

CÉLIA DIAS, LEONOR SANTOS

## PORTEFÓLIO REFLEXIVO DE MATEMÁTICA ENQUANTO INSTRUMENTO DE AUTORREGULAÇÃO DAS APRENDIZAGENS DE ALUNOS DO ENSINO SECUNDÁRIO

REFLECTIVE PORTFOLIO OF MATHEMATICS AS A TOOL FOR SELF-REGULATION  
OF LEARNING FOR HIGH SCHOOL STUDENTS

### RESUMEN

El presente estudio tuvo como objetivo analizar aspectos del aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de secundaria en situaciones mediadas por un dispositivo para la evaluación para el aprendizaje. En concreto, se estudiaron los procesos que tres estudiantes utilizaron cuando se desarrolló un portafolio de matemáticas. El trabajo se centra en la actividad del estudiante, y la mayoría de las decisiones fueron transferidas al estudiante. El análisis del contenido del texto escrito en el portafolio aporta explicaciones sobre aspectos cognitivos y metacognitivos del pensamiento matemático del alumno durante la construcción de dicho portafolio. El portafolio es una manera efectiva y práctica de ejercer una diferenciación pedagógica y ofrece, en un modo continuo y sistemático, el desarrollo de procesos metacognitivos que permitan el desarrollo de un aprendizaje autorregulado.

### PALABRAS CLAVE:

- *Portafolio*
- *Evaluación para el aprendizaje*
- *Autorregulación*
- *Aprendizaje de las matemáticas*
- *Procesos metacognitivos*

### ABSTRACT

This study aims to analyze various aspects of mathematical learning of high school students mediated by a device of assessment for learning. Specifically, we have studied the processes used by three students whilst developing a mathematics portfolio, during which the majority of decisions were taken by them. During the elaboration of the portfolio, cognitive and metacognitive aspects of mathematical thinking were identified. The portfolio is an effective and practical way to create a pedagogical differentiation and to provide, in an ongoing and systematic way, the development of metacognitive processes that enable the development of a self-regulated learning.

### KEY WORDS:

- *Portfolio*
- *Assessment for learning*
- *Self-assessment*
- *Mathematics learning*
- *Metacognitive processes*



## RESUMO

O presente estudo teve por objetivo analisar aspetos da aprendizagem matemática de alunos do ensino secundário em situações mediadas por um dispositivo de avaliação reguladora da aprendizagem. Concretamente foram estudados os processos que três alunos usaram quando elaboraram um portefólio de matemática, onde a maioria das decisões foram por si tomadas. Na elaboração do portefólio, ao longo das sucessivas entradas e versões, foram explicitados aspetos cognitivos e metacognitivos do pensamento matemático. O portefólio constitui uma forma eficaz e prática de exercer uma diferenciação pedagógica e proporciona, de forma continuada e sistemática, o desenvolvimento de processos metacognitivos propícios ao desenvolvimento de uma aprendizagem autorregulada.

## PALAVRAS CHAVE:

- *Portefólio*
- *Avaliação reguladora*
- *Autorregulação*
- *Aprendizagem matemática*
- *Processos metacognitivos*

## RÉSUMÉ

L'étude présentée visait à analyser certains aspects de l'apprentissage des mathématiques dans le cycle secondaire en situations induites par un dispositif d'évaluation régulatrice des apprentissages. Plus précisément, nous avons étudié l'activité de trois étudiants au cours du processus de création d'un portfolio, dont ils ont pris la plupart des décisions. En rédigeant leur portfolio, ils ont explicité des aspects cognitifs et métacognitifs essentiels de leur pensée mathématique au cours des activités. Le portfolio est un mode efficace et pratique pour différencier les apprentissages pédagogiquement et d'une façon continue et systématique. Il stimule une activité métacognitive qui favorise l'autorégulation des apprentissages.

## MOTS CLÉS:

- *Portefeuilles*
- *Évaluation pour l'apprentissage*
- *Autorégulation*
- *Apprentissage des mathématiques*
- *Processus métacognitifs*

## 1. INTRODUÇÃO

A autorregulação das aprendizagens é uma capacidade essencial para a promoção das aprendizagens e do desempenho académico (Zumbrunn, Tadlock, & Roberts, 2011). Mas o desenvolvimento desta capacidade não acontece por acaso ou de forma automática. Envolve o professor em interações de ensino específicas (De Corte, Mason, Depaepe, & Verschaffel, 2011; Zimmerman, 2000). É desta

forma que a avaliação, aqui designada por “avaliação reguladora” das aprendizagens, passa a ter um elevado nível de complexidade, uma vez que se foca no processo de aprendizagem e não apenas nos produtos finais e cada aluno desempenha um papel ativo, reflexivo e responsável.

Contudo, a regulação das aprendizagens e a autorregulação, em particular, levantam ainda muitas questões relativas às situações de aprendizagem que potencializam a responsabilidade e a automonitorização dos alunos (Tardif, 2007). O portefólio tem vindo a ser apontado pela investigação como uma via que favorece uma aprendizagem autónoma e autorregulada, qualquer que seja a idade dos alunos, desde que sustentado por intervenções intencionais por parte do professor (e.g. Belgrad, 2013; Bondoso e Santos, 2009; Klenowski, 2002; Santos & Pinto, 2010). No entanto, pouco têm sido os estudos que evidenciam quais os processos cognitivos associados a estes processos de aprendizagem autorregulada desenvolvidos neste contexto. Acresce o facto de ainda ser escassa, em Portugal, a investigação no âmbito da avaliação reguladora em alunos do ensino secundário. Assim, o presente estudo tem por objetivo compreender em que medida o portefólio pode contribuir para a aprendizagem de alunos do 11.º ano na disciplina de Matemática A<sup>1</sup>, nomeadamente para a aprendizagem autorregulada. A escolha da disciplina de Matemática justifica-se por ser uma disciplina fulcral no currículo escolar dos alunos, por razões de natureza social, cultural e política. Para tal, procurou-se responder à seguinte questão: que processos cognitivos associados a processos de aprendizagem autorregulada são postos em prática pelos alunos para melhorar as suas produções matemáticas no contexto do desenvolvimento de um portefólio?

## 2. ENQUADRAMENTO TEÓRICO

A expressão *avaliação reguladora* encerra em si a mesma ideia da avaliação dita “formativa” – contribuir para a aprendizagem dos alunos. A diferença está em que, na avaliação reguladora, durante o processo de ensino e aprendizagem, tem-se em consideração o desenrolar das tarefas. Os alunos têm oportunidade de criar, pensar/refletir sobre o que criaram, refazer e assim sucessivamente até à apresentação do produto acabado. Ao mesmo tempo, o professor acompanha todo o processo evolutivo do aluno (Santos, 2010). Trata-se pois de uma prática

---

<sup>1</sup> Disciplina de Matemática para os alunos que prosseguem estudos na área das ciências.

avaliativa de natureza interativa, que deixa de estar cingida a momentos formais de avaliação (Pinto & Santos, 2006). É uma avaliação que acontece no quotidiano da sala de aula, “dia-a-dia”, “minuto a minuto” (William, 2007; 2013). A avaliação passa então a ser entendida como um processo de comunicação (Pinto & Santos, 2006) integrada no ato de aprender, como uma forma de “acompanhamento do ensino e da aprendizagem” (Santos, 2008, p. 13).

O estudo, que assenta numa operacionalização da avaliação reguladora, assume que a aprendizagem se processa através de um processo de mediação (Vygotsky, 1987). Considera-se ainda estar presente o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), que é aqui entendido como um espaço simbólico de interação e comunicação, no qual podemos incluir diálogos propriamente ditos (e.g. aluno-professor) ou diálogos internos, uma vez que o mesmo discurso, que medeia a interação social, pode ser usado como o principal mediador da atividade cognitiva, num processo que se pretende que seja de crescente autorregulação.

A autorregulação da aprendizagem é um constructo multidimensional que, segundo Zimmerman (2000), engloba as componentes metacognitiva, motivacional e comportamental. Considera-se que um aluno é autorregulado, na medida em que ele for ativo no conjunto destas três dimensões. A metacognição pode ser entendida como o conhecimento que alguém tem sobre a sua própria cognição e também a monitorização desta (Flavell, 1979). É por esta razão que um dos processos metacognitivos mais importantes é o da automonitorização, que é aqui entendida como uma atenção deliberada aos aspetos externos (reações dos outros, condições do meio) e internos (pensamentos, sentimentos) que ocorrem durante a ação em curso (Silva, Duarte, Sá, & Simão, 2004).

Na dimensão motivacional, salienta-se que a motivação de um aluno para aprender é fortemente influenciada por um sistema de crenças (Hannula, 2006), como as crenças sobre as suas próprias competências ou sobre o valor que tem a aprendizagem. A dimensão comportamental considera, para além de se saber o que é para fazer e como fazer, a execução dos procedimentos adequados (Zimmerman, 2000).

Na disciplina de Matemática, o desenvolvimento da capacidade de autorregulação é feito através do ensino da resolução de problemas e do desenvolvimento do raciocínio matemático (Schoenfeld, 1992). Também há que ter em conta que todos os processos envolvidos no pensamento matemático, mesmo que pareçam simples, não são automáticos e só se tornam “rotineiros” para o aluno depois de lhes ter sido dada atenção específica e sistemática no sentido de uma sua tomada de consciência (Mason, Burton, & Stacey, 1982).

Os processos usados quando se pensa matematicamente apresentados na literatura são diversos e não há uma ordem “rígida” ou pré-estabelecida entre eles (Frobisher, 1994). No entanto, pode afirmar-se que há processos mais estritamente relacionados com a matemática, como a formulação de conjecturas (Pirie, 1987), e há outros que são independentes dos conteúdos matemáticos mas que se aplicam a estes quando se resolvem problemas em matemática, como sejam processos de comunicação (Frobisher, 1994) ou o processo de reflexão (Pirie, 1987).

Comunicação e reflexão são processos intimamente relacionados na aprendizagem matemática. Por um lado, através da comunicação, as ideias tornam-se objeto de reflexão, discussão e aperfeiçoamento (NCTM, 2000; Pugalee, 2004). A *Comunicação* é um dos temas transversais no ensino secundário em Portugal e uma das cinco normas de processo enfatizada pelo NCTM (2000). Por outro lado, a aprendizagem resulta da atividade realizada e da reflexão que sobre ela se efetua (Ponte, 2005). Todo o ato de refletir implica uma atitude ativa e persistente daquilo que se pratica e acredita, tendo subjacente aquilo que se pretende e as suas consequências (Dewey, 1997). Assim, a escrita é promotora da reflexão e da consciência sobre os processos matemáticos e da autorregulação (Kosko & Wilkins, 2010; Powell & Bairral, 2006). De facto, a escrita requer uma estruturação deliberada de uma teia de significados, um discurso interior, de modo que seja plenamente compreensível para quem escreve (Vygotsky, 1987). A reflexão contribui para que seja possível comunicar de forma adequada e compreensível para os outros. Os alunos que escrevem para explicar ou descrever estratégias ou conceitos experimentam uma melhoria na sua capacidade de resolver problemas, de trabalhar estrategicamente e de comunicar matematicamente (Santos & Semana, 2015), por outras palavras, melhoram a sua aprendizagem matemática.

É de fazer notar que tarefas complexas e abertas constituem um contexto de aprendizagem em aulas onde os alunos são incentivados a desenvolver a autorregulação (Tardif, 2007). Este é, por exemplo, o caso da utilização de portefólios em contexto escolar que representa uma forma adequada de desenvolvimento da comunicação e da reflexão. Com efeito, o estabelecimento de diálogos internos transpostos para a forma escrita e o *feedback* escrito, fornecido pelo professor, a cada versão das entradas do portefólio, no qual o aluno se apoia para melhorar numa nova versão, estimulam a reflexão, a reorganização e a clarificação de ideias (Pinto & Santos, 2006). Desta forma, a exploração do portefólio torna possível uma prática de avaliação reguladora que não existe sem a utilização deliberada, sistemática, didática e pedagógica de um sistema de *feedback* que apoie, regule e melhore os processos de aprendizagem, tornando o aluno mais ágil na utilização das suas competências metacognitivas (Klenowski, 2002).

O sentido que aqui é atribuído ao portefólio é o adotado por Santos (2010): “uma coleção de produções feitas pelo aluno, individualmente ou em grupo, na sala de aula ou fora dela, consciente e criteriosamente selecionadas, e justificadas através de reflexões que devem acompanhar cada produção” (p. 8), “de forma a poder proporcionar uma visão tão alargada e pormenorizada quanto possível das diferentes componentes do seu desenvolvimento (e.g., cognitivo, metacognitivo, afetivo, moral)” (Fernandes, Neves, Campos, Conceição, & Aliaz, 1994, pp. 2-3).

Independentemente das diferentes concepções, objetivos específicos e formatos por que se opte, os portefólios em educação têm certas dimensões ou focos em comum. Destaca-se em primeiro lugar, com efeito interativo, a reflexão e a comunicação, pelo que já foi referido. Em segundo, o envolvimento e a motivação, uma vez que, envolvendo o aluno no processo de aprendizagem, os processos sistemáticos de reflexão e de autoavaliação implicam-no fortemente nas tarefas de aprendizagem. É desta forma que se vai construindo o conhecimento e se promove a sua autonomia, que é a forma mais eficaz de motivação. Com efeito retroativo, a visibilidade, através da obtenção de uma imagem, tão nítida quanto possível, das aprendizagens que o aluno desenvolveu ao longo de um dado período de tempo, das suas experiências, dificuldades e progressos, pode ser usada para fornecer evidências e demonstrar a responsabilidade no cumprimento de normas e de medidas de referência. Por estas razões, o portefólio, visto de uma perspetiva de avaliação e de aprendizagem, é considerado uma das formas mais holísticas de avaliação (Fernandes, 2008; Klenowski, 2002; Santos, 2010).

### 3. METODOLOGIA

#### 3.1. *Opções metodológicas*

A opção por uma abordagem interpretativa deveu-se ao facto de se considerar que os objetos e os acontecimentos só por si não têm qualquer significado. Este é-lhes atribuído pelos indivíduos (Yin, 2002), não sendo geralmente diretamente observáveis nem facilmente perceptíveis. Trata-se de aspetos implícitos, subentendidos na ação (Burns, 2000).

O *design* do estudo foi o estudo de caso e foram selecionados três alunos como casos de forma a garantir diversidade entre estes. Os critérios de seleção diferenciadores considerados foram o desempenho na disciplina e a relação com a Matemática (ver Tabela 1) por se considerar que são dois fatores que poderão

influenciar formas diversas de trabalho com o portfólio dado este instrumento exigir autonomia e persistência por parte do aluno, favorecendo uma autorregulação da aprendizagem (Zimmerman, 2000). Os três alunos foram selecionados de entre os alunos de uma turma de Matemática A, do 11.º ano de escolaridade (alunos com 16 anos de idade), que tiveram a investigadora (1ª autora deste artigo) como professora titular no ano letivo a que se refere este estudo e no ano anterior. Os nomes usados para referenciar os alunos são fictícios de forma a garantir questões de ordem ética.

TABELA I  
Critérios diferenciadores dos casos

	<i>Dália</i>	<i>Lara</i>	<i>Francisco</i>
<i>Nível de desempenho na disciplina no ano letivo transato</i>	Bom Classificações maioritariamente acima dos 16 valores.	Fraco Classificações maioritariamente inferiores a 10 valores.	Médio Classificações maioritariamente entre os 10 e 13 valores.
<i>Relação com a disciplina</i>	Gosta da disciplina porque se “decora pouca coisa”.	Não gosta da disciplina e raramente estuda para ela.	Gosta da disciplina e considera que estuda para ela.

A recolha de dados foi feita através de recolha documental e entrevistas. Da recolha documental sobressaem não só todas as versões das entradas do portfólio, mas também a compilação de todos os *e-mails* trocados entre a professora e os alunos, de onde foram retirados os *feedbacks* fornecidos. As duas entrevistas semiestruturadas, realizadas a cada aluno caso, foram acompanhadas de guiões e decorreram ao fim da terceira e sexta (a última) entradas do portfólio. Com a primeira entrevista, procurou-se captar a forma como os alunos encaravam a Matemática, como se viam a si próprios como alunos de Matemática, como estudavam para esta disciplina, como lidavam com as dificuldades e erros, e quais as suas vivências na realização do portfólio. Com a segunda entrevista procurou-se saber os processos e recursos que utilizaram na elaboração do portfólio, a forma como estruturam e organizaram as suas ações e o balanço que faziam sobre o desenvolvimento deste instrumento.

No processo de análise de dados, procedeu-se primeiramente à sua redução, depois à apresentação e interpretação das conclusões (Bardin, 2011). Assim, após a escolha dos participantes, foram selecionados os aspetos mais relevantes

das transcrições das entrevistas, dos conteúdos dos *e-mails* e das várias versões do portefólio. A apresentação foi elaborada a partir de um conjunto de categorias que se foram salientando ao longo da recolha dos dados. Finalmente, para além da descrição dos factos, procedeu-se à sua interpretação à luz dos conceitos teóricos estudados, num vaivém entre observação, reflexão e interpretação. Neste trabalho, cada caso foi analisado separadamente; depois confrontaram-se os três casos em que se procurou salientar os elementos de homogeneidade e de heterogeneidade de forma a ser possível elaborar uma síntese e a formulação de proposições interpretativas.

A análise dos dados seguiu a categorização de Pugalee (2004), que definiu quatro grupos de processos metacognitivos: de *orientação*, *organização*, *execução* e *verificação*. No primeiro grupo (orientação), o aluno faz uma avaliação da familiaridade, da dificuldade e da probabilidade de sucesso perante uma situação problemática, podendo ser observável através de comportamentos metacognitivos como a análise de informação, a leitura/releitura ou a construção de representações iniciais, comportamentos também referidos por Dias (2005). No segundo grupo (organização), dá-se lugar à identificação de metas, ao planeamento e à organização de dados, processos estes também salientados por Pirie (1987). Aos processos de execução, observáveis através de ações locais (como cálculos), monitorização do progresso e mudanças de decisão, estão associados os processos de reflexão (Pirie, 1987) e de automonitorização (Zimmerman, 2000). O grupo dos processos de verificação envolve uma avaliação das decisões e dos resultados que foram obtidos e uma perspetivação do que falta para atingir o objetivo ou o resultado esperado.

Também foi considerada a categorização de Dias (2005) que começa por dividir os processos em dois grandes grupos: os processos de *interpretação* e os de *desenvolvimento*. No primeiro grupo, dá-se relevo a processos como o de traduzir, interiorizar e ancorar. A propósito deste último processo, considera-se o estabelecimento de analogias, salientado por Holding (1991), e o processo de seleção de uma estratégia (Pirie, 1987). No grupo de processos de desenvolvimento, salientam-se os processos de ziguezaguear e de aprofundar; o primeiro observável pelos avanços e recuos dando-se lugar a um refazimento do trabalho; o segundo observável por um evoluir sucessivo com base na exploração do avanço conseguido numa fase anterior.

Dadas as especificidades do instrumento de avaliação em estudo, o processo de justificação (Holding, 1991; Mason et al., 1982; Pirie 1987; Pugalee, 2004) que deve acompanhar toda a realização do portefólio, foi também considerado. Naturalmente, a justificação acarreta consigo processos salientados por Frobisher



(1994) tais como o processo de comunicação (observável por ações tais como explicar, concordar, questionar) e o processo de registo (e.g. escrever, listar, traçar gráficos). Em síntese, os processos metacognitivos usados na análise de dados estão apresentados na Tabela ii:

TABELA II  
Processos metacognitivos a considerar

Processo de comunicação	Orientação			
	Organização			
	Execução	Reflexão		
		Automonitorização		
	Verificação			
	Interpretação	Tradução		
		Interiorização		
		Ancorar	Estabelecimento de analogias	
			Seleção de uma estratégia	
	Desenvolvimento	Ziguezaguear		
Aprofundar				

Processos de registo

### 3.2. Características do portefólio pedido aos alunos

Mais ou menos uma vez por mês, cada aluno escolhe uma tarefa na qual sente dificuldades na compreensão de conteúdos e/ou nos processos envolvidos. Os temas, definidos *a priori*, abrangem todas as unidades temáticas específicas do 11.º ano do programa em vigor e são facultados aos alunos no início do ano letivo. Depois de escolhida a tarefa, o aluno elabora a primeira versão da resolução, fazendo-a acompanhar da explicitação escrita do seu raciocínio e da justificação das suas decisões. Este trabalho é depois enviado por *e-mail* à professora que observa o que o aluno fez e pensou (uma vez que o seu raciocínio está descrito) e fornece *feedback* através de pistas, sugestões/observações, etc. O aluno recebe este *feedback* e, com base nele, elabora e envia a segunda versão. O processo itera-se, até o aluno chegar a uma versão final.

Para além deste desenvolvimento da tarefa em si, o aluno tem de fazer um balanço de cariz metacognitivo do trabalho desenvolvido, que pode ser, por opção

do aluno, construído no fim ou ao longo da elaboração das versões. Ao conjunto da resolução “comentada”, com o registo datado das versões, e desta reflexão/balanco, foi dado o nome de entrada.

Para cada entrada existe uma data até à qual o aluno deve entregar a primeira versão e a professora tem uma semana para dar o *feedback* escrito à primeira produção do aluno. Este volta a ter uma semana para elaborar a segunda versão. Para as versões seguintes não há uma calendarização estipulada *a priori*, sendo esta combinada com cada aluno, geralmente com prazos mais curtos.

Também foram utilizados um guia de interrogação metacognitiva e um documento onde constam os critérios de avaliação e respetivos descritores, para ajudar o aluno nas reflexões e na sua própria avaliação uma vez que, como refere Flavell (1979), não é fácil para o aluno fazê-lo. No fim de cada período, o aluno tem ainda de elaborar uma reflexão final, a incluir no fim do portefólio. Este instrumento de avaliação também é tido em conta na avaliação sumativa final, caso contrário corríamos o risco do portefólio não ser valorizado pelo aluno, dada a cultura de avaliação da escola portuguesa (Santiago, Donaldson, Looney, & Nusche, 2012). No entanto, frisa-se que o que é avaliado é a evolução que o aluno revelou ter.

#### 4. APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

##### 4.1. *Dália*

As entradas da *Dália* foram escolhidas com base na identificação, pela própria aluna, de dificuldades: “primeiro, se eu tivesse dúvidas específicas nalgum exercício, era esse que eu escolhia. Se eu não soubesse ou não fizesse a mínima ideia, aí eu ia ver aquilo que eu encontrava” (2ª entrevista). Essas dificuldades tanto podiam residir na escolha de estratégias adequadas, na compreensão da relação entre variáveis de um mesmo problema, na interpretação de resultados obtidos no contexto da tarefa, como em dificuldades genéricas, caso da realização de demonstrações:

---

Simplemente não vi (e ainda não vejo) o que tenho de fazer para resolver este exercício, razão pela qual o escolhi (...) as dúvidas que tenho são mais na escolha do processo que devo seguir para realizar o exercício e não tanto na matéria em si.

---

*Figura 1. 3ª versão da 5ª entrada*

---

Resolvi escolher uma demonstração com razões trigonométricas, visto que foi, em toda a matéria do primeiro período, os exercícios que mais dificilmente consegui resolver.

---

*Figura 2: 1ª versão da 1ª entrada*

A identificação, por parte da aluna, desta diversidade de dificuldades aquando da escolha da tarefa para as entradas denota que o *processo de orientação* tem lugar logo na primeira abordagem das entradas. Além disso, em cada entrada, a Dália opta por reunir e registar toda a informação que considera pertinente no âmbito do tema da entrada, tanto ao nível dos conteúdos, como ao nível de alguns procedimentos de que dispõe, como é de seguida ilustrado:

---

O exercício em si engloba vários pontos de matéria, de forma interligada: trigonometria, produto escalar e geometria, como tal requer a conjugação de todas e centra-se essencialmente na necessidade de empregar conceitos como:

*Equação reduzida de uma recta* -  $y = mx + b$ . Para conseguir chegar a esta expressão é necessário um ponto pertencente a essa recta e um vector director da mesma (ou qualquer informação que nos dê o declive) (...).

*Noção de produto escalar* - O produto escalar trata-se de uma operação que é realizada entre dois vectores, (...).

*Equação de uma circunferência* - A equação de uma circunferência (conceito de 10º ano) é construída a partir (...).

*Razões trigonométricas* - Para estes exercícios é igualmente necessário ter em consideração as três razões trigonométricas dadas por (...).

---

*Figura 3. 1ª versão da 2ª entrada*

Assim, é possível observar que foram usados *processos de orientação e organização*, uma vez que a aluna, familiarizando-se com o tema, analisa informação, socorre-se de algumas representações iniciais, organiza dados e estabelece algumas metas.

Na fase de execução, a aluna, num *processo de ancorar*, vai buscar conteúdos e procedimentos, explanados na primeira fase, que considera úteis na selecção e execução de uma estratégia. Recorre a este processo frequentemente, sem necessidade de apoio por parte da professora. Quando a estratégia não produz o efeito desejado, volta atrás e experimenta outra, denotando o recurso ao processo de automonitorização pois não necessita do aval ou da ajuda da professora no desenvolvimento da tarefa.

Só quando não tem mais ideias é que envia a primeira versão, deixando, no entanto, registadas as tentativas falhadas. De facto, de uma versão para a outra, a Dália é uma aluna que deixa sempre registado o avanço conseguido numa versão e, num *processo de aprofundar*, é que acrescenta a versão seguinte, tal como, por exemplo, se pode ver, na segunda versão da terceira entrada:

---

Para continuar a resolução desta entrada, resolvi pegar nas dúvidas que tinha colocado e daí continuar a restante resolução do exercício (...)

*Dúvida 3:*

*Dúvida colocada:* A partir daqui não consigo continuar (referia-me à parte da determinação de  $T$ , em função de  $t$ ). Pois apesar de saber que preciso de estabelecer a relação de  $T$  para 1, ou seja, do tempo total de enchimento ( $T$ ) para uma piscina (1), não percebo como relacionar a expressão obtida na alínea anterior (que me dá a fracção cheia numa hora) com o já referido. Não encontro a relação a estabelecer!

*Ajuda da professora:* Se em 1h se enche determinada fracção da piscina; então em quanto tempo ( $T$ ) se enche a piscina toda (1).

*Aquilo que retirei do que me foi dito:*

(...)

Numa hora a fracção de piscina cheia é  $X$

Em  $T$  horas a fracção de piscina cheia é  $Y$

1h \_\_\_\_\_  $X$

$T$ h \_\_\_\_\_  $Y$

Sabendo que:

$X$  é  $\frac{2t+2}{t(t+2)}$  e  $Y$  é 1 (simboliza a totalidade da piscina cheia)

Logo:

$$\begin{array}{l} 1 \quad \frac{2t+2}{t(t+2)} \\ T \quad 1 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{1}{\frac{2t+2}{t(t+2)}} \Leftrightarrow T = \frac{t(t+2)}{2t+2}$$

Voltando à ordem de trabalhos que tinha construído (...).

---

*Figura 4. 2ª versão da 3ª entrada*

Também em qualquer versão, a entrega é acompanhada de um ponto da situação que a aluna elabora num *processo de verificação*, denotando uma avaliação das decisões e dos resultados que tinha obtido e de uma perspetivação do que lhe falta para chegar à resposta:

---

A final até era fácil, faltou-me ter pensado mais um bocadinho!  
Para a próxima não me esqueço de multiplicar pelo que “me dá jeito”!

---

*Figura 5. E-mail enviado junto com a 2ª versão da 1ª entrada*

---

Na última alínea do problema, eu sabia onde deveria chegar e por que passos, mas não sabia como realizar alguns deles, pois não estabeleci a ligação entre a parte geométrica (cálculo da distância) e a parte trigonométrica (fórmulas da trigonometria). Deste modo, aquilo que adquiri com esta entrada, centrou-se mais na forma como é possível interligar os conteúdos do que propriamente com os conteúdos em si, pois a resolução dos exercícios baseou-se em matérias que penso já ter compreendido.

---

*Figura 6. Reflexão final da 2ª entrada*

A aluna apresenta com regularidade *processos de interpretação*, como a tradução, a elaboração e rescrição por palavras próprias de conceitos e procedimentos, debruça-se sobre o significado de conceitos e resultados, recorrendo por vezes a representações ou a exemplos concretos:

---

Para se verificar se uma sucessão é limitada é necessário tentar reduzir ao máximo o termo geral da sucessão, e compreender entre que valores é que variam os termos da sucessão. Por exemplo, na sucessão definida por  $u_n = \frac{n+3}{n+1}$ , se dividirmos um polinómio pelo outro, obtém-se  $u_n = 1 + \frac{2}{n+1}$ . Para verificar se é limitada, temos de (...).

---

*Figura 7. 1ª versão da 6ª entrada*

A parte escrita a que o portefólio obrigou, permitiu apercebermo-nos de que conteúdos e/ou raciocínios ou a relação entre estes não estavam suficientemente compreendidos nem bem estruturados ou relacionados pela aluna pela forma como esta inicialmente os escreveu. Foi no refazer das suas produções que se verificou um *zigzaguar* que lhe permitiu interiorizar todos os aspetos envolvidos em cada escolha. Foi notório o seu progresso e mudanças de decisão, observando-se uma evolução nos *processos de justificação e de registo*, que foram melhorando e tornando-se cada vez mais precisos e explícitos:

---

Sabia que o ponto B tinha como equação reduzida da recta, a equação construída na alínea anterior e estava contido simultaneamente na equação da circunferência,

(...)

$$\cos x = \frac{[OR]}{\text{hipotenusa}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{[OR]}{5} \Leftrightarrow [OR] = 5 \cos x$$


---

*Figura 8. 1ª versão da 2ª entrada*

---

Um ponto não está contido numa equação.

(...)

$$\cos x = \frac{[OR]}{\text{hipotenusa}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{[OR]}{5} \Leftrightarrow [OR] = 5 \cos \alpha \text{ (em vez do símbolo}$$

de segmento, deves usar o símbolo de comprimento).

---

*Figura 9. Feedback dado à 1ª versão da 2ª entrada*

---

Sabia que o ponto B pertencia à recta AB cuja equação (geral ou reduzida) já tinha sido obtida na alínea anterior e estava contido simultaneamente na-circunferência,

(...)

$$\cos x = \frac{\overline{OR}}{\text{hipotenusa}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{OR}}{5} \Leftrightarrow \overline{OR} = 5 \cos x$$


---

*Figura 10. 2ª versão da 2ª entrada*

Tanto pelas justificações, como pelas reflexões mais extensas e pormenorizadas que a aluna apresenta, associadas a mudanças “autónomas de decisão”, podemos observar que a Dália é, já de si, uma aluna com um grau elevado de automonitorização, além da facilidade de comunicação escrita que, mesmo assim, foi alvo de aperfeiçoamento contínuo, de versão para versão.

#### 4.2. Lara

A Lara, apesar de diversificar as suas fontes (manual adotado, manuais não adotados e exames externos) não se demora muito em *processos de orientação* pelo que as suas decisões na escolha das tarefas para as entradas não são definitivas:

---

Ainda não sei bem se é esse [exercício] que quero mas depois decido quando vir o que falhei...

---

*Figura 11. E-mail enviado junto com a 2ª versão da 2ª entrada*

Os *processos de organização* que desenvolve levam-na a uma multiplicidade de escolhas para a mesma entrada. Estas escolhas são feitas a partir da avaliação que faz quanto ao grau de dificuldade que o desenvolvimento do exercício escolhido lhe vai trazendo, e de sentir necessidade de diversificar os exercícios dentro de um mesmo tema:

---

Para esta entrada escolhi vários exercícios para testar a minha capacidade de resolver, de diferentes maneiras, exercícios da mesma matéria.

---

Figura 12. 2ª versão da 3ª entrada

Ainda na fase inicial da escolha da tarefa para uma entrada, faz uma avaliação sobre o que mais lhe causa dificuldades (processo de orientação):

---

Escolhi os exercícios para esta entrada com base nas minhas maiores dificuldades que são, maioritariamente, na trigonometria. Tendo em conta que não percebo bem a mecânica de resolver exercícios deste tipo achei por bem colocá-los aqui.

---

Figura 13. 4ª versão da 2ª entrada

No desenvolvimento da tarefa propriamente dita, a Lara revela uma tendência para a falta de *automonitorização*. Eis um exemplo de uma resolução errada, levada a cabo até ao fim, sem qualquer evidência de *processos de monitorização*, nem de *verificação* (Note-se que o ângulo formado pelos vetores  $\vec{CE}$  e  $\vec{CD}$  não tem uma amplitude de  $18^\circ$ , valor da amplitude do ângulo formado pelos vetores  $\vec{CO}$  e  $\vec{CE}$ ):

---

15.2 Escreva em função de  $l$ :  $\vec{EC} \cdot \vec{CD}$ .

Resolução:

O ângulo entre  $\vec{CD}$  e  $\vec{CE}$  é  $\frac{180 - 144}{2} = 18^\circ$ .

Sei que o co-seno será de 18 e que uma das normas ( $\|\vec{CD}\|$ ) é 1.

Em vez do vector  $\vec{EC}$  vou considerar o vector  $-\vec{CE}$ , de modo que o produto escalar será  $-\vec{CE} \cdot \vec{CD}$ .

$$\begin{aligned} -\vec{CE} \cdot \vec{CD} &= \|\vec{CE}\| \cdot \|\vec{CD}\| \cdot \cos 18^\circ \\ (=) -\vec{CE} \cdot \vec{CD} &= 2r \cdot l \cdot \cos 18 \end{aligned}$$


---

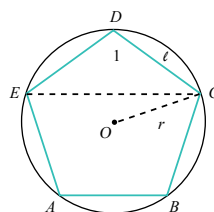


Figura 14. 2ª versão da 1ª entrada

Um aspeto que espelha a falta de hábito de *reflexão* sobre o trabalho que vai desenvolvendo prende-se com o facto de, em mais do que uma versão, a “reflexão sobre o trabalho desenvolvido” aparecer apenas na última versão. Assim, foi importante trabalhar com esta aluna processos relacionados com a automonitorização, através do *feedback* dado a cada versão das entradas, como se ilustra nos seguintes comentários escritos fornecidos à aluna:

---

Para descobrires o ângulo formado pelos vectores  $\overrightarrow{CE}$  e  $\overrightarrow{CD}$ , pensa novamente neles. Olha para a figura.

---

*Figura 15. Feedback dado à 2ª versão da 1ª entrada*

---

Repara que a representação gráfica da função dada por  $y = 3 - x$  é uma recta com declive negativo.

---

*Figura 16. Feedback dado à 1ª versão da 3ª entrada*

A tendência da Lara para não recorrer ao processo de automonitorização, traduzida pela aplicação de estratégias, aparentemente feita de forma pouco refletida, e de as levar a cabo até que produzam um resultado final, naturalmente errado, conduz a aluna ao refazimento total de alíneas ao invés de uma nova versão se apoiar em algo já conseguido na versão anterior (ou seja, não permite que se dê lugar aos processos de zigzaguear e/ou de aprofundar). Tal só é observável, geralmente, em versões finais. Isto também faz com que tivesse atingido até cinco versões de uma mesma entrada e, consequentemente, que tivesse dado início a novas entradas ainda com as anteriores por concluir:

Outra das principais dificuldades que sobressaem do trabalho da Lara, ao longo da elaboração do portefólio, resulta de uma deficiente utilização dos *processos de interpretação*, nomeadamente de tradução de dados fornecidos pelo enunciado das tarefas ou pelo *feedback* dado pela professora. Houve situações em que a estratégia utilizada fora a correta, mas aplicada inadequadamente, proveniente possivelmente de uma insuficiente leitura e análise do enunciado. Se essa estratégia fosse devidamente aplicada, produziria as respostas esperadas. Por exemplo, se no exercício seguinte, a Lara tivesse optado por determinar a equação da reta que contém o segmento de reta a que pertence o ponto de abcissa 3 (em vez de considerar que a função era representada graficamente por um única reta), teria, pelo processo que usou, chegado à solução (embora não seja o processo mais rápido):



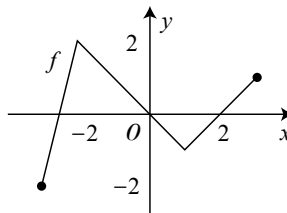
Seja  $f$  a função cujo gráfico está representado na figura ao lado.

Seja  $g$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , defina por

$$g(x) = -x + 3$$

Qual é o valor de  $(g \circ f)(3)$  ?

- (A) -1    (B) 0    (C) 1    (D) 2



*Resolução:*

Para descobrir a função  $f(x)$  temos de retirar do gráfico pelo menos 2 pontos.

$x$	$f(x)$
-2	2
1	-1
2	0

Agora temos de descobrir o declive para podermos saber a equação da função  $f$ ,  $y = mx + b$ .

$$m = \frac{-1-2}{1-(-1)} = \frac{-3}{3} = -1$$

Logo,  $y = -x + b$ .

O  $b$  é 0, pois zero é a ordenada na origem.

Por isso,  $f(x) = -x$

O valor pedido é de  $(g \circ f)(3)$ .

$$f(3) = -3$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(-3) = -3 + 3 = 0$$

Logo seria a opção B mas eu sei que não é porque vi no GAVE que era a D mas não vejo onde está o meu erro.

Figura 17. 1ª versão da 4ª entrada

Assim, processos como os de *traduzir* e *ancorar* nem sempre foram bem-sucedidos porque foram inconvenientemente aplicados.

No seu trabalho, a Lara recorre, por iniciativa própria, a figuras que adapta à sua maneira, para apoiar e exemplificar as suas justificações escritas. Sempre que a Lara detém dificuldades numa parte da tarefa escolhida, opta por desenvolvê-la toda, o que se veio a revelar importante, tanto na completude, como na correção de aspetos, que de outra forma passariam impercetíveis, tanto para a aluna, como para a professora, e que se prendem com processos relacionados com a comunicação e o raciocínio matemáticos e a compreensão de conceitos. Porque o portefólio foi assim conceptualizado, também houve regularmente correção e/ou aperfeiçoamento dos processos de comunicação matemática.

### 4.3. *Francisco*

Na escolha das entradas, seguindo um *processo de orientação*, Francisco afere o grau de dificuldade das tarefas: “Não vou escolher uma coisa muito difícil porque senão dá muito trabalho” (1ª entrevista), muito embora tal não seja para si fácil de fazer, como nos explica: “tive imensas dúvidas, e elas ainda estão um pouco presentes” (2ª entrada, 1ª versão). Francisco só escolhe uma tarefa por entrada, no entanto chega a resolvê-la por processos diferentes.

Francisco sente necessidade de a professora corroborar/validar os seus raciocínios, para obter a certeza de que o significado destes é o mesmo para professor e aluno. Assim, quando o Francisco não se sente confortável com a estratégia escolhida, ou com os cálculos efetuados, pede tendencialmente a validação da professora para continuar, já numa versão seguinte: “Stora, eu esta parte não sei como fazer. Penso que seja (...) Estou certo? Se não for o caso, dê-me uma luzinha para começar ☺” (*E-mail*, 5ª entrada, 1ª versão). Desta forma, o Francisco procura na professora a *automonitorização* que era esperado ser por si desenvolvida.

*Processos de verificação* dos resultados obtidos têm de ser “lembrados” pois, tendencialmente fica pela constatação se o resultado obtido coincide com o que está nas soluções. Quando não coincide, o Francisco aguarda pelo *feedback* da professora para avançar com a resolução numa versão seguinte, ao invés de voltar atrás e autonomamente procurar e corrigir o erro. Por exemplo, na sua 4ª entrada, sabendo que a solução a que tinha chegado não estava correta, não teve a iniciativa de procurar refazer o seu trabalho ou, pelo menos justificar os passos que tinha dado até à obtenção do seu resultado. Se o tivesse feito poderia eventualmente ter detetado, na mesma versão, onde tinha errado, evitando um acréscimo desnecessário de versões. Assim, o aluno revela escassez de monitorização e portanto, também de reflexão.

O recurso ao registo escrito inerente à conceptualização do portefólio, conduziu por várias vezes o Francisco a estabelecer um diálogo interpessoal, e um envolvimento na aprendizagem denotada pelo uso de expressões de emotividade como os *smiles*. Foi também através deste diálogo interno, transposto por palavras, várias vezes assumindo-se que “Eu acho que explico como se fosse para mim” (2ª entrevista), e a rescrição de uma versão para a outra, das ideias matemáticas de forma mais rigorosa, que o aluno, num *processo de interiorização*, incorporou conteúdos e raciocínios:

---

Este método que agora vos vou passar a explicar, é bem mais simples que os outros dois também aqui explicados. Vamos então a ele.

---

*Figura 18. 1ª versão da 1ª entrada*

É através dos *processos de orientação e de ancoragem* que o Francisco estabelece estratégias e identifica conteúdos inerentes a estas. Por exemplo, na

primeira entrada, o Francisco começa por identificar o principal conteúdo que cada um dos três processos de resolução da tarefa envolve:

- 
- 1º Método de 10ºano, através da expressão da distância entre 2 pontos.
  - 2º Método de 11ºano, só com vectores.
  - 3º Métodos de 11ºano, só com declives.
- 

*Figura 19. 1ª versão da 1ª entrada*

Dentro de uma linha de ação já estabelecida, divide explicitamente a estratégia por passos. Sente, por vezes, necessidade de os reordenar de forma a formarem um fio condutor em que uns surjam por necessidade de operacionalização dos outros, sendo pois possível observar o *processo de ziguezaguear*. Por exemplo, nos excertos que se seguem, que se referem ao terceiro método de resolução acima indicado, o Francisco calcula logo no início da resolução as coordenadas do ponto médio quando ainda não eram necessárias (fig. 20). Na versão seguinte, já coloca esse cálculo numa posição mais apropriada da resolução (fig. 21).

---

Este método que agora vos vou passar a explicar, é bem mais simples que os outros dois também aqui explicados. Vamos então a ele.

Sabemos que a equação reduzida da recta é  $y = mx + b$ . Outra maneira de obter a equação da mediatriz é através da equação reduzida da recta. Como?

Vamos por partes:

Temos que:  $\vec{BC} = C - B = (0 + 3; 7 + 1) (=) \vec{BC} = (3; 8)$ .

$$M\left(\frac{(-3+0)}{2}; \frac{(-1+7)}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}; \frac{6}{2}\right)$$

$$\left(\frac{-3}{2}; 3\right) = M$$

Podemos verificar através desta informação que o declive de  $\vec{BC}$  é de  $\frac{8}{3}$ , porém não sabemos o declive da mediatriz.

$$\left(\frac{-3}{2}; 3\right) = M$$

(...)

Acontece que não temos o  $b$ . Como se calcula o  $b$ ? Para calcular o  $b$ , temos de ir buscar um ponto qualquer pertencente à recta e substituir as suas coordenadas na fórmula. Este ponto é nem mais nem menos que o ponto médio, que como se pode verificar na figura acima, pertence à mediatriz.

---

*Figura 20. 1ª versão da 1ª entrada*

O *processo de aprofundar* foi mais nítido nas 2ª e 4ª entradas. Na 2ª entrada prendeu-se com a reflexão no sentido de aprofundar as justificações para que fossem mais correlacionadas com o contexto da situação. A 4ª entrada foi desenvolvida mais no aprofundar de definições relacionadas com a função composta pois, por exemplo, na primeira versão da quarta entrada, em três situações diferentes escreveu  $(f \circ g)(x) \rightarrow f(g(x))$  ao invés de assumir a igualdade:  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ .

---

Este método que agora vos vou passar a explicar, é bem mais simples que os outros dois também aqui explicados. Vamos então a ele.

Sabemos que a equação reduzida da recta é  $y = mx + b$ . Outra maneira de obter a equação da mediatriz é através da equação reduzida da recta. Como?

Vamos por partes:

Temos que:  $\overrightarrow{BC} = C - B = (0 + 3; 7 + 1) (=) \overrightarrow{BC} = (3; 8)$ .

Podemos verificar através desta informação que o declive de  $\overrightarrow{BC}$  é de  $\frac{8}{3}$ , porém não sabemos o declive da mediatriz.

$$M\left(\frac{(-3+0)}{2}; \frac{(-1+7)}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}; \frac{6}{2}\right)$$

$$\left(\frac{-3}{2}; 3\right) = M \quad (...)$$

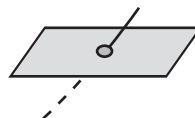

---

Figura 21. 2ª versão da 1ª entrada

O *processo de justificação* surge por vezes com base no seu pensamento intuitivo. Por exemplo, na 1ª versão da 2ª entrada, o Francisco afirma que a interseção de uma certa reta com um dado plano dá um ponto, dando como justificação um desenho feito por si próprio (fig. 22). Apesar desse pensamento ter sido útil para despoletar a resolução, foi transformado em justificação matemática na versão seguinte (fig. 23). No entanto, as justificações escritas por vezes não surgiram aquando do desenvolvimento da tarefa pois, por exemplo, na 4ª entrada, o Francisco pretende que a professora, em primeiro lugar, valide os cálculos: “queria que a stora visse se está aqui algum erro, para dar então começo à explicação dos passos” (4ª entrada, 1ª versão). Já na 5ª entrada, foi ao contrário: o Francisco em primeiro lugar avançou com ideias e só prosseguiu com os cálculos depois da validação pela professora dessas ideias. Assim, há alturas em que o Francisco necessita de apoio para conseguir interiorizar efetivamente os conceitos e processos inerentes ao desenvolvimento das entradas. Tal apoio foi dado através do aperfeiçoamento da parte escrita, associado ao questionamento do que havia produzido. De facto, foi constante o aperfeiçoamento e/ou correção da comunicação matemática, com particular ênfase ao nível da transmissão de ideias, tanto nas produções onde o Francisco não sentia dificuldade, como nas restantes:

A intersecção é um ponto (ao lado fez um esboço de um plano, com uma reta a intersecá-lo, onde assinala o ponto de intersecção). Portanto estamos à procura das coordenadas desse ponto.

(2ª entrada, 1ª versão, 06/02/11)



A intersecção é um ponto porque o vector diretor da recta não é perpendicular com o vector normal do plano.

Portanto estamos à procura das coordenadas desse ponto.

(2ª entrada, 2ª versão, 12/02/11)

$$(x, y, z) = (1 + \lambda; 3; 2\lambda)$$

O 2o Passo, é fazer agora um sistema de equações (*porquê? Qual é o conceito que está por trás ou que justifica o surgimento do sistema?*) com o objectivo de obter expressões para as coordenadas  $(x, y, z)$  do ponto.

$$(x, y, z) = (1 + \lambda; 3; 2\lambda) = \dots$$

Figura 22. Feedback dado à 1ª versão da 2ª entrada

$$(x, y, z) = (1 + \lambda; 3; 2\lambda)$$

2º Passo: Pela igualdade de pontos: (“a 1ª coordenada de um é igual a 1ª coordenada do outro”. “a 2ª...”)

Figura 23. 2ª versão da 2ª entrada

*Processos de registo*, inerentes à conceptualização do portefólio, surgiram sob a forma de representações construídas pelo próprio, e naturalmente, pela anotação escrita das ideias subjacentes ao desenvolvimento da entrada.

## 5. ANÁLISE E COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

As características do portefólio favoreceram o desenvolvimento de diversos processos metacognitivos pelos três alunos participantes, muito embora se possam encontrar diferenças entre eles. O facto de caber aos alunos a seleção das tarefas para as entradas, implicou-os em *processos de orientação*, familiarizando-os mais com o tema, analisando informações, planeando e estabelecendo algumas metas (Pugalee, 2004). A Dália foi a aluna que mais se demorou em processos de orientação pois, dentro do tema de cada entrada, escreveu toda a informação que considerou estar relacionada com esse tema,

tanto ao nível dos conteúdos, como de alguns procedimentos. A Lara, apesar de diversificar as suas fontes, não se prendeu muito em processos de orientação pelo que as suas decisões na escolha das tarefas para as entradas não foram definitivas. Já Francisco escolheu sempre apenas uma tarefa por entrada, evidenciando processos de orientação, mas não tão pormenorizados como os da Dália.

No desenvolvimento de cada tarefa, no caso da Dália, os *processos de organização* (Pugalee, 2004; Pirie, 1987) começaram logo na fase de orientação, onde colocou sempre de forma esquemática ou por itens todos os recursos teóricos de que dispunha sobre o tema da entrada. Houve situações em que a Lara identificou alguns objetivos e, mesmo reconhecendo que não sabia como atingi-los, implementou sempre uma estratégia/resolução que se lembrava. No caso do Francisco, também foi explícita a existência de processos de organização como a identificação explícita das diferentes maneiras de resolver a mesma tarefa, ou, dentro de uma linha de ação já estabelecida, dividiu explicitamente a estratégia por passos.

A Dália, num *processo de ancorar* (Dias, 2005), foi buscar conteúdos e procedimentos explanados na sua abordagem preliminar, que considerou úteis na seleção e execução de uma estratégia (Pirie, 1987). Não dispondo desse recurso, o Francisco e a Lara, selecionaram estratégias a partir da sua intuição, do caderno diário, apontamentos e do manual. Ao refazer, de uma entrada para a outra, parte das produções escritas, foi possível observar um *zigzaguear* em torno de ideias (Dias, 2005) que permitiu aos alunos interiorizar mais aspetos envolvidos em cada escolha. Na Lara foi especialmente notória as suas tentativas, umas vezes conseguidas, outras vezes não, de *processos de interiorização* (Dias, 2005), onde a aluna se apropriou do *feedback* dado pela professora para dar significado coerente às justificações que acompanhavam a resolução da tarefa. A Dália foi a que mais se debruçou sobre o significado de conceitos e resultados num processo de interiorização. Os processos de interiorização foram mais nítidos no Francisco aquando da rescrição, de uma versão para a outra, das ideias de forma mais rigorosa. De qualquer maneira, houve alturas em que o Francisco necessitou efetivamente de apoio para conseguir interiorizar com compreensão os conceitos e processos inerentes ao desenvolvimento das entradas.

Os *processos de interpretação* (Dias, 2005), que são usados para compreender uma situação e para clarificar ideias, foram usados pela Dália de forma bastante desenvolvida e muito pormenorizada. Com a Lara, houve situações em que, apesar da estratégia selecionada e utilizada ser a correta, foi aplicada a dados falsos provenientes de processos de interpretação insuficientes, associados à leitura e análise do enunciado. No caso do Francisco, o recurso aos processos de interpretação foram de alguma maneira “evitados” uma vez que o aluno,

tendencialmente esperava por ajuda exterior, ao invés de voltar atrás e procurar interpretar ou compreender melhor o que lhe era dado e pedido.

Aos processos de interpretação estão associados a *processos de tradução* (Dias, 2005). No trabalho dos três alunos foi possível identificar processos de tradução uma vez que tanto os conteúdos como os procedimentos foram, de uma forma geral, escritos por palavras próprias, inclusivamente em diálogos internalizados (Oliveira, 1993). A Dália foi a que apresentou uma maior regularidade nos processos de tradução. Numa fase inicial, algumas das estratégias levadas a cabo pela Lara foram infrutíferas, devido essencialmente a uma insuficiência nos processos de interpretação e de tradução, associada à tendência que a Lara manifestou em se precipitar por um caminho sem automonitorização até que se produzisse um resultado final, naturalmente incorreto. Assim, foi observável em várias versões o refazimento total de alíneas ao invés de uma nova versão se apoiar em algo já conseguido na versão anterior, por um *processo de aprofundar* (Dias, 2005). Tal só foi observável na Lara, geralmente, em versões finais. No Francisco, este processo, foi mais visível quando o aluno procurou que as suas justificações estivessem mais correlacionadas com o contexto da situação, ou quando se debruçou mais atentamente sobre algumas definições.

A *automonitorização*, que é esperada que o aluno use no desenvolvimento da entrada, é o processo metacognitivo da autorregulação mais importante no desenvolvimento e controlo da atividade (Zimmerman, 2000). A sua ausência ou deficiente uso leva o aluno a dar respostas impulsivas, a gerir a sua atividade ao acaso ou a repetir processos estereotipados (Silva et al., 2004). Foi possível observar que a Lara e o Francisco não recorriam, de uma forma geral, por iniciativa própria, à automonitorização através do autoquestionamento, tendo sido incentivados através de *feedback*, ao longo da realização do portefólio. A diferença inicial entre a Lara e o Francisco, esteve em que a Lara, mesmo assim, avançava quase sempre numa resolução (e executava-a até produzir um resultado); o Francisco, antes de avançar, pedia várias vezes a validação de cálculos ou de uma ideia para só depois elaborar uma nova versão. Já a Dália evidenciou ter tendência para, de forma sistemática, fazer “pontos da situação” sobre a forma como a sua atividade se ia desenvolvendo – aspeto salientado por Schoenfeld (1992) como indicador de um aluno que sabe resolver problemas. Talvez por esta razão, a Dália seja uma aluna que, de uma forma geral, consegue obter bons resultados escolares em Matemática.

O processo de automonitorização está intrinsecamente relacionado com o *processo de reflexão* (Mason et al., 1982; Pirie, 1987; Zimmerman, 2000). Através do *feedback* escrito, os alunos foram incitados a refletir de forma mais consciente e metódica sobre as suas produções pessoais. Também foram valorizados aspetos intuitivos da matemática (Cuoco, 2003; Holding, 1991) uma vez que os alunos foram

encorajados a aplicar a(s) estratégia(s) que tinham em mente, embora sempre de forma justificada. Tratou-se de um apoio à intuição fundamentada, ou seja, com ênfase no *porquê*, mais do que no *o quê*.

Num *processo de verificação* (Pugalee, 2004), a Dália, acompanhou a entrega de cada versão, por uma avaliação das suas decisões e resultados obtidos e de uma perspetivação do que lhe faltava para chegar à resposta. Assim, este processo, enquadrado na terceira fase da autorregulação (Zimmerman, 2000), não assentou só na constatação de discrepâncias entre o idealizado e o atingido, mas também na análise do que foi a sua própria ação. No caso do Francisco e da Lara, a verificação ficava-se tendencialmente, pela constatação se determinado resultado coincidia com o que estava nas soluções. Na Lara, a precipitação para uma resolução sem monitorização e a ausência de processos de verificação foram as principais causas de um acréscimo desnecessário do número de versões em várias entradas. Também Francisco, quando sabia que a solução a que tinha chegado não estava correta, não teve a iniciativa de procurar refazer o seu trabalho ou, pelo menos, justificar os passos que tinha dado até à obtenção do seu resultado. Se o tivesse feito poderia eventualmente ter detetado, ele próprio, e na mesma versão, onde tinha errado.

O *processo de justificação* (Holding, 1991; Mason et al., 1982; Pirie, 1987; Pugalee, 2004) foi observado nos três casos por ser uma regra explícita de realização do portefólio. Trata-se de um processo que, segundo o NCTM (2000), ajuda o aluno a desenvolver a confiança nas suas próprias capacidades de raciocínio. No caso do Francisco, houve entradas que foram escolhidas acima de tudo com o objetivo de que, ao colocar por escrito as justificações da passagem de um passo para o outro, a professora corroborasse/validasse os seus raciocínios. As suas justificações escritas, por vezes, não surgiram aquando do desenvolvimento da tarefa pois o aluno, tendencialmente, aguardava primeiro a validação por parte da professora do que já havia feito. No caso da Dália e da Lara, foi possível observar uma evolução nos processos de justificação que se foram tornando cada vez mais precisos e explícitos. A diferença esteve em que na Lara foi necessário incentivar e apoiar o processo de justificação e na Dália isso não foi necessário.

Sempre que as dificuldades recaíram apenas numa parte da tarefa (por exemplo, numa alínea de um exercício), a Dália e a Lara decidiram desenvolver toda a tarefa. Tal opção foi sempre frutuosa no que respeita à correção e melhoramento dos *processos de comunicação* (Frobisher, 1994), na completude e na correção de ideias, e no seu relacionamento/interligação, que de outra forma passariam impercetíveis, tanto para as alunas, como para a professora.



Autores como Cuoco (2003), Pólya (1977), e Schoenfeld (1992) afirmam que o raciocínio matemático só se aprende através da explicitação objetiva e continuada dos *hábitos da mente*, aquando da resolução de problemas. Também Mason e outros (1982) e Frobisher (1994) afirmam que qualquer processo inerente à resolução de problemas, por mais simples que possa parecer, só é efetivamente aprendido e reutilizável pelo aluno sem ajuda externa, se for alvo de um treino explícito, regular e dirigido para uma tomada de consciência sobre a atividade desenvolvida. Ora, considera-se que todos os processos acima identificados foram trabalhados de forma explícita e continuada, num período suficientemente alargado no tempo.

O *feedback* escrito enquanto mediador da aprendizagem (Vygotsky, 1987), abrindo lugar ao estabelecimento de ZDP's, foi adaptado às necessidades individuais e particularidades de cada um dos alunos, como suporte da sua atividade cognitiva e metacognitiva, e no sentido de os guiar e permitir progressos em direção ao nível da aprendizagem autorregulada e da obtenção de aprendizagens com significado (Black & Wiliam, 2009; Fernandes, 2008; Santos, 2008). As diferentes formas de *feedback* foram dadas no sentido de: a) ajudar os alunos na realização/implementação dos processos, levando-os a refletir melhor sobre o significado de algumas expressões usadas pelos próprios; b) favorecer o surgimento de *mal entendimentos produtivos*, através dos próprios raciocínios do aluno ou dos resultados a que ele chegou, por exemplo, com o confronto e/ou interpretação desses resultados obtidos (apoio ao processo de interiorização ou de raciocínio); c) para os ajudar a encontrar estratégias adequadas (apoio à seleção de uma estratégia) ou de forma a dar continuidade a passos já conquistados; d) validar os resultados, parciais ou finais, obtidos pelo aluno, ou de raciocínios (apoio aos processos de orientação e de organização); e e) aperfeiçoar e corrigir a escrita, não só matemática, mas também da língua portuguesa, o que se revelou importante na reestruturação do pensamento matemático e na compreensão dos problemas e dos respetivos resultados parciais ou finais (apoio aos processos de tradução, de interiorização, de raciocínio). Pode assim afirmar-se que, no geral, o feedback seguiu um processo dialógico (Nicol, 2010), isto é, levou o aluno a estabelecer um diálogo interno, adaptando e integrando o feedback.

O facto de esta experiência ter sido realizada essencialmente na forma escrita com possibilidade de voltar atrás, repensar na produção anterior para entregar uma nova versão, trouxe vantagens ao nível da estruturação ou da reestruturação das ideias e do desenvolvimento de hábitos de reflexão pessoal não só sobre aspetos cognitivos, mas também sobre a própria ação. Todos os três alunos, mesmo Lara e Francisco que revelaram processos desenvolvidos de forma por

vezes superficial e no caso de Francisco que também evidenciou falta de autonomia, tiveram oportunidade de produzir últimas versões de qualidade. De facto, um aluno ao ter de passar as suas ideias para a forma escrita faz com que tenha de as clarificar, de as reorganizar ou estruturar (Pinto & Santos, 2006). Aos hábitos de reflexão estão naturalmente associadas as tomadas de consciência dos processos envolvidos no pensamento matemático, essenciais para que este não seja inopinado ou casual (Mason et al., 1982).

Estas opções pedagógicas implicaram uma crescente automonitorização, ou, pelo menos, criaram-se condições para que esta se desenvolvesse. Questões de cariz motivacional também tiveram lugar no desenvolvimento do portefólio. Foi necessário, nos três casos, recorrer a reforços positivos (reconhecimento, elogios e encorajamento), porque o portefólio implicava uma mudança de hábitos: uma forma de estudar regular; mais frequente. Como defende Silva et al. (2004), uma das grandes dificuldades do ensino é conseguir que os alunos se mantenham numa atividade depois de esta ter sido iniciada pelo que as dificuldades dos alunos também devem ser compreendidas em relação a um défice de ordem afetiva, o da motivação, com particular atenção em alunos com menor aproveitamento escolar, pois são estes que não têm um bom “conceito de si”, que não confiam nas suas capacidades, que desistem depressa e ficam dependentes de uma condução exterior. Além disso, como apoio à aprendizagem, o portefólio constituiu uma forma eficaz de exercer uma diferenciação pedagógica (Santos, 2009).

Dadas as opções metodológicas seguidas, não nos é possível generalizar para outros alunos, não só pelo número reduzido de alunos estudados, mas também pelos critérios de seleção considerados. Por exemplo, este estudo não nos permite dizer quais os resultados obtidos caso o grupo de alunos tivesse o mesmo desempenho escolar a Matemática e o mesmo gosto por esta disciplina. O ter sido desenvolvido ao longo de um ano letivo, não nos permite falar da sustentabilidade das aprendizagens realizadas no contexto da realização do portefólio. Assim, aumentar o número de alunos participantes e diversificar as suas características, bem como desenvolver estudos longitudinais poderão ser linhas de investigação para futuro.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O portefólio tem sido objeto de estudo ao longo das últimas décadas, sendo consensual nos dias de hoje que este instrumento é potenciador de uma aprendizagem autorregulada (Belgrad, 2013). No presente estudo, procurou-se

compreender quais os processos cognitivos associados à aprendizagem matemática desenvolvida através deste instrumento. Os resultados apontados evidenciam que, desde a seleção da tarefa até à sua realização justificada, acompanhados pelo balanço de cariz metacognitivo do trabalho desenvolvido, é possível identificar processos metacognitivos que acompanham estas diversas atividades: processos de orientação, organização, interpretação, desenvolvimento, reflexão, autominotorização, e verificação. Independentemente do tipo de aluno, do seu desempenho habitual em Matemática e do gosto que dizem ter ou não sobre esta disciplina, foi possível encontrar esses processos, embora com diferentes níveis de desenvolvimento. Como seria espectável, a aluna com melhor desempenho a Matemática foi a que revelou mais rapidamente processos metacognitivos mais desenvolvidos, executando de forma mais conseguida as diferentes tarefas do portefólio. Contudo, os outros dois alunos selecionados desenvolveram esses processos e evidenciaram melhorias, umas vezes de forma menos autónoma, outras necessitando de maior número de versões e, consequentemente, prolongando o tempo da sua realização. Assim, fatores associados ao portefólio revelaram-se decisivos para o sucesso dos três alunos: os elementos constituintes do portefólio (nomeadamente a existência de um balanço reflexivo), a autonomia e responsabilidade que se atribui ao aluno (é a ele que cabe escolher as tarefas) (Fletcher & Shaw, 2012), o ser realizado na forma escrita, ser apoiado de forma continuada pela professora através de feedback e ser um trabalho sem limite de tempo (Nicol, 2010), admitindo diversas versões.

A literatura aponta-nos para diversos entendimentos de portefólio. Os resultados deste estudo evidenciam que o portefólio, enquanto instrumento de avaliação reguladora, focado nos processos, que dá a possibilidade de repensar/refazer, que não exige um limite de tempo para a execução da tarefa, e que está integrado na aprendizagem, é útil (porque não se limita a informar da situação pontual do aluno, mas também lhe dá indicações de como este pode conseguir melhorar/progredir); compreensivo e coerente com o trabalho do aluno (porque atende essencialmente à sua evolução como aprendente e não apenas ao produto final); proporciona uma maior visibilidade e reconhecimento do trabalho e esforço do aluno; e promove o seu aperfeiçoamento contínuo.

Em suma, o estudo que aqui se apresenta fornece evidências de que o portefólio assim conceptualizado e aplicado constituiu uma forma eficaz de exercer uma diferenciação pedagógica e proporciona, de forma continuada e sistemática, o desenvolvimento de processos metacognitivos propícios ao desenvolvimento de uma aprendizagem autorregulada. A sua divulgação pode dar pistas para professores de Matemática desenvolverem uma prática avaliativa com características semelhantes.

## REFERÊNCIAS

- Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo*. Lisboa, Portugal: EDIÇÕES 70, Lda (trabalho original em francês, publicado em 1977).
- Belgrad, S. (2013). Portfolios and E-Portfolios: Student reflection, self-assessment, and goal setting in the learning process. In J. McMillan (Ed.), *Sage handbook of research on classroom assessment* (pp. 331-346). California, USA: SAGE Publications, Inc.
- Black, P. & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation, and Accountability*, 21(1), 5-31. doi: 10.1007/s11092-008-9068-5
- Bondoso, T., e Santos, L. (2009). Portefólios... e outras descobertas. *Educação e Matemática*, 101, 3-9.
- Burns, R. (2000). *Introduction to research methods*. London, UK: SAGE Publications.
- Cuoco, A. (2003). Mathematical habits on mind. In H. Schoenfeld (Ed.), *Teaching mathematics through problem solving: grades 6-12* (pp. 27-37). Reston, VA: NCTM.
- De Corte, E., Mason, L., Depaepe, F., & Verschaffel, L. (2011). Self-regulation of mathematical knowledge and skills. In B. J. Zimmerman, & D. H. Schunk (Eds.), *Handbook of self-regulation of learning and performance* (pp. 155-172). New York, USA: Routledge.
- Dewey, J. (1997). *How we think*. New York, USA: Dower Publications, INC.
- Dias, P. (2005). *Avaliação reguladora no Ensino secundário. Processos utilizados pelos alunos em investigações matemáticas* (Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa)
- Fernandes, D. (Org.); Neves, A.; Campos, C.; Conceição, J., e Aliaz, V. (1994). Portofólios: para uma avaliação mais autêntica, mais participada e mais reflexiva. Em D. Fernandes (Coord.), *Pensar avaliação, melhorar aprendizagem*. Lisboa, Portugal: Instituto de Inovação Educacional
- Fernandes, D. (2008). *Avaliação das aprendizagens: desafios às teorias, práticas e políticas*. Lisboa, Portugal: Texto Editores.
- Flavell, J. (1979). Metacognition and cognitive monitoring. A new area of cognitive developmental inquiry. *American Psychologist*, 34(10), 906-911. doi: 10.1037/0003-066X.34.10.906
- Fletcher, A., & Shaw, G. (2012). How does student-directed assessment affect learning? Using assessment as a learning process. *International Journal of Multiple Research Approaches*, 6(3), 245-263.
- Frobisher, L. (1994). Problems, investigations and an investigative approach. In Orton & G. Wain (Eds.), *Issues in Teaching Mathematics* (pp. 150-173). London, UK: Cassel.
- Hannula, M. S. (2006). Motivation in Mathematics: Goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 165-178. doi: 10.1007/s10649-005-9019-8
- Holding, J. (1991). *The investigations book*. Cambridge, UK: University Press.
- Klenowski, V. (2002) *Developing portfolios for learning and assessment: Processes and principles*, London, UK: Routledge Falmer.
- Kosko, K. & Wilkins, J. (2010). Mathematical communication and its relation to the frequency of manipulative use. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 5(2), 79-90.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Harlow, UK: Prentice Hall.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, USA: NCTM.
- Nicol, D. (2010). From monologue to dialogue: improving written feedback processes in mass higher education. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 35(5), 501-517. doi:10.1080/02602931003786559
- Oliveira, M. (1993). *Iygotsky. Aprendizado e desenvolvimento. Um processo sócio-histórico*. São Paulo, Brasil: Scipione.

- Pinto, J. e Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa, Portugal: Universidade Aberta.
- Pirie, S. (1987). *Mathematical investigations in your classroom - a guide for teachers*. London, UK: MacMillan Education Ltd.
- Pólya, G. (1977). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro, Brasil: Interciência.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa, Portugal: Associação de Professores de Matemática.
- Powell, A. e Bairral, M. (2006). *A escrita e o pensamento matemático. Interações e potencialidades*. Campinas, Brasil: Papirus.
- Pugalee, D. (2004). A comparison of verbal and written descriptions of student's problem solving processes. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1), 27-47. doi: 10.1023/B: EDUC.0000017666.11367.c7
- Santiago, P.; Donaldson, G.; Looney, A., & Nusche, D. (2012). *OECD Reviews of evaluation and assessment in education: Portugal*. OECD. Obtenido de <http://www.oecd.org/edu/evaluationpolicy>
- Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. Em L. Menezes; L. Santos; H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu, Portugal: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.
- Santos, L. (2009). Diferenciação pedagógica: Um desafio a enfrentar. *Noésis*, 79, 52-57.
- Santos, L. (Org.). (2010). *Avaliar para Aprender: Relatos de experiências de sala de aula do pré-escolar ao ensino secundário*. Porto, Portugal: Porto Editora & Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.
- Santos, L. & Pinto, J. (2010). The use of feedback in written reports and portfolio: an assessment for learning strategy. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education. Series D: Research in Mathematical Education*, 14(3), 281-297.
- Santos, L. & Semana, S. (2015). Developing mathematics written communication through expository writing supported by assessment strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 88(1), 65-87. doi: 10.1007/s10649-014-9557-z
- Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics*. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York, USA: Macmillan Publishing Co, Inc.
- Silva, A., Duarte, A., Sá, I. e Simão, A. (2004). *Aprendizagem auto-regulada pelo estudante: perspectivas psicológicas e educacionais*. Porto, Lisboa: Porto Editora.
- Tardif, J. (2007). La régulation par l'intermédiaire des situations d'apprentissage contextualisantes: une aventure essentiellement "prescriptive". En L. Allal e L. Lopez (Org.), *Régulation des apprentissages en situation scolaire et en formation* (pp. 25-43). Montréal, Canada: De Boeck.
- Vygotsky, L. (1987). *Thinking and speech*. New York, USA: Plenum.
- Wiliam, D. (2007). Keeping learning on track. In F. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1053-1098). Charlotte, USA: Information Age Publishing.
- Wiliam, D. (2013). Assessment: The bridge between teaching and learning. *Voices from the Middle*, 21(2), 15-20.
- Yin, R. (2002). *Case study research: Design and methods* (3rd ed.). California, USA: Sage Publications, Inc..
- Zimmerman, B. J. (2000). Attaining self-regulation: a social cognitive perspective. In M. Boekaerts, P. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Hanbook of Self-Regulation* (pp. 13-39). New York, USA: Academic Press.

Zumbrunn, S., Tadlock, J., & Roberts, E. D. (2011). *Encouraging self-regulated learning in the classroom: A Review of the literature*. Metropolitan Educational Research Consortium, Virginia, USA: Commonwealth University.

## **Autores**

---

**Célia Dias.** Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal. celiadias76@gmail.com

**Leonor Santos.** Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal. mlsantos@ie.ul.pt