las progresiones aritmética y geométrica; argumento utilizado por Napier (1614) para su primera definición y los aportes de Brigss (1620/2004) para afinar su funcionamiento. Etapas que organizadas según las prácticas vislumbradas y la argumentación provocada llamamos “momentos”.

Como primer momento, consideramos a *los logaritmos como transformación*, etapa que se desarrolla antes de su definición formal y que se refleja en las distintas exploraciones en torno a la formulación y extensión de las progresiones y en la búsqueda de facilitar engorrosos cálculos producto de las necesidades sociales de la navegación, artillería y astronomía. Se desarrollan fundamentalmente en el contexto numérico comenzando con ideas intuitivas de transformar para facilitar operaciones intentado regresar a la aritmética básica y, por tanto, utilizar sólo sumas y restas. Así, de la confluencia de las primitivas formulaciones de las progresiones y de la relación entre ambas surge la definición de los logaritmos. Los elementos matemáticos utilizados son trabajados, en nuestras aulas, desde los niveles iniciales. La búsqueda de patrones numéricos, la relación entre ellos, la economía de recursos para expresar ideas matemáticas son abordados en los currículos escolares y libros de texto actuales, pero no relacionados y utilizados a la hora de introducir los logaritmos.

Su exploración en otros contextos, producida principalmente en el siglo XVII, nos lleva a considerar como segundo momento el de *los logaritmos como modelizadores* pues en esta etapa se determinan sus características geométricas y por tanto logran pertenecer al discurso matemático de principios del siglo XVII. Se les dota de una gráfica al adecuarlos al nuevo marco “algebraico - geométrico” que se estaba desarrollando. Logran completar un modelo matemático de la cuadratura de curvas representativas de funciones potencia encontrando otro lenguaje para ser descritos ingresando así en los avatares de un Cálculo en plena gestación. Permiten describir fenómenos físicos y se descubren nuevas formas para calcularlos a partir de su desarrollo en serie de potencias lo cual les abre las puertas para acceder al discurso matemático del siglo XVIII y adquirir el status de función.

Todos estos argumentos y exploraciones que giran en torno a descubrir las características logarítmicas, en distintos contextos, mediante el uso explícito de la relación entre progresiones están absolutamente fuera del discurso matemático escolar de nuestros días. Aparece en los libros de difusión de conocimiento del siglo XVII, para desaparecer completamente a partir de las ideas eulerianas y de su vinculación definitiva con las funciones exponenciales mediante el concepto de función inversa.

Comienza así, un tercer momento que nosotros identificamos como la etapa de *los logaritmos como objetos teóricos*, conceptos trabajados en la enseñanza actual y que los encuentra escindidos de las argumentaciones dadas anteriormente, las cuales pueden contribuir a dotarlos de un mayor sentido, apartándolos de su tratamiento actual que los reduce a una aplicación algorítmica de sus propiedades apareciendo en el aula sin ningún antecedente analítico que pudieran haber adquirido los estudiantes hasta ese momento.

Percibimos así dos prácticas sociales que han promovido el desenvolvimiento de los logaritmos, la de *facilitar cálculos* y la de *modelar* (Arrieta & Díaz, 2015), íntimamente relacionadas o subsidiarias de la de *predecir.* Sin embargo, en este artículo, nos centraremos en esta búsqueda de herramientas matemáticas que permitieran facilitar el cálculo de multiplicaciones de números grandes, provenientes de medidas astronómicas, o distancias de navegación, o quizás de la necesidad de acumular riqueza, o cambiar escalas para visualizar mejor los fenómenos estudiados y, en todos los casos, lograr la determinación de valores y que consideráramos el primer momento de los logaritmos.

Rescatamos entonces, la idea central para generar un ambiente numérico donde la multiplicación y la suma sean abstraídas como las herramientas necesarias para generar una nueva, la regla de multiplicar sumando, equivalente a la que escolarmente llamamos propiedad de los logaritmos y que discutiremos en este artículo.

3. Diseño y gestión de la primera sesión

En este artículo se reporta el análisis de la primera sesión de un curso de seis semanas en el que participaron diecisiete estudiantes de bachillerato, de 17 y 18 años. El objetivo del curso fue acercarlos a “lo logarítmico”, es decir, percibir la covariación logarítmica como argumento estructurador de las tres formas en las que vive la función logarítmica en la escuela, resultado del análisis preliminar el cual esbozamos en párrafos anteriores, siguiendo la estructura que propone la Ingeniería didáctica (Artigue, 2015) para organizar la investigación.

En la primera sesión del curso, se conformaron cinco grupos de tres estudiantes que trabajaron con material concreto diseñado en potencias de base 2. Tres son las partes que conforman el diseño de aprendizaje esperando provocar la evolución de los argumentos iniciales más cercanos a ideas exponenciales que logarítmicas, siendo ambas ideas el centro de la covariación logarítmica. Para su diseño nos interesó utilizar la obra *Arithmetica integra* de Stiffer (1544), en particular el *Libri 1* section *111. De progreffionibus Arithmeticis* and *1111. De progreffionibus Geometrici, & quædam Algebram pertinentia* (pp. 19-39) donde se estudian las propiedades de los números enteros, primer acercamiento a lo que décadas después serían denominados logaritmos (Figura 1).

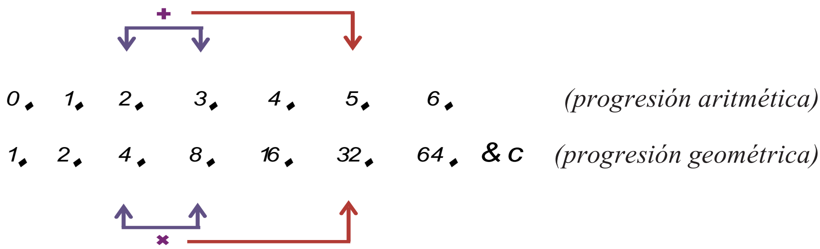


Figura 1. Interpretación gráfica de las ideas de Stiffer

La *primer parte* de la sesión, “completar el juego de fichas”, fue diseñada para que los participantes perciban los patrones de crecimiento y relacionarlos, lo que demandaba ordenar y percibir cómo crecen los números para crear la ficha faltante. La *segunda parte* “descubrir la regla de *multiplicar sumando*”, fue diseñada para que los estudiantes descubrieran las propiedades logarítmicas y las usaran aún sin conocerlas para facilitar cálculos al multiplicar los números del arreglo superior y sumar los números de abajo. La *tercer parte* “encontrar la ficha comodín del juego” es decir, construir la ficha que reemplace a cualquiera de las otras fue diseñada con el objetivo que los estudiantes abstrajeran la covariación que rigen los comportamientos y sus cambios (Tabla I).

TABLA I
Síntesis del diseño de aprendizaje y elementos del análisis *a priori*

Partes	*Extracto de actividades*	*Lo esperado*
1.- Completar el juego de fichas	Completar el juego, es decir, construir: 1.- la ficha que falta $\boxed{\begin{matrix}16\\4\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}4\\2\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}64\\6\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}8\\3\end{matrix}}$ $\boxed{}$ 2.- diez fichas más	.- iniciar ordenando las fichas les permitirá reconocer cómo crecen y construir fichas hacia la derecha. Podría aparecer (0,0) como la primera ficha del juego.
2.- Descubrir las reglas de “multiplicar sumando” y “dividir restando”	3.- a) Utilizar dos fichas cualesquiera y determinar qué ficha del juego sería la respuesta de su multiplicación. $\boxed{\begin{matrix}32\\5\end{matrix}}$ X $\boxed{\begin{matrix}4\\2\end{matrix}}$ = b) Responder: ¿se puede dividir? ¿cómo?	.- asociar multiplicar con sumar no sería percibido de inmediato; utilizarían operaciones con fracciones antes de dos operaciones aritméticas distintas asociadas. .- ampliar el conjunto de números (naturales a racionales) podría ser retenido por limitar la regla de dividir a divisor menor al dividendo.
	4.- Usar reglas anteriores como una forma de facilitar cálculos y construir más fichas dentro del juego por ejemplo: $\boxed{\begin{matrix}\\28\end{matrix}}$	.- duplicar arriba de la ficha anterior en tanto sumo 1 abajo evidenciaría que repiten el argumento de actividad 2. .- descomponer el número inferior en otros cuya suma lo conforman y multiplicar arriba evidenciaría que abstraen ley de logaritmos.
	5.- Completar las fichas que podrían pertenecer al juego de acuerdo a las reglas establecidas. $\boxed{\begin{matrix}\\-1\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}0\\\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}0.25\\\end{matrix}}$	.- extender las fichas al campo de los reales (al menos al anillo de los racionales) podría ser reforzado con estas fichas específicas. .- percibir límite quedaría a nivel potencial.
3.- Encontrar el comodín del juego	6.- Construir el comodín del juego $\boxed{\begin{matrix}\\n\end{matrix}}$	.- abstraer algebraicamente el isomorfismo de las progresiones involucradas en el juego emergerá en pocos estudiantes.

El instructor, a cargo del curso, incentivó la interacción en cada equipo de trabajo respetando sus ideas y realizando preguntas para enfocar a los estudiantes a la actividades. A los estudiantes se les entregó las hojas de trabajo así como las fichas logarítmicas que consisten en cuatro rectángulos de foami con los números escritos siguiendo una progresión geométrica en la parte superior y una progresión aritmética en la inferior. Se les solicitó anotar las conclusiones a las que arribaran y entregarlas al finalizar la sesión que se desarrolló en una hora y media, fue videograbada con tres cámaras manejadas por auxiliares de investigación, que enfocaban directamente a los equipos A, B y C. También se grabó el audio de cada equipo para lograr mayor fidelidad en el registro de las discusiones.

El objetivo de esta sesión fue observar los argumentos que los estudiantes generaran, lo que nos llevaría a estudiar la red de significados que van construyendo mediante esta actividad que intenta acercarlos a lo logarítmico. La pregunta de investigación fue: ¿qué argumentos emergen en las discusiones de los estudiantes de bachillerato al trabajar en un diseño de aprendizaje basado en la covariación logarítmica?

En este artículo analizamos las discusiones del Equipo A que estuvo conformado por Tania, Yosy, Jorge y Eduardo; del Equipo B constituido por Cris, Luís y Roberto; y del Equipo C con Viri, Fany y Antonio.

4. Argumentos principales desarrollados por los estudiantes

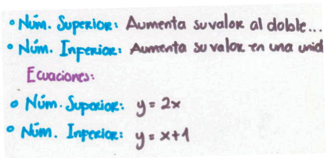
En el desarrollo de la primera sesión del taller, se fueron revelando las distintas características de cada equipo y de cada integrante. Los equipos A, B y C fueron ágiles y contrastantes en sus argumentos ya que avanzaban abstrayendo elementos complejos a la vez que se detenían en algunos otros. Las discusiones, propuestas y pruebas que las fichas les permitían hacer daban una sensación de combates sin tregua en búsqueda de una respuesta que los satisficiera. Las preguntas directrices que el instructor tuvo que dirigirles para destrabar sus empecinamientos o estancamientos, provenientes del análisis *a priori* (Tabla I), propiciaron la interacción entre los estudiantes.

Organizamos en esta sección elementos del análisis *a posteriori* realizado, centrándonos en distinguir los argumentos que fueron reteniendo el desarrollo de las actividades así como aquellos que potenciaban su percepción de la covariación tan especial de los logaritmos. Nos interesa particularmente reflexionar sobre los argumentos que utilizaron para establecer el cambio en las variaciones, es decir, reconocer las constantes aditiva y multiplicativa en tanto construían más fichas del juego. Analizar también los que utilizaron para descubrir y comprobar la regla de multiplicar sumando así como la de dividir restando y por último, cómo establecer una ficha comodín que reemplaza a cualquiera, es decir, algebrizar las fichas.

4.1. *Reconociendo patrones de crecimiento*

En el inciso 1 de la actividad, los estudiantes se encontraron con cinco fichas, una en blanco, y con la consigna de descubrir qué ficha faltaba además de construir diez fichas de ese juego (Tabla I). No fue necesario aclararles que era recomendable ordenarlas para descubrir el patrón de crecimiento implícito en ellas.

TABLA II
Reconocimiento de patrones de crecimiento

	Equipo A	*Equipo B*	*Equipo C*
Argumento inicial	Duplican los números de la parte superior. Siguen la secuencia en la parte inferior.	Recorren las fichas hacia la derecha y perciben que duplica arriba y que abajo son los números naturales.	Suman de manera reiterada. Algoritmo escolar sobre multiplicar los lleva a "duplicar".
Argumento final	No discuten sobre [0//0][1] y trabajan sólo hacia la derecha del [4//2] buscando números más grandes.	Consideran que [0//0] pertenece al juego lo que genera simetría en las fichas.	Construyen [1//0] y [2//1] como fichas del juego.
	Establecen: "*El número de abajo es la secuencia numérica de los números naturales, el número de arriba tiende a ser el doble del antecesor*".	Establecen: "*Para llegar a las fichas faltantes tuvimos que encontrar la secuencia entre ellas. Llegamos a la conclusión de que los números superiores son múltiplos del número 2 y los inferiores siguen una secuencia normal*".	Establecen: 
	Duplicar // serie de números (Figura 3)		Covariación incipiente

[1] En el escrito utilizaremos [0//0] para representar las fichas colocando en la parte izquierda los números de la parte superior de las fichas y a la derecha de dos barras diagonales los valores de la parte inferior de las fichas.

Todos los equipos iniciaron jugando e inspeccionando las fichas, hasta que, siguiendo la secuencia de los números naturales de la parte inferior, las ordenaron. La ficha faltante [32//5] surgió rápidamente en todos los equipos (Figura 2).

Ordenan las fichas | Distinguen el hueco | Completan las fichas

Figura 2. Trabajo del equipo C

La construcción de las cinco fichas siguientes no generó dudas. Algunos extendieron sólo hacia la derecha llegando a la ficha [2048//11], otros se continuaron hasta [32768//15] mostrando el interés de predecir números grandes (Figura 3). Otros consideraron las fichas [2//1] y [1//0] incluso antes de seguir a la derecha, algo que no sucede con frecuencia pero que muestra la necesidad de que el “0” esté presente en el inicio de las sucesiones.

Equipo A | Equipo B

Jorge: ¿por qué no hacemos otros para ver qué tan grandes pueden ser los números allá?... por ejemplo… después del diez será dos mil cuarenta y ocho…

Cris: para construir las fichas faltantes… ehmmm… tenemos que darnos... Mmmm esperen… tenemos que identificar las secuencias que llevan las fichas al ordenarlas.

Figura 3. Construcción de fichas

En el Equipo A, perciben rápidamente cual es la manera de extender el número de fichas. En sus discusiones se observa que surge la necesidad de generar más datos para conocer la “variación” que hay en ellas.

Eduardo: Acuérdense que sólo nos pedían diez...
Jorge: No... lo que decía es que tenemos que tener diez... dos tres cuatro cinco seis... ¿y si hacemos la del 15?
Tania: Había cuatro fichas ¿no?
Yosy: Ajá... y nos faltan cuatro ahora...
Tania: Entonces faltan...
Jorge: ¿Por qué no hacemos otros para ver qué tan grandes pueden ser los números allá?... por ejemplo... después del diez será dos mil cuarenta y ocho... luego sería cuatro mil...

Se observa que siguen proponiendo números duplicando desde el correspondiente al diez pero pierden de vista el papel que juega el número de abajo de la ficha, es decir, se centran en generar números cada vez más grandes, y alejándose un poco de la esencia de la actividad.

El Equipo B por su parte, en la actividad 5, discuten sobre si la ficha [0//0] pertenece o no al juego, surgiendo una confrontación de ideas.

Luís: Pues no sé... dice que tenemos que descartar algunas... por ejemplo la del cero cero...
Roberto: Sería cero entre uno ¿no? (*propone la ficha* [1, 0])
Luís: Si.. ¿no?...
Cris: No... sería cero cero ¿no?... pues de ahí empieza, ¿no? del cero, cero... pero no sé... es obvio lo del cero cero...

Es Cris quien no escucha la idea de los compañeros y argumenta su punto de vista incorporándose así la ficha [0//0] al conjunto, lo cual atraería la construcción de las fichas [-2//-1], [-4//-2] y [-8//-3] manteniendo la idea de que se "multiplica por 2" pero aplicándola en sentido contrario, quebrando así el patrón de crecimiento de las fichas y generando dos patrones diferentes, uno hacia la derecha y otro hacia la izquierda.

El Equipo C es el único que incorpora dos fichas importantes sin cuestionarse, la [1//0] convención matemática que permite que las reglas del juego sean válidas, y la ficha [2//1] que evidencia la base del juego. En su argumentación final incorporan expresiones algebraicas para sintetizar sus ideas (Tabla II).

Vemos en los tres equipos sensibilidad para percibir los cambios en las variables, que ambas crecen pero de manera diferente. En la parte inferior de las fichas reconocen que se trata de los naturales dando por hecho su particular crecimiento pero sin reparar en él. Sólo el Equipo C distingue el patrón de crecimiento de los naturales donde se suma 1. Para la progresión geométrica, en cambio, los equipos mencionan que se trata de "multiplicar por dos" o "duplicar", argumento que se estabiliza al seguir con la construcción de las fichas.

4.2. *Descubriendo las reglas del juego*

Al iniciar la actividad 3 aparecen, en los equipos, interesantes discusiones alrededor de cómo multiplicar utilizando las fichas que habían construido en actividades anteriores. El Equipo A evoca operaciones con fracciones realizando multiplicaciones cruzadas, en tanto que los otros abstraen las operaciones que habían utilizado en la construcción de fichas, multiplicar arriba y sumar abajo.

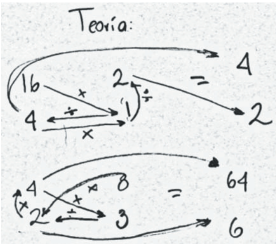
TABLA III
Descubriendo las reglas del juego

	Equipo A	*Equipo B*	*Equipo C*
Argumento inicial	Usan la multiplicación cruzada evocando operaciones que se utilizan en las fracciones. Tania es quien destraba y convence a sus compañeros de *multiplicar sumando*.	Encuentran la regla de *multiplicar sumando* y generan un juego para comprobarla. Determinan que el divisor debe ser menor que el dividendo por tanto no aceptan fracciones vinculadas con negativos.	Fany rápidamente visualiza la relación entre las fichas, pues observa que si suma los valores inferiores de las fichas sólo tiene que multiplicar los números de arriba y que ambas operaciones forman otra ficha.
Argumento final	Encuentran la regla de *dividir restando* y establecen: *"la ficha primera debe ser mayor que la ficha segunda… sólo en caso de división, en la multiplicación no varía".*	Analizan ficha por ficha de derecha a izquierda lo cual implica ampliar la regla de *dividir restando*. Reemplazan la ficha [-2//-1] por [0.5//-1].	Antonio expresa: "*Porque la multiplicación y la división… la haces más fácil si sumas o restas acá para verificar aquello… por ejemplo sumas acá y ya está…*
	Multiplicar sumando para todo par de fichas. *Dividir restando* sólo para dividendos mayores que divisor		Crean el ambiente aceptando *multiplicar sumando* y *dividir restando*

En el Equipo A surge la idea de multiplicar y dividir de manera cruzada. Yosy presenta su idea, apoyada por Jorge, comentando que se trataba de formar un "triangulito" (Figura 4). El cambio de argumento lo provoca la maestra al solicitarles que le muestren si su regla funciona para [512//9] y [4//2] observando así, que su mecanismo es puntual y no generalizable en el juego. Tania, que había estado al margen de esas discusiones, comparte su hallazgo:

Tania: Salió... jijij... salió... miren... éste por éste da éste (*lo hace horizontalmente saltando entre los números de la parte superior de dos fichas*) y luego... tres más dos... si… si... a ver...

Todos: Aja... qué bien Tania.



Yosy: Es un triangulito

Tania: Salió... miren... éste por éste da éste

Figura 4. Avance en argumentos en el Equipo A

Una vez comprendido el mecanismo que propone Tania y que comparten con la maestra, se les pregunta sobre qué pasaría si se quiere dividir. Jorge, sin pensarlo, asocia la división con la resta, lo prueban varias veces con distintas fichas, al igual que con la multiplicación, y se convencen de que funciona. Sin embargo en este caso, sólo consideran aquellas fichas donde el dividendo sea mayor que el divisor.

En el Equipo B, Roberto inicia haciendo multiplicaciones y divisiones con los números de las fichas [4//2] y [32//5] pero Cris inmediatamente coloca la ficha correcta [128//7] presentando su argumento a sus compañeros y proponiéndoles convertirlo en un juego tipo dominó. Por tanto, dan vuelta las fichas, las revuelven y sacan dos cualesquiera; luego vuelven a colocar las fichas con los números hacia arriba y buscan siguiendo su regla de *multiplicar sumando* la ficha que corresponde, jugando así entre risas.

Cris: ¿Cuánto es... 256 x 8? Nada más sumamos 8+3

Roberto: Aja...

Cris: Y buscamos la ficha que tenga el 11, eso será la multiplicación de 256x8... si yo tengo esta ficha y esta ficha... y quiero multiplicar... para hacerlo más fácil... sumamos abajo... por eso son importantes los de abajo... para que sea más ágil la multiplicación... pues cuanto es esto por esto (*marcando los números de arriba*) no sé... pero si sumamos... mmm donde está, donde está la del once...

Roberto: Aca ta...

Luís: Ja ja ja ja...

Cris: Entonces da... 2048

Roberto: GUAUUUUUU jajaja...

Cris: Bueno... anotemos... Y para la resta supongo que es lo mismo, pero viceversa para restar, ¿cuánto es esto entre esto?... pues nada más restamos esto.

Vemos así que rápidamente adoptan el argumento de *multiplicar sumando*, incluso el de *dividir restando*, aunque aún no se han enfrentado con la idea de que el divisor sea mayor que el dividendo, cosa que ocasiona problemas más adelante (Figura 5).

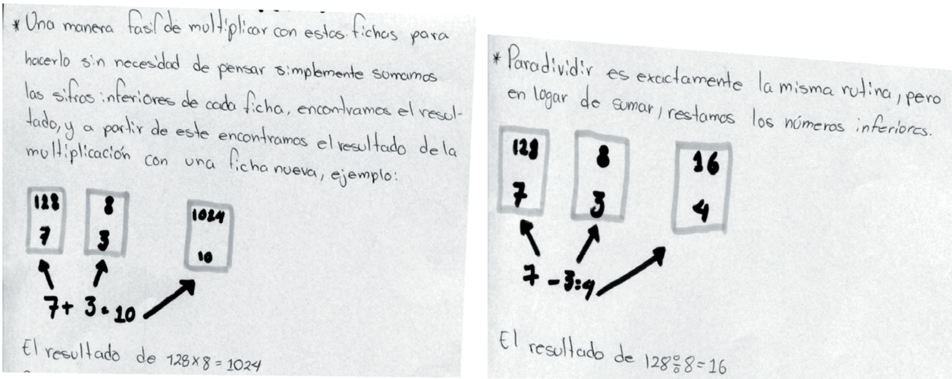


Figura 5. Cómo multiplicar o dividir “sin necesidad de pensar”

En el equipo C, es Fany quien encuentra la regla de *multiplicar sumando*, comentándolo con sus compañeros. Antonio le ayuda a buscar más ejemplos para probar su argumento y descubren también la regla detrás de la división (dividir implica restar), aceptando rápidamente la presencia de negativos y decimales (ver Tabla III). Este argumento permite al equipo aceptar sin problemas moverse de derecha a izquierda cambiando el argumento de ir multiplicando por dos a saltar dividiendo por dos, donde la reversa suele ser compleja para los estudiantes como lo denota el Equipo B.

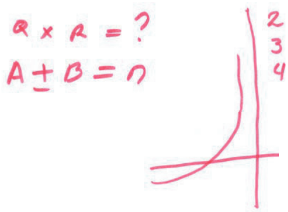
Antonio: Si vamos para allá (*indicando hacia la izquierda*) tendríamos que ir dividiendo entre dos...
Viri: Sería entonces cero punto cinco... de ahí cero punto veinticinco...
Antonio: Pero qué números usamos para eso...
Viri: El tres y el cinco...
Antonio: Mira, si pongo estas fichas (*colocando las fichas 2 y 3 respectivamente*) entonces me queda 2 menos 3 es menos 1...
Viri: Es menos uno y acá sería punto cinco… mira...
Antonio: Entonces eso sería lo que va acá arriba (*señalando la hoja de trabajo*)
Viri: Entonces aquí iría menos uno y acá punto... punto cinco.
Antonio: Vas entonces quitando la mitad, la mitad.

Pese a que durante todo el desarrollo de la actividad los equipos van descubriendo la esencia del diseño que los va acercando a ideas logarítmicas, desde el trabajo con la covariación de progresiones, no logran abstraer una relación algebraica más general pero dejan evidencias de su acercamiento covariacional al ir relacionando tímidamente "lo de arriba y lo de abajo".

4.3. *Encontrando una ficha comodín*

Todos los equipos se enfrentan con la necesidad de construir o rechazar ciertas fichas y generar una ficha general. Sólo el Equipo A se empantana en una covariación lineal, reduciendo su exploración a la construcción de la siguiente ficha. Los Equipos B y C abstraen la covariación logarítmica, el primero con una expresión algebraica, el otro, generando una red de modelos especial.

TABLA IV
Algebrizando las fichas

	Equipo A	*Equipo B*	*Equipo C*
Argumento inicial	Usan la regla de *multiplicar sumando* y *dividir restando* para afianzar el patrón de crecimiento implicando que [0//0] no pertenece al juego.	Destierran [0//0] al usar la regla de *dividir restando* y la aplican a todas las fichas ordenadas, moviéndose de derecha a izquierda de la fila.	Aceptan las reglas de *multiplicar sumando* y *dividir restando* es decir, usan las propiedades de los logaritmos para estudiar la relación entre los patrones de crecimiento.
Argumento final	Establecen dos patrones diferentes y no relacionados. $\frac{m/2}{n-1}$ ó $\frac{2m}{n+1}$	Relacionan los dos patrones algebraicamente. 	Buscan la relación "arriba - abajo" tabular, algebraica y gráficamente. 

El Equipo A, descarta pronto la posibilidad de que una ficha tenga el 0 en su parte superior siendo su explicación: *si seguimos la secuencia a la inversa, debemos restar en una unidad los números de abajo, mientras que debemos dividir entre dos al número anterior de la parte de arriba –manera larga– No existe la ficha cero porque no hay nada que multiplique o divida al 0.*

La sospecha de que este equipo no ha abstraído la covariación logarítmica del juego se confirma al observar la ficha general que proponen: [*2m//n+1*] (Tabla IV). Consideramos que miran los patrones de cada línea de valores separadamente sin construir la íntima relación que existe entre ellos a través de las operaciones involucradas, argumento central de facilitar cálculos.

El Equipo B, por su parte, cambia radicalmente los argumentos que esgrimían sobre que la ficha [0//0] no pertenecía al juego. Intuyen que existen más fichas entre las que han construido:

Cris: Según la regla si debe haber... se pueden hacer más... Por ejemplo... esta ficha... y esta ficha... hubiera otras en el medio... (*Separa ambas fichas e indica con la mano entre medio de ellas*)
Roberto: Ajá...
Cris: Si hubiera más fichas...
Roberto: Si pero solamente... ¿las positivas?
Cris: En teoría sí... si hubiera más fichas... por ejemplo uno punto uno... uno punto dos... uno punto tres... uno punto cuatro... y así... entonces... ¿esto está bien?
Roberto: Si está bien...

Sin embargo, esta aceptación de infinidad de fichas se acota hacia los enteros en ambas partes en un intento por encontrar la manera de incorporar o rechazar aquellas fichas que presentan decimales. Discuten con la maestra respecto a las fichas donde involucran dos números negativos. Para confrontarlos, juega con ellos eligiendo las fichas [2//1] y [4//2] de tal manera que al dividir quedara un negativo debajo y observaran que arriba se debería asociar una fracción.

Maestra: A ver... ¿cómo vamos?
Cris: Ya hicimos más fichas...
Maestra: Ajá… veamos... (*La maestra se pone a jugar con sus fichas*) mmm... entre ésta y ésta (*elige* [2//1] y [4//2]) ¿cuál sería la respuesta si multiplicamos?
Cris: Es más fácil irnos por abajo... mmmm sería ésta... (*Sin dudar propone la de* [8//3]) pues esto más esto es esto... y multiplicamos arriba...
Maestra: Aja... si ahora usamos la regla de dividir...
Cris: Pues restaríamos... sería la del menos uno... (*Elige la ficha construida por ellos* [-2//-1] *ya que cumple con la resta inferior*) es ésta... por el menos uno...
Maestra: A ver... ¿cómo sería con ésta?

Cris: Dos y cuatro... menos dos...
Maestra: A ver... a ver... si tenemos por ejemplo la [8//3] y la dividimos con ésta [4//2] ¿cuál sería la ficha que corresponde?
Luís: Ésta... (*Señalando la ficha* [2//1])
Cris: Ésta... tres menos dos... uno.
Maestra: Ajá... ¿por qué?
Cris: Pues porque ocho entre cuatro es dos.
Maestra: Ok. Ocho entre cuatro es dos... ¿funciona lo mismo aquí entonces? (*regresa la ficha a la posición anterior para que quede* [2//1] y [4//2])
Cris: Pues... uno menos dos...mmm.... Menos uno... y... dos entre cuatro... mmmm
Maestra: Bueno... vean eso... (*y se retira pues otro equipo la requiere*)

En el primer intento los muchachos no ceden, colocan la ficha de [-2//-1] como respuesta y explican que 2-1 = -1 sin reparar en que 2/4 = 0.5. Ante el olvido de la regla que habían consensuado en la actividad anterior la maestra elige la ficha [8//3] con la [4//2] y vuelve a preguntar, escuchando ahora la regla que esperaba: *"Arriba dividimos y abajo restamos".* Recalca ambas operaciones y los regresa a la primera pregunta *¿cuál es la ficha que corresponde si dividimos* [2//1] y [4//2]? y los deja para que discutan. Luís declara que en realidad se trata de un número positivo y otro negativo, lo cual los lleva a revisar todas sus fichas. Cris propone ordenarlas y utilizan sólo las que tienen escritas con plumón iniciando con [2//1] hacia la derecha y colocando a la izquierda la ficha [0//0] seguida por la [-2//-1] escritas en lápiz, denotando sus dudas al respecto. Luego Luís construye [-4//-2] y [-8//-3] propuesta por Roberto multiplicando (-4)*(2) = (-8) y las agrega a su línea de fichas en lápiz.

Al considerar que ya tenían el ámbito propicio para discutir, retoman el problema que les dejara la maestra, dividir [2//1] con [4//2] y que separan de la fila de fichas. Se sorprenden al aplicar la regla de *dividir restando*, pues les aparece el 0.5 y desechan [-2//-1]. Deciden entonces recorrer la fila de fichas desde la más grande hasta la más pequeña, es decir, incorporan la calculadora y empiezan a verificarlas desde [16//4] hacia la izquierda dividiendo entre dos y restando uno. Cris indica a la maestra que los números de arriba se van dividiendo entre dos, siendo así como continúan extendiendo las fichas hacia los números negativos en la parte de abajo.

Al intentar sintetizar sus conclusiones Cris retoma su idea inicial de que existen infinidad de fichas que se pueden construir, aceptando ahora el límite del 0 en la parte superior como una barrera infranqueable. Roberto afirma la cota hacia la izquierda al mencionar que se permite el cero punto y tantos ceros como quisiera.

Cris: Digamos que las aceptamos pues la secuencia nunca termina... mmm... la secuencia...
Roberto: Sale de ir dividiendo entre dos...
Cris: Aja... y al ir dividiendo por eso no termina.
Luís: No pero fíjate que tenemos que explicar también por qué así...
Cris: Pues porque las construimos... es como que dijeras... cero punto cinco por dos... te da ésta... o sea... la secuencia puede haber empezado... (*indica hacia el infinito de ambos lados abriendo sus brazos*)
Roberto: Cero punto cero cero cero cero...
Cris: Si... sigue para todos lados... y si tomamos un número grande lo multiplicamos por dos y va a ser otro número y con todo eso llegamos a éstos.

Todos los equipos se retiran habiendo concluido que la ficha con la que se puede construir cualquier otra es la de [*2n//m*], pero el equipo B se queda para contestarlo explorando con la calculadora. Empiezan multiplicando varias veces el dos para ir rehaciendo las fichas y se percatan que está vinculado con el número de abajo. Roberto y Cris abstraen que se trata de 2^n, ya que el dos se multiplica varias veces, argumento que comparten y dictan a Luis para que se incorpore en el informe (Figura 6). Abstraen así el modelo algebraico que rige el juego, y donde las reglas de *multiplicar sumando* y *dividir restando* encuentran un respaldo más robusto.

6.- ¿Cómo podríamos construir cualquier ficha? Es decir, ¿qué deberíamos colocar arriba si abajo aparece *n*? **Argumenten** sus respuestas.

Figura 6. Construyen la ficha general

En el Equipo C, Antonio le comentar a Fany: *Nos pide que expliquemos... a ver... éste va al doble y éste va al doble... y éste al doble... y éste al doble... pero... esto sería encontrar una relación entre lo de abajo y lo de arriba... por* *ejemplo entre menos dos y punto veinticinco... para así sacar la general.* Mientras habla con Fany ya no presta atención a lo que sus compañeras están realizando y comienza a garabatear en su papel. Produce entonces una tabla vertical con los valores de las fichas etiquetando con x a la progresión aritmética y con y a la progresión geométrica evocando quizás los cánones escolares, donde el 1, 2, 3 etc... se reserva para las variables independientes. Sin embargo, para Antonio no tiene importancia la etiqueta, son sólo nombres que les permite manipular las cantidades.

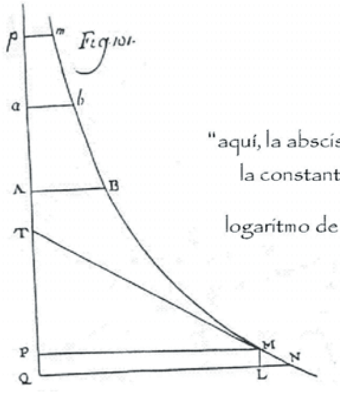
Antonio: Debe haber alguna relación...
Viri: Espérate que no acabo con esto... (*Escribiendo el informe de clase*)
Antonio: Podría ser que los representáramos como a más b igual a equis... donde a...
Fany: Y b...
Antonio: Mmmm… y ene...
Maestra: ¿Cómo van por acá ya terminaron?
Viri: Ese ene indica el uno dos tres... y así... y puede ser infinito... sí... ene puede ser infinito...
Maestra: Si ene puede ser cualquier número... entonces ¿qué escribirían aquí?
Antonio: Hay algo que todavía no entiendo... mmm conozco esto y éste me puede dar cualquier número... y la solución sería a más b... donde mmmm... (*indicando los números de abajo*) Donde a y b serían los números de abajo sumando o también podría ser a menos b dependiendo si está multiplicando o dividiendo y ya... Y la otra es una relación que hay entre uno y dos, entre el cuatro y el dieciséis, siete y ciento veintiocho pero esa todavía no la encuentro...
Maestra: A ver... si lo que dices ahí es que si sumo aquí me da otro número aquí... (*indica la mesa como si hubiera un ficha ahí*) y lo que faltaría es mirar lo que pasa arriba ¿no?
Antonio: Si... ahí sería multiplicando... si pero sería... mmm... (*Escribe* AxB) y esto sería otra cosa...
Maestra: También se podría ver, como decías recién, la relación entre lo de abajo y lo de arriba...
Antonio: Es que esto tiene una forma como... como una hipérbola... es que va creciendo cada vez más...

En la síntesis de Antonio, encontramos cierto acercamiento a ideas covariacionales, así como la búsqueda de una expresión algebraica que vincule a ambos patrones de crecimiento. La construcción de la íntima relación entre los valores involucrados en cada ficha se evidencia en el esbozo de una curva que etiqueta como una hipérbola. Comenta además, que hay una relación entre x e y, para lo cual utiliza letras diferentes para denotar la relación entre sumar y multiplicar, lo que informa sobre su interés de descubrir lo que hay detrás de estas fichas, aunque no logra abstraer la expresión algebraica que las vincula.

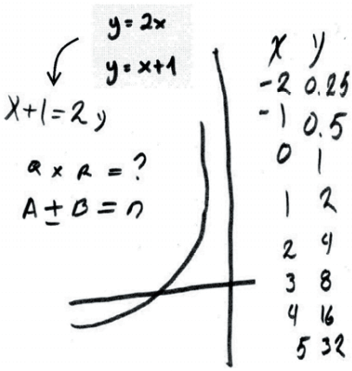
La gráfica de Antonio (Figura 7), en cuanto al uso “desprolijo” en visión de una matemática escolar, nos regresa a las ideas eulerianas donde los ejes aún eran algo secundario, quién es la abscisa y quién la ordenada estaba bien establecido, pero su posición, variaba en la época, a veces horizontal a veces vertical, sin interesar demasiado determinar el origen ya que quedaba establecido por la intersección de la curva y el único eje considerado o, en el caso de la gráfica de Euler, declarando que A es el origen y AP = *x*. Lo importante es para Antonio, visualizar el crecimiento para lo cual utiliza dos variaciones diferentes, pero que simultáneamente pensadas emerge una gráfica especial.

x	0	c	2c	3c	...
y	a	am	am²	am³	...

Producción de Antonio



“aquí, la abscisa *AP* dividida por la constante *b* expresa el logaritmo de la razón $\frac{PM}{AB}$”



Imágenes tomadas de: Introduction to Analysis of the infinite (Euler, 1748, volumen 2 p. 335 y p. 488).

Figura 7. Similaridades con intencionalidades dispares

Vemos que Euler (1748 / 1990) parte de conocer el crecimiento exponencial, en tanto que Antonio no lo había aún abstraído ya que las regla que rigen su tabla son $x = n + 1$ e $y = 2n$, argumento que no le termina de convencer pues coloca luego $a \times b = ?$ Ambos, esbozan así a la actual función exponencial donde la variable independiente es la progresión aritmética y la variable dependiente la progresión geométrica, donde el uso de la gráfica es sólo descriptiva, visualizar algunas características.

5. Reflexiones finales

Introducir a los estudiantes en un modelo numérico en búsqueda de un acercamiento a la covariación logarítmica mediante un juego diseñado en la potencia de base dos, nos arroja elementos sobre los argumentos que generan, así como las herramientas que intentan construir para resolver algunas de las preguntas que se les presenta.

Al centrar la discusión en lo numérico, y a manipular fichas donde se les solicita ordenarlas, por tanto invitarlos a descubrir el patrón de crecimiento y percibir la diferencia entre una y otra de las sucesiones implicadas, los lleva a recordar y profundizar algoritmos escolares tales como la multiplicación (división) reiterada, la suma (resta) pero más cerca de visualizar la recta numérica que la operación en sí. Pocos de ellos intentaron moverse de derecha a izquierda, ya que el cero sigue siendo una barrera, que en esta covariación es muy interesante, pues el par [1//0] anuncia que el elemento neutro de cada mundo en el que nos movemos es distinto. Sólo el Equipo C incorpora inmediatamente esta ficha como parte del juego para extenderlo disparando en ellos, más adelante, la aceptación natural de los decimales y negativos asociados. Aquellos que sólo extendieron las sucesiones hacia la derecha presentaron problemas para integrar la ficha [1//0], ya que consideraron que [0//0] permitía construir fichas hacia la izquierda tales como la [-2//-1] (Equipo B).

Moverse hacia la izquierda genera, en la mayoría de estos estudiantes, un quiebre de la regla de construcción del juego. El Equipo B por ejemplo, construye sus fichas luego de la [0//0] repitiendo la regla de multiplicar por dos y sumar uno, manteniendo en los dos el cambio de signo, convirtiéndose la asociación entre las mismas fichas pero con signo negativo en un argumento que los retiene en la exploración de la regla de *dividir restando.* Sin embargo, es la regla de *multiplicar sumando* la que los hace desistir de fichas tales como [-2//-1] o [-4//-2] ya que se quiebra la regularidad de su uso.

Efectivamente, la regla de multiplicar que determinaron sin dejar de pasar por momentos de utilizar algoritmos escolares útiles para trabajar con fracciones, provocado por la cierta similitud del arreglo de los números en el diseño, enriquece sus argumentos covariacionales ya que comenzaron a vincular con mayor precisión los dos patrones puestos en juego y por ende la función que involucran. Intentar verificar la regla de *multiplicar sumando* los lleva a dejar de multiplicar priorizando la suma de los números inferiores de las fichas para determinar la respuesta y luego, como prueba, hacer la multiplicación; elementos que los acerca a las propiedades de los logaritmos, a su uso primigenio.

Ver que usan este argumento para hallar una ficha en la que el número inferior era bastante grande, refuerza la construcción de nuevas herramientas, la propiedad de multiplicar para los logaritmos y, adosada a ella, la de dividir.

Los estudiantes abstraen elementos importantes en el acercamiento de las propiedades de los logaritmos, que algunas veces confrontan elementos construidos escolarmente, otras, extienden su uso. Regresarlos a pensar el papel que juega el cero en este juego de fichas logarítmicas, nos advierte la dificultad de interiorizar un razonamiento covariacional donde el isomorfismo se establezca entre una progresión geométrica regida por la multiplicación y una aritmética, por la suma. El Equipo C, particularmente Antonio, demuestra en sus informes y comentarios que ése es su mundo, por ello, incorporar la ficha [1//0] es algo natural, así como construir una red de modelos donde convoca lo tabular, gráfico y algebraico evidenciando la íntima relación que le da a ambas progresiones. Esto contrasta con la producción del Equipo A, que si bien considera y acepta la ficha [1//0], presenta ciertas dificultades en aceptar la división en cuanto a que el cociente sea un decimal, pero logra atravesar ese límite, así como una cierta resistencia a interrelacionar los patrones de crecimiento para lograr una explicación algebraica.

Lo más discordante es que el Equipo B, que presentara tanta resistencia para desechar la simetría "negativo - negativo" al moverse hacia la izquierda y del [0//0] como parteaguas de fichas, logra la abstracción algebraica [2^n//n] que sus compañeros no logran visualizar. Lograr una expresión algebraica para describir cierto fenómeno nos anuncia una importante síntesis de argumentos, donde escolarmente es priorizada en detrimento de otros modelos y que en nuestro diseño implicaba incorporar otros elementos como base y exponente, pero también nos obliga a reflexionar sobre el papel que juega en la apropiación de ciertas herramientas.

Efectivamente, la covariación logarítmica va más allá de poder escribir una fórmula, involucra la posibilidad de movilizar argumentos como la regla de *multiplicar sumando*, o *dividir restando*, de aceptar la existencia de un exponente, de no ser sólo un juego de números discreto y muy arreglado para que las cosas funcionen. El intento de construir una red de modelos de Antonio, nos acerca a lo que consideramos la antesala a un pensamiento covariacional logarítmico, más allá del que el Equipo B logra. Si bien hubo ausencia de una expresión algebraica única en la producción de Antonio, construye dos respetando el patrón de crecimiento de cada uno, pero que en el uso de las letras y de sus comentarios se percibe sus ansias por hallar "la" expresión que describa a ambos, síntesis que logra en su esbozo de gráfica y que un profesor exigente rechazaría.

El Equipo A, en cambio, invierte mucho tiempo en utilizar argumentos escolares muy ligados al trabajo de fracciones, para descubrir la regla de multiplicar, lo que también se percibe en su expresión algebraica final donde mantienen la separación de ideas. La multiplicación cruzada, de uso muy limitado, es desarrollada por tres de los muchachos del grupo, estableciéndose una especie de círculo difícil de romper para buscar otro argumento. Es Tania, quien no había entrado en ese círculo de discusión sino que se había aislado de él, la que propone otra idea, la de *multiplicar sumando*, que es tomado como un respiro por el equipo y aceptado sin mayor discusión. Vemos así cómo la interacción, a veces general, a veces puntual, juega un papel fundamental en la evolución de los argumentos.

Desde nuestra visión, un argumento no es individual, es el producto de un consenso. Implica aceptar la argumentación colectiva como una de las unidades de análisis respecto al acercamiento a la covariación logarítmica. Por ello, hablamos de argumentos iniciales y finales, de aquellos que retienen y propician su evolución, que se van construyendo o desechando en el camino de construir lo logarítmico.

6. Conclusiones y discusión

Esta investigación demuestra que: (1) el diseño de aprendizaje contribuyó a la percepción de los estudiantes de los patrones de crecimiento permitiéndoles deducir la yuxtaposición de las operaciones "multiplicar sumando" y "dividir restando" para facilitar cálculos y (2) el esbozo de un gráfico (Equipo C) y de expresiones algebraicas (Equipo B) evidencia la abstracción del isomorfismo entre los patrones de crecimiento en los estudiantes y por tanto acercándolos a percibir la covariación logarítmica base del diseño de aprendizaje.

Efectivamente, el diseño de aprendizaje se basó en las ideas reportadas por Confrey y Smith (1995) para la función exponencial. Sin embargo, vamos más allá de estas ideas dando prioridad no sólo a las tareas de la operatividad entre "a counting world" y "a splitting world" para reconocer cómo crecen las progresiones, sino también el par (1,0) (Neutro multiplicativo, Neutro aditivo), lo que garantiza los logaritmos como facilitadores de los cálculos (Napier, 1614). Consideramos ambos elementos importantes para un acercamiento covariacional logarítmico, evidenciado en la argumentación de los estudiantes, allanándose el camino a la apropiación de función logarítmica.

Investigadores como Castillo - Garsow (2010) y Castillo - Garsow, Johnson y Moore, (2013) han propuesto conceptos como "chunky variation" y "smooth variation" para estudiar el desarrollo del razonamiento covariacional de estudiantes. Thompson (2011) aclara que la concepción de una variación continua se llama "chunky" si se piensa en la variación de la cantidad de manera discreta es decir, un "trozo" es la percepción del cambio de una variable en términos del siguiente valor y por tanto se acepta la existencia de un hueco entre un valor y el siguiente; pero esto no significa que deben ser considerados vacíos. Por otro lado, la idea de una variación continua se llama "smooth" si se percibe que el siguiente valor es una consecuencia de un cambio suave, lo que significa que hay diferentes valores entre ellos. Percibimos ambas concepciones durante las argumentaciones de los estudiantes a pesar de que nuestro diseño se basó en un arreglo discreto de cantidades. La variación "chunky" se percibe en el equipo B. Si bien argumentaron que podría haber fichas infinitas que nunca cruzarían la barrera cero y establecieron que la "secuencia nunca termina", lo que les permitió concluir que la regla es "potencia de dos (arriba) y enteros (abajo)", siempre visualizaron pares discretos. Por otra parte, el Equipo C muestra una concepción de "smooth variation" en todas las actividades ya que, aunque se detuvo en cantidades específicas para multiplicar y sumar, abstrae una variación continua de manera gráfica. Nuestros resultados contrastan con Castillo - Garsow et al. (2013) ya que establecen que el pensamiento "chunky variation" no implica el pensamiento "smooth variation" iniciándose así la posibilidad de discutirlos. Consideramos que es importante profundizar este diálogo entre concepciones de cantidades que cambian, especialmente aquellas que implican diferentes formas de crecimiento, como la covariación logarítmica regida por la multiplicación y la adición en eventos discretos así como abonar a la discusión sobre la argumentación en la construcción de conocimiento matemático en ámbitos escolares.

Notas de las autoras

Agradecemos la colaboración de la Universidad Autónoma de Guerrero, particularmente de la Unidad Académica de Matemáticas en el desarrollo de este proyecto de investigación. En este artículo se reporta la primera sesión de un curso de seis semanas diseñado para la emergencia de la función logarítmica en las discusiones con estudiantes de sexto semestre de bachillerato en México.

Referencias bibliográficas

Abrate, R. & Pochulu, M. (2007). Ideas para la clase de logaritmos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 10*, 77-94.

Arrieta, J. & Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18* (1), 19-48.

Artigue, M. (2015). Perspectives on Design Research: The Case of Didactical Engineering. En A. Bikner - Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 467-496). USA: Springer.

Ayoub, R. (1993). Whats is a Napierian Logarithm? *The American Mathematical Montlhy*, *100* (4), 351-364.

Bagni, G. T. (2004). Una Experiencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *7* (1), 15-24.

Billing, M. (1989). *Arguing and thinking. A rhetorical approach to social psychology.* Cambridge, UK: Cambridge University.

Briggs, H. (2004). *Arithmetica logarithmica*. [(I. Bruce traductor). University of Adelaide, Australia]. Obtenido en enero de 2004, desde: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Miscellaneous/Briggs/index.html. (El trabajo original se publicó en 1620).

Buendía, G. (2005). Prácticas sociales y argumentos: el caso de lo periódico. En J. Lezama, M. Sánchez y J. G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *18*, 451-456. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Buendía, G. (2010). Articulando el saber matemático a través de prácticas sociales. El caso de lo periódico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13* (4-1), 11–28.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* España: Gedisa

Cantoral, R. & Farfán, R. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en didactique des mathématiques*, *24* (2.3), 137-168.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33* (5), 352–378. doi: 10.2307/4149958

Castillo - Garsow, C. (2010). *Teaching the Verhulst model: a teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth.* Tesis doctoral no publicada. Tempe, AZ: Arizona State University.

Castillo - Garsow, C., Johnson, H. L., & Moore, K. C. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics*, *33* (3), 31–37.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, *26* (2-3), 135–164.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26* (1), 66–86.

Cordero, F. (2007). El uso de gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.) *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp. 265-286). México: CLAME - A.C. Díaz Santos.

Cordero, F., Cen, C. & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13* (2), 187-214.

Chevallard, Y. (1995). *La Transposición didáctica.* Buenos Aires, Argentina: Aique.

Douady, R. (1986). Jeux de Cadres et Didactique outil - objeto. *Recherches en Didactique de Mathématique*, *7* (2), 5-31.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1983). The function concept in college students: Linearity, Smoothness and periodicity. *Focus on learning problems in mathematics*, *5* (3-4), 119-132.

Dubinsky, E. (1992). The nature of the process conception of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA Notes, Vol. 25 (pp. 85-106). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992) (Eds.) *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.* MAA Notes, Vol. 25. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et penseée.* Suiza: Edition Peter Lang

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the Middle School: Developing Functional Relationships Through Quantitative Reasoning. En J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 215–238). Berlin, Germany: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-17735-4

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Williams, C., & Amidon, J. (2012). Quantifying exponential growth: The case of the jactus. En R. Mayes & L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context* (pp. 93–112). Laramie, WY: University of Wyoming. Recuperado de: http://www.uwyo.edu/wisdome/_files/documents/ellis_et_al.pdf

Even, R. & Brukheimer, M. (1998). Univalence: A critical or non critical characteristics of Function? *For the learning of mathematics*, *18* (3), 30-42.

Euler, L. (1990). *Introduction to Analysis of the infinite (Book II)*. USA: Springer - Verlag. (Trabajo original publicado en 1748).

Falcade, R., Laborde, C. & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics 66* (3), 317-333. doi: 10.1007/s10649-006-9072-y

Ferrari, M. (2008). *Un estudio socioepistemológico de la función logarítmica. De facilitar cálculo a una primitiva* (Tesis doctoral no publicada) Centro de Investigación y Estudios Avanzados - IPN, México.

Ferrari, M. & Farfán, R. M. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11* (3), 309-354

Ferrari, M. & Farfán, R. M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13* (4), 59-68

Gonzáles, M. & Vargas, J. (2007). Segmentos de la historia: la función logarítmica. *Matemáticas Enseñanza Universitaria XV* (2), 129-144.

Hitt, F. & González - Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self - reflection) method. *Educational Studies in Mathematics*, *88* (2), 201–219. doi: 10.1007/s10649-014-9578-7

Hoffkamp, A. (2011). The use of interactive visualizations to foster the understanding of concepts of calculus: Design principles and empirical results. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *43* (3), 359–372. doi: 10.1007/s11858-011-0322-9

Johnson, H. L. (2015). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics, 89* (1), 89-110. doi: 10.1007/s10649-014-9590-y

Kaput, J. (1992). Patterns in student' formalization of quantitative patterns. En E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy,* MAA Notes, Vol. 25 (pp. 175-193). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Kenney, R. & Kastberg, S. (2013). Links in Learning and Transferable Skills. *Australian Senior Mathematics Journal*, *27* (1), 12–20.

Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. En A. Bikner - Ahsbahs C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Researchin Mathematics Education, Advances in Mathematics Education*, (pp. 51-74), USA: Springer.

Liang, C. B., & Wood, E. (2005). Working with Logarithms: Students' Misconceptions and Errors. *The Mathematics Educator*, *8* (2), 53–70.

Martínez - Sierra, G. (2012). Concepciones y matemática escolar: Unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15* (1), 35-62.

Moore, K. C. (2014). Quantitative Reasoning and the Sine Function: The Case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45* (1), 102–138. doi: 10.5951/jresematheduc.45.1.0102

Napier, J. (1614 / 1616). *A description of the admirable table of logarithms.* London: Nicholas Okes (1616). Editie vertaald uit het Latijn door Edward Wright. Disponible en: http://www.ru.nl/w-en-s/gmfw/bronnen/napier1.html

Oehrtman, M., Carlson, M., & Thompson, P. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. En M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the Connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (pp. 27–42). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Panagiotou, E. N. (2011). Using History to Teach Mathematics: The Case of Logarithms. *Science and Education*, *20* (1), 1–35. doi: 10.1007/s11191-010-9276-5

Park, E. J., & Choi, K. (2013). Analysis of student understanding of science concepts including mathematical representations: pH values and the relative differences of pH values. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*, 683–706.

Schubring, G. (2008). Gauss e a tábua dos logaritmos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11* (3), 383-412

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, *33* (3), 259–281.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. En L. L. Hatfield, S. Chamberlain, & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education* (Vol. 1, pp. 33–57). Laramie, WY: University of Wyoming.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991) (Eds.), *Visualization in Teaching and Mathematics,* MAANotes Series, USA.

Autoras

Marcela Ferrari Escolá. Universidad Autónoma de Guerrero, México. mferrari@uagro.mx

Rosa María Farfán Márquez. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México. rfarfan@cinvestav.mx