

RUTH RODRÍGUEZ GALLEGOS, SAMANTHA QUIROZ RIVERA

EL PAPEL DE LA TECNOLOGÍA EN EL PROCESO DE MODELACIÓN MATEMÁTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

THE ROLE OF TECHNOLOGY IN THE PROCESS OF
MATHEMATICAL MODELING FOR TEACHING DIFFERENTIAL EQUATIONS

RESUMEN

El presente artículo tiene como intención mostrar el papel de la tecnología escolar en el tránsito por las diversas etapas de la modelación matemática. Desde 2008, en el Tecnológico de Monterrey, se implementó la modelación matemática en un curso de Ecuaciones Diferenciales como principal medio para el aprendizaje de este tema. Se reporta el diseño de una situación específica en el contexto de circuitos eléctricos RC donde se utilizan diversos recursos tecnológicos en el desarrollo de las actividades. A través del estudio de las praxeologías del ciclo de modelación matemática, se describen los tipos de tareas incorporadas gracias a la tecnología utilizada y el papel que dichos tipos de tareas pueden tener para un mejor tránsito entre los dominios de dicho ciclo. Finalmente, se presentan algunas implicaciones pertinentes a las que se llegan y futuras líneas de investigación.

PALABRAS CLAVE:

- *Modelación*
- *Matemáticas*
- *Tecnología*
- *Ecuaciones Diferenciales*
- *Circuitos Eléctricos*

ABSTRACT

The goal of this article is to present the role of the technology during the transit between the different stages of the mathematical modeling cycle. Since 2008 at Tecnológico de Monterrey, it was began the development of a course that involves a mathematical modeling perspective as the principal mean for learning Differential Equations. It is presented the design of a specific situation related with Circuits Electric Context with activities based on the use of diverse technology.

KEY WORDS:

- *Modeling*
- *Mathematics*
- *Technology*
- *Differential Equations*
- *Electrical Circuits*



Based on a praxeological study we describes the types of tasks related to the mathematical modeling cycle when technology is applied, and also how the former ones might propose a better transit between the diverse domains of the modeling cycle. We conclude with the concluding remarks and future lines of research.

RESUMO

Este artigo destina-se a mostrar o papel da tecnologia em trânsito através dos vários estágios de modelagem matemática. A partir de 2008 Monterrey Tech iniciou o desenvolvimento de um curso que incorpora a modelagem matemática como o principal meio para a aprendizagem de Equações Diferenciais. Projeto situação específica é apresentada no contexto de circuitos RC actividades baseadas onde varia adicionados a utilização de tecnologia. Recorrendo ao estudo dos tipos de tarefas praxeologies modelagem ciclo incorporado graças à tecnologia utilizada e do papel que estes tipos de tarefas podem ser para melhor trânsito entre os domínios do ciclo de modelagem matemática são descritos. Finalmente, algumas conclusões que chegarão e pesquisas futuras são apresentadas.

PALAVRAS CHAVE:

- *Modelagem*
- *Matemática*
- *Tecnologia*
- *Equações Diferenciais*
- *Circuitos elétricos*

RÉSUMÉ

L'intention du présent article est de montrer le rôle de la technologie dans le parcours de diverses étapes du cycle de modelation mathématique. Depuis 2008, au sein de Tecnológico de Monterrey, on a commencé à développer le cours qui incorpore la modelation mathématique comme moyen principal pour l'apprentissage des équations différentielles. On presente le dessin de la situación spécifique dans le contexte de circuits electriques RC auxquels on ajoute les activités basées sur l'usage de technologie variée. Faisant recours à l'étude de praxeologies, on décrit les types des tâches incorporées au cycle de modelation grâce à la technologie utilisée et le rôle que lesdits types de tâches peuvent jouer pour un meilleur parcours entre les domaines du cycle de modelation mathématique. Finalement on presente quelques conclusions auxquelles on arrive et les futures lignes de recherche.

MOTS CLÉS:

- *Modelation*
- *Mathématiques*
- *Téchnologie*
- *Équations Différentielles*
- *Circuits Eléctriques*

1. INTRODUCCIÓN

Al día de hoy, la enseñanza usual de un curso de Ecuaciones Diferenciales (ED) se limita a la presentación de una serie de procedimientos analíticos que den respuesta a problemas matemáticos sin contexto. Los resultados de la predominancia de dichos métodos sobre los numéricos y cualitativos muestran desde años atrás un aprendizaje parcial por parte de los alumnos (Artigue, 1989; Blanchard, 1994; Arslan, Chaachoua y Laborde, 2004). Actualmente, y de acuerdo con los estándares dictados por organizaciones nacionales e internacionales, el aprendizaje memorístico de procedimientos analíticos no es suficiente para alcanzar la formación integral de los futuros profesionistas. El nuevo perfil de los alumnos requiere el desarrollo de una serie de competencias donde no solamente se adquieran conocimientos para la resolución de problemas, sino también las habilidades para hacer uso de ellos en contextos cotidianos y específicos de cada profesión.

Precisamente, el desarrollo de la competencia en la resolución de problemas de la vida real en el aprendizaje de las matemáticas es reconocida y destacada como elemental, tanto por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2003), como por el Proyecto Tuning Latinoamérica, (Beneitone, Esquetini, González, Maletá, Siufi y Wagenaar, 2007). Lograr los objetivos mencionados necesita del rediseño de situaciones de aprendizaje a través de estrategias didácticas que busquen tender un puente entre la matemática escolar y la matemática de la vida cotidiana, tal es el caso de la modelación matemática.

El Tecnológico de Monterrey, universidad privada ubicada al norte de México, brinda a la resolución de problemas en contexto un lugar privilegiado en el currículo de la formación de ingenieros desde sus planes de estudio 2008. Específicamente, el curso de ED ha sido modificado en busca de la generación de aprendizajes que provean relaciones entre la matemática escolar y la de la vida cotidiana y laboral futura de los estudiantes, mediante situaciones que permitan la inclusión de la modelación matemática. Las sesiones que se presentan en el curso están fuertemente apoyadas por el uso de tecnología diversa de acuerdo con los propósitos de cada sesión.

En investigaciones precedentes, se ha mostrado (Rodríguez, 2007, 2010), a través de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), un análisis de situaciones donde se utiliza la modelación matemática para la enseñanza y el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales utilizando contextos propios de la Ingeniería. El objetivo de la presente investigación es presentar la reformulación de las

situaciones reportadas a través de la inserción de tecnología diversa y valorar la importancia que representa su uso en el tránsito entre los diferentes elementos del ciclo de modelación matemática. La situación didáctica donde se realizarán cambios en su diseño está basada en el contexto de circuitos eléctricos RC para la enseñanza del modelo ED ordinaria (EDO) lineal para futuros ingenieros.

Se presenta en primer lugar, una revisión del estado del arte concerniente tanto al tema de las ED como a la modelación matemática, específicamente con el fin de dar a conocer su manejo en la universidad donde se realiza el estudio. Posteriormente, se detalla la manera en que se realizó el proceso de rediseño de la situación elegida a través de los elementos propios del marco teórico para, finalmente, dar a conocer los resultados, así como las conclusiones a las que se llega.

2. UN CURSO DE ECUACIONES DIFERENCIALES BASADO EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

En el Tecnológico de Monterrey, el curso de ED es, para una gran parte de los estudiantes, el último curso formal de matemáticas básicas y la culminación de una serie de cursos de Cálculo Integral y Diferencial. A través de su estudio, se pretende que el alumno sea capaz de poder aplicar sus conocimientos a las materias de especialidad en cursos posteriores, hecho que, se ha demostrado, no ocurre necesariamente de manera automática. Este curso es impartido a 22 carreras diferentes y se sitúa en el tercer o cuarto semestre. Un antecedente importante de esta propuesta es el Rediseño Curricular en las Matemáticas del sector de Ingeniería, iniciado en el año 1999 (Salinas y Alanís, 2009; Salinas, Alanís y Pulido, 2011). En dicho rediseño, se cuestiona no solo el cómo enseñar (metodología o técnica didácticas), sino el qué enseñar (contenido) y para qué enseñarlo (prácticas profesionales/ingenieriles).

Con estos antecedentes, desde 2008 se inició con la propuesta de retomar el camino ya avanzado, pero además se propuso para el curso de Ecuaciones Diferenciales (ED) un enfoque basado en la enseñanza a través de la modelación matemática. El énfasis principal es la visión de los objetos matemáticos como herramientas para modelar fenómenos diversos en contextos varios (físicos, químicos, biológicos, sociales, etc.). Se escoge al objeto ED como una herramienta idónea para modelar fenómenos de naturaleza varia y que dotarán al alumno de significado al objeto mismo.

Las medidas para el rediseño del curso de ED se basan en la imperiosa necesidad de reformular su enseñanza a través de la modelación de fenómenos diversos (Lomen y Lovelock, 2000; Blanchard, Devaney & Hall, 2006; Zill, 2009) y en la preponderancia del uso variado de tecnología, entre ella: *software* especializado como Maple, Mathematica; *software* de acceso libre como Wolfram Alpha, calculadoras graficadoras como la TI Nspire CX CAS, simuladores (Recursos Educativos Abiertos, REA; como PhET y DETools), así como, muy recientemente, el uso de aplicaciones de tabletas y/o redes sociales. El rediseño se sustenta en estudios previos que han permitido identificar el uso específico que se le daba a las ED en otras áreas ingenieriles (2009, 2012 y 2013).

Un aspecto más importante incorporado al curso de ED es el cambio de la preponderancia de métodos analíticos sobre los métodos cualitativos y numéricos (Arslan et Laborde, 2003; Artigue, 1989, 1992, 1995, 1996; Blanchard, 1994; Kallaher, 1999; Moreno & Laborde, 2003; Rasmussen & Whitehead, 2003). Si bien es cierto que existen casos de éxito documentados en México en los últimos años y propuestas innovadoras sobre su enseñanza a nivel internacional (Lomen y Lovelock, 2000; Barnes & Fulford, 2002; Blanchard et al., 2006; Boyce y DiPrima, 2010; Brannan y Boyce, 2007), así como algunas investigaciones al respecto (Rasmussen, 2001), es necesario un mayor cambio en lo que se vive en las aulas, en particular en el área de ingeniería.

3. ¿POR QUÉ ELEGIR MODELACIÓN MATEMÁTICA?

Para la formación de ciudadanos críticos y buenos profesionistas en los contextos donde se desenvuelvan, es de gran importancia el desarrollo de competencias para identificar y resolver problemas en su ambiente cultural (Alsina, 2007; Confrey, 2007; Muller & Buskhardt, 2007; Niss, Blum & Galbraith, 2007). Sin embargo, las investigaciones siguen mostrando que existe en las aulas de clase una desvinculación entre las matemáticas y sus aplicaciones, lo cual conlleva a un bajo rendimiento académico de los alumnos (Brousseau, 1999; Niss et al., 2007; Santos, 1997).

La modelación matemática tiene su génesis precisamente en el establecimiento de una relación dicotómica entre las matemáticas y el estudio de sus aplicaciones. La comunidad de Matemática Educativa ha analizado a la modelación desde seis perspectivas acordes a Kaiser y Sriraman (2006): realística, contextual, educacional, sociocrítica, epistemológica y cognitiva. El presente trabajo retomará la perspectiva

educativa, estudiando la modelación matemática como una estrategia didáctica que tiene como objetivo el dar contexto a las matemáticas en la escuela. Son numerosos los estudios que han pretendido proveer de una definición sobre lo que es la modelación matemática. Blum y Niss (1990) la describen como un proceso completo que consiste en transitar desde un problema planteado en una situación real hasta un modelo matemático. En la presente investigación, la modelación matemática es concebida como un proceso cíclico que vincula el dominio real con el matemático, reconociendo entre ellos dos dominios más identificados por Rodríguez (2007, 2010): el físico y el pseudo concreto. Las situaciones propuestas en modelación matemática parten del establecimiento de actividades que planteen un problema en el contexto real, para el posterior armado de un modelo pseudo concreto, que se traduce en uno físico y, posteriormente, en un modelo matemático. A dichas actividades les continúan la resolución del modelo matemático, tanto en términos matemáticos como en físicos y pseudo concretos, donde se promueve la crítica del modelo y, si es necesaria, su modificación. La respuesta a la pregunta establecida en un inicio completa el ciclo completo de la modelación matemática.

Para mostrar gráficamente el proceso de modelación matemática, se presenta en la Figura 1 el esquema presentado por Rodríguez (2007, 2010).

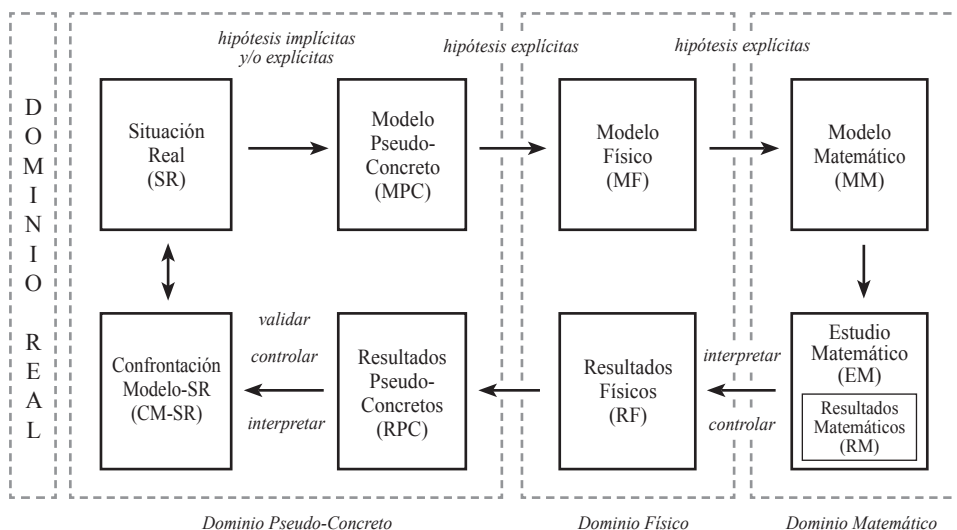


Figura 1. Ciclo de modelación de Rodríguez (2007, 2010)

Investigaciones respecto al diseño de clases basadas en modelación matemática han evidenciado en sus resultados un mayor logro de los alumnos en el

establecimiento de conexiones entre las matemáticas escolares y las situaciones de la vida cotidiana, la reducción de la ansiedad hacia la asignatura de Matemáticas, mejor disposición para aceptar orientaciones, organizar información, pensar en sus acciones, la promoción de habilidades comunicativas e intercambio de ideas, el aumento de la motivación y el desarrollo de habilidades críticas y de resolución de problemas (Alsina, 2007; Aravena & Caamaño, 2009; Kaiser & Maaß, 2007).

Por todo lo anterior, se seleccionó la modelación matemática como estrategia didáctica en el diseño de situaciones propuestas en el curso de ED y específicamente en el diseño de la sesión de clase que se detalla a continuación.

4. MARCO TEÓRICO

Se analiza el proceso de modelación matemática como un conjunto de diversas praxeologías. Esta idea se retoma de la Teoría Antropológica de lo Didáctico propuesta por Yves Chevallard en 1985, cuyo principal postulado establece la idea de que toda actividad humana puede describirse a través de praxeologías. Una praxeología, de acuerdo con Chevallard (1999) alberga cuatro elementos principales: tarea, técnica, tecnología y teoría. Los dos primeros conforman el bloque práctico-técnico, relativo al saber hacer, y los dos segundos, referentes al saber, conforman el bloque tecnológico-teórico¹.

Basados en estudios previos (Rodríguez, 2010; Quiroz y Rodríguez, 2015), se considera que el ciclo de modelación matemática está configurado por una sucesión de praxeologías donde, al menos, exista una por cada una de las etapas de éste, así como algunas presentes en las transiciones entre las etapas. La identificación de las praxeologías que componen el ciclo de modelación conforma una herramienta que sustenta análisis de prácticas que pueden abarcar desde lo establecido en libros de textos escolares, como las acciones didácticas realizadas por el profesor en una clase.

Atendiendo al primer propósito mencionado, retomamos los resultados descritos por Rodríguez (2010) para evidenciar que, en las clases de ecuaciones diferenciales, pocas veces se pueden identificar todas las praxeologías

¹ Es importante mencionar que el término “tecnología”, propuesto por Chevallard, es definido como el discurso racional sobre la técnica y no se refiere a los instrumentos o recursos usados en la clase (calculadoras, sensores, etc.) como en las secciones siguientes se utiliza.

referidas al ciclo completo de modelación matemática. De acuerdo al estudio, muy pocas actividades realizadas por el docente permiten a los alumnos el tránsito entre las etapas de Situación Real y el Modelo Pseudo-Concreto. Además de ello, se otorga un reducido espacio para el establecimiento de una ED y pocos ejercicios que confrontan al estudiante en la transición de Resultados Pseudo-Concretos y la Confrontación Modelo Realidad. En específico, los tipos de tareas que los libros de Matemáticas y Física de bachillerato en Francia plantean a sus alumnos para el aprendizaje de ED en un contexto de circuitos eléctricos son:

- T_{ED} Establecer una ecuación diferencial que modele la carga en el capacitor presente en el circuito
- T_{CE} Representar un diagrama de un circuito eléctrico RC
- T_{SP} Encontrar la solución general de la ED
- T_{SG} Encontrar una solución particular de la ED
- T_C Determinar la corriente eléctrica en el circuito usando la función de voltaje en el capacitor

Al omitir algunas de las etapas del ciclo de modelación, fue posible identificar las dificultades que persistían en los estudiantes al trabajar dicho contenido en el salón de clases, las cuales se enumeran en la Tabla 1.

TABLA I
Dificultades de los alumnos identificadas
durante la realización de la situación experimental

<i>Transición entre etapas del proceso de modelación</i>	<i>Descripción de la dificultad encontrada</i>
SR→MCP→MP	Los alumnos no sienten la necesidad de incluir una resistencia en el circuito eléctrico
MM	Los estudiantes olvidan algunas relaciones o leyes físicas para establecer la ecuación diferencial.
EM→SR→EM	Dificultad para establecer la condición inicial en forma física y/o matemática
RM→RF→RPC	Los estudiantes no consideran la corriente eléctrica en el circuito como función del tiempo

Con dichos resultados, la presente investigación muestra el diseño de una situación experimental en una clase de ED para ingenieros enmarcada en un contexto de circuitos eléctricos RC. Las actividades se centraron en la

incorporación de tipos de tareas omitidas por los libros de texto analizados en estudios anteriores. Los tipos de tarea que configuran las actividades diseñadas se configuran precisamente como las categorías de análisis que guiarán los resultados del estudio.

Es preciso mencionar que el diseño realizado estuvo regulado por la incorporación de materiales tecnológicos. El principal objetivo es la identificación del impacto de dichos materiales tecnológicos en las transiciones entre las etapas del ciclo de modelación, así como en superar las dificultades que se presentaron en el estudio anteriormente descrito.

5. DISEÑO DE LA SITUACIÓN EXPERIMENTAL

La actividad diseñada estuvo basada en la elección de la modelación matemática como estrategia principal. Se pretendía que el diseño de la secuencia didáctica llevara a los alumnos al dar respuesta a una situación problema, logrando el tránsito por las diferentes etapas de modelación matemática y con ello un aprendizaje de la resolución de la ED por el método de ED lineal. Para el diseño de la situación se tuvo como referente el ciclo de modelación presentado por Rodríguez (2007, 2010). El contexto elegido fue el estudio de la carga y descarga de un capacitor en un circuito eléctrico RC. Dicha elección se sustenta por ser una temática muy relacionada con las diversas ingenierías a las que pertenecen los alumnos, puesto que la mayoría de ellos ha cursado la materia de Electricidad y Magnetismo, donde se estudian de manera teórica los circuitos eléctricos.

La incorporación de la tecnología en la actividad tenía como intención el buscar un mejor entendimiento al problema planteado y, a su vez, la superación de las dificultades reportadas en las diferentes etapas del ciclo de modelación matemática, así como en los tránsitos entre ellas. De esta manera, se eligió como tecnología que apoyara la sesión de clase:

- Una calculadora TI Nspire CX CAS
- Un sensor de voltaje TI
- Navegador TI
- Circuito eléctrico
- Capacitor
- Resistencia (foco)
- Cuatro baterías
- Tres conectores

A los tipos de tareas que Rodríguez (2007, 2010) identifica en su estudio, se añaden cuatro más representadas en las actividades que se les pide a los alumnos realizar y que se fundamentan principalmente en la elección de la tecnología descrita:

- T_{ED} Establecer una ecuación diferencial que modela la carga en el capacitor presente en el circuito
- T_{AC} Armar un circuito eléctrico RC (resistencia-capacitor)
- T_{OG} Obtener la gráfica de carga y descarga del capacitor
- T_{AG} Analizar la gráfica de carga y descarga del capacitor
- T_{SG} Encontrar la solución general de la ED
- T_{SP} Encontrar la solución particular de la ED
- T_{RF} Reflexionar sobre la relación entre la solución analítica y la gráfica obtenida
- T_C Determinar la corriente eléctrica en el circuito usando la función de voltaje en el capacitor

Los tipos de tareas que fueron incorporadas a la sesión debido a la tecnología, se describen a continuación:

5.1. T_{AC} Armar un circuito eléctrico

El primer tipo de tareas tenía la intención de apoyar la transición entre el planteamiento de la situación real y la creación de un modelo físico y, posteriormente, el modelo matemático. Para ello, sustituyendo la práctica de dibujar el circuito eléctrico RC, se proporcionó material para que se armara físicamente. Cada equipo de trabajo contaba con un circuito eléctrico RC (Ver Figura 2).

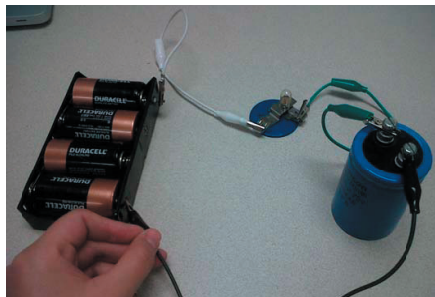


Figura 2. Materiales para la sesión

Además, cada equipo contó con una actividad que guiaba el armado del circuito como se muestra en la Figura 3. Con la presencia de imágenes, se indicaba a los alumnos la manera en que cada parte del circuito debía ser conectada.

Actividad: Circuito eléctrico RC (PRIMERA PARTE)

Equipo: _____

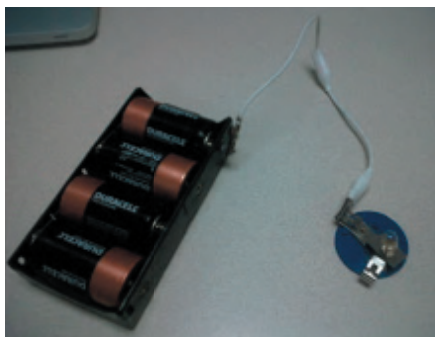
Integrantes: _____

I.- Construcción de un circuito eléctrico RC

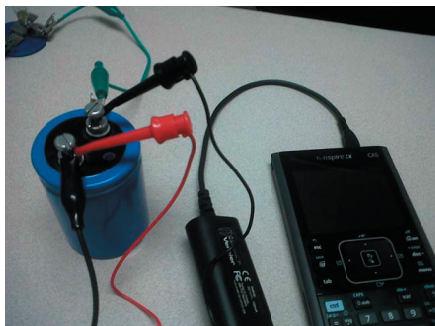
1.- Verifica que tu material esté completo:

- | | |
|-------------------------|---------------------------------|
| a) Generador (Baterías) | d) Tres cables conectores |
| b) Resistencia (foco) | e) Calculadora TI NSPIRE CX CAS |
| c) Capacitor | f) Sensor de voltaje |

2.- Une el generador con la resistencia con ayuda de un conector

*Figura 3. Actividad para el armado del circuito eléctrico RC***5.2. T_{OG} Obtener la gráfica de carga y descarga del capacitor**

El segundo tipo de tareas consistía en registrar mediante el sensor de voltaje la gráfica de carga y la gráfica de descarga del capacitor. Para ello, se proveía a los alumnos de una calculadora TI Nspire CX CAS y un sensor de voltaje TI (Ver Figura 4).

*Figura 4. Calculadora y sensor de voltaje conectado al capacitor*

Además de ello, se proporcionaba una guía o manual, en la que se indicaba la manera en que la calculadora y el sensor funcionaban, así como la forma de capturar las gráficas (Ver Figura 5).

- 6.- En la TI se abrirá automáticamente la aplicación que reconoce el Sensor de Voltaje.
Da click en la pestaña que tiene una gráfica dibujada.

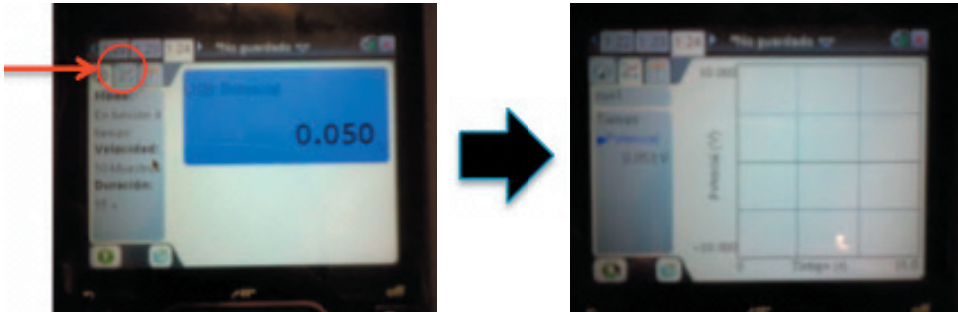


Figura 5. Actividad de guía en el uso del sensor de voltaje

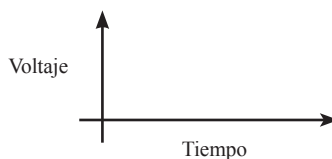
Esta actividad estaba destinada al apoyo entre la Situación Real y la creación del Modelo Físico, puesto que se propiciaba la creación de una representación física del fenómeno proporcionado.

5.3. T_{AG} Analizar la gráfica de carga y descarga del capacitor

El tercer tipo de tareas promovía el análisis de las gráficas obtenidas a través de los sensores de voltaje.

- Dibujar la gráfica de carga y descarga que el sensor registró
- Describir la forma de las gráficas
- Indicar sus asíntotas
- Establecer el porqué de las asíntotas en los valores mostrados (Ver Figura 6)

- 9.- Observa la gráfica de la calculadora TI, analízala y dibújala:



- 10.- ¿Qué puedes decir de la forma de la gráfica? ¿Cuál es su asíntota?
¿Porqué crees que es así?

Figura 6. Análisis de gráficas de carga y descarga del capacitor

Las preguntas estaban encaminadas a la relación entre el Modelo Físico y el Modelo Matemático.

5.4. T_{RF} Reflexionar entre la solución analítica y la gráfica obtenida

Por último, el cuarto tipo de tareas buscaba una relación entre el Resultado Matemático, el Resultado Físico y la Respuesta a la Situación Real. Se vinculaba la solución analítica y la gráfica, para provocar una reflexión respecto a ambos resultados. Se pedía a los alumnos el registro de las diferencias encontradas en las respuestas.

6. METODOLOGÍA

El estudio, de corte cualitativo, tuvo lugar en el Tecnológico de Monterrey, universidad privada al norte de México. La población elegida fueron alumnos de tercer y cuarto semestre inscritos en 25 ingenierías diferentes que estuvieran cursando la materia de Ecuaciones Diferenciales. La muestra se seleccionó aleatoriamente y consistió en nueve alumnos que conformaban tres equipos de trabajo. El estudio se llevó a cabo en el semestre Enero-Mayo de 2013. La duración de la sesión fue de 90 minutos y, previamente, los alumnos analizaron el método para resolver una ED lineal para la resolución de ecuaciones diferenciales con estas características.

Para la recolección de datos se llevó a cabo mediante dos principales técnicas: la observación participante y el análisis de documentos. Para la primera se completó una guía de observación abierta donde se buscaba describir lo acontecido en las actividades planeadas. Para su llenado, se utilizó una videograbación de la sesión. Los documentos analizados correspondieron a los completados en clase: ejercicio donde se dibuja y analiza la gráfica y donde se realiza analíticamente la solución.

Siguiendo lo estipulado por el enfoque del estudio, fue a través de la triangulación de los datos recolectados, como fue posible perfilar las categorías que fueron emergiendo en el transcurso de su propia recolección (Hernández, Baptista y Fernández, 2010). Las categorías estuvieron ligadas al marco teórico utilizado, específicamente referidas a cada uno de los dominios de modelación matemática del ciclo estudiado. De esta manera, se enfatizaron los aspectos principales de las tareas diseñadas y aplicadas que favorecieron el tránsito entre cada elemento de la modelación matemática.

Así, en la siguiente sección se presentan cada una de las tareas incorporadas donde se utiliza la tecnología, así como la información recolectada por los instrumentos referidos que permiten evidenciar nuevos aspectos del ciclo y, con ello, aportar nuevas consideraciones hacia su estudio.

7. RESULTADOS

Los resultados encontrados se muestran a continuación mediante el análisis de lo ocurrido en las sesiones de clase para cada una de los tipos de tareas descritas anteriormente en la sección de metodología.

7.1. T_{AC} Armar un circuito eléctrico

La interacción con los materiales que conformaban el circuito eléctrico RC fue intuitiva para los alumnos. La guía proporcionada permitió que los estudiantes realizaran las conexiones necesarias y logaran identificar cada una de las partes del circuito eléctrico. En dos de los tres equipos observados, se registró que los alumnos siguieron los pasos dados en la guía para armado, y entre los tres miembros del equipo realizaron todas las conexiones necesarias. Un equipo no recurrió a la guía de pasos y armó el circuito eléctrico RC de manera efectiva.

La búsqueda de ayuda fue recurrente en uno de los tres equipos. Se solicitó apoyo al docente puesto que tuvieron dificultades para el encendido del foco (resistencia) durante el momento de carga y descarga del capacitor. Los otros dos equipos lograron llevar esto a cabo después de algunos intentos.

A continuación se presenta la transcripción de la videograbación de una discusión activa entre los miembros de los equipos, en la que se explica la manera en que sucede el fenómeno eléctrico:

Diálogo Equipo 1.

El Estudiante 1 carga y descarga el capacitor cerrando el circuito eléctrico, tomando en cuenta y después ignorando, el juego de baterías.

Estudiante 1: Es que lo cargas porque va almacenando la energía y luego se abre y el circuito pues ya no corre.

Estudiante 1 dibuja en el pizarrón un circuito eléctrico.

Estudiante 1: Está así y aquí hay un voltaje (apunta al capacitor) y cuando llega arriba es como si ya no hubiera nada, entonces ya no fluye. Cuando lo conectas directo (ignorando las baterías) se cierra el circuito y baja a cero (el voltaje).

Diálogo Equipo 2.

Estudiante 1 lee el manual. El Equipo localiza los materiales.

Estudiante 2: ¿Cuál es la resistencia? Ah, pues el foco.

Estudiante 1 y Estudiante 2 conectan el circuito. El foco de la resistencia prende.

Estudiante 1: Ya se cargó.

Estudiante 2: ¿Por qué?

Estudiante 2: Se carga, imagina, lo que pasa es que fluye energía aquí hasta que se carga el capacitor.

Estudiante 2: Ya no prende el foco

Estudiante 1: Lo que pasa es que se cargó el capacitor, mira yo creo que si está cargado, entonces esto debería prender (Cierra el circuito ignorando las baterías. El foco prende de nuevo). Sí, actúa como batería (el capacitor), ¡venga! Es que el capacitor se carga y deja de fluir la corriente. El capacitor puede funcionar como una batería porque tú la cargas de energía y deja de fluir la corriente.

Entre los principales elementos del proceso de modelación matemática que fueron promovidos por la presente tarea están:

- Situación Real → Modelo Físico: El trabajo entre los equipos muestra discusiones promovidas desde el inicio de la clase donde los alumnos relacionan constantemente términos físicos para el entendimiento del problema. Ello permite que la creación del modelo físico tenga un sentido para los alumnos que pretenden dar respuesta a la situación real. Es posible apreciar a su vez una relación recíproca donde los mismos conocimientos físicos permiten una verdadera comprensión del problema planteado (Ver Figura 7).



Figura 7. Equipo de trabajo discutiendo respecto al circuito eléctrico

7.2. T_{OG} Obtener la gráfica de carga y descarga del capacitor

La guía proporcionada para el armado del circuito eléctrico, también indicaba a los alumnos la manera en que se debían realizar las conexiones para utilizar el sensor de voltaje. Cada equipo buscaba la captura de la gráfica que modelaba la carga y descarga del capacitor. Los registros de video muestran que el uso de la computadora, a pesar de ser la primera vez que era utilizada como medio para la generación de datos experimentales, se realizó muy ágilmente. Los alumnos manejaban las funciones apoyándose entre los miembros de su equipo y se lograron recolectar muchos tipos de gráficas.

Los primeros intentos dejaron ver algunas gráficas donde los datos no fueron recolectados correctamente. Incluso, se reportaron confusiones entre las conexiones lo que alteró la polaridad y, con ello, se generaron gráficas decrecientes a números negativos en la carga del capacitor (Ver Figura 8).



Figura 8. Gráficas registradas por el sensor en los primeros intentos

Fueron pocos los minutos necesarios para que los alumnos generaran gráficas de una manera correcta y ágil. Incluso, en una misma toma de datos lograban cargar y descargar el capacitor en reiteradas ocasiones (Ver Figura 9).

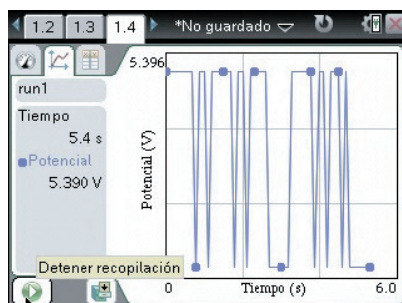


Figura 9. Gráficas registradas por el sensor

Era posible contemplar un diálogo constante entre los miembros de los equipos dando explicaciones de cómo se debía realizar la toma de datos y del fenómeno físico:

Diálogo Equipo 1.

Estudiante 1: ¿Ya registró?

Estudiante 2: Sí, ¿Viste?, ¿viste?, esta cosa grabó voltaje (refiriéndose a la calculadora).

Estudiante 1: ¿Ahorita está en cero?

Estudiante 2: Ahorita está en menos 6.023; no, estamos midiendo al revés.

El Estudiante 2 cambia la polaridad de los cables del sensor

Estudiante 2: Ya está. Imagina, mira, hagámoslo otra vez para que veas. Allí está cargado, ahorita lo conectas allí para que veas cómo se descarga.

El Estudiante 1 conecta el circuito sin las baterías.

Estudiante 2: ¿Viste? Ya se descargó, llegó a 0.

La tarea analizada permitió dar cuenta de lo que transcurrió en términos de los distintos elementos del ciclo de modelación matemática, específicamente entre la transición siguiente:

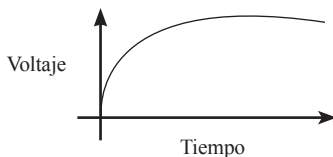
- Situación Real \rightarrow Modelo Físico: El uso de la calculadora para la generación de la gráfica apoyó el esclarecimiento del fenómeno físico entre los equipos de trabajo. Las gráficas fueron explicadas por los alumnos retomando, tanto términos físicos, como algunos aspectos particulares del problema que resuelven. Los errores en el uso de los dispositivos, como fue el caso de la polaridad opuesta, fue explicada por los propios alumnos, quienes demostraron tener claridad en sus ideas, de modo que pudieron determinar cómo corregir las confusiones con ciertas conexiones. El uso de términos físicos que inició en la actividad anterior, continuó. Los alumnos compartieron los conocimientos que poseen respecto a circuitos eléctricos y a las funciones que cumplen cada parte de ellos, logrando, así, la creación de un modelo físico, mismo que vieron representado en la gráfica al mismo tiempo.

7.3. T_{AG} Analizar la gráfica de carga y descarga del capacitor

Durante la realización de esta actividad, se estableció más claramente la relación que existe entre el fenómeno físico, a través de un Modelo Físico y el Modelo Matemático, que comienza a ser vislumbrado con la creación de la gráfica de

carga y descarga del capacitor. Los alumnos dialogan respecto a lo que representa la asíntota de la gráfica dentro del experimento y lo registran en su actividad (Ver Figura 10).

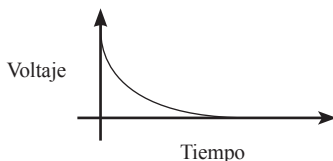
9.- Observa la gráfica de la calculadora TI, analízala y dibújala:



10.- ¿Qué puedes decir de la forma de la gráfica? ¿Cuál es su asíntota?
¿Por qué crees que es así?

Se descargó el capacitor. Su asíntota es cercana a 0, porque se descarga.

13.- Realiza una gráfica de manera análoga al paso 4 anterior, dibújla en el sistema coordenado de abajo:



14.- ¿Qué puedes decir de la forma de la gráfica? ¿Cuál es su asíntota?
¿Por qué crees que es así?

significa que el capacitor se cargó. llega a su carga máxima y se abre.
su asíntota es en 6, porque es el voltaje de las 4 baterías.

Figura 10. Análisis de las gráficas por parte de los alumnos

Los documentos muestran registros de las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas “¿Qué puedes decir de la forma de la gráfica?, ¿Cuál es su asíntota?, ¿Por qué crees que es así?” Las respuestas más comunes se muestran a continuación:

Para carga del capacitor:

- Significa que el capacitor se cargó. Llega a su carga máxima y se abre. Su asíntota es en 6 porque es el voltaje de las 4 baterías.

Para descarga del capacitor:

- Se descargó el capacitor. Su asíntota es cercana a cero, porque se descarga.

En los diálogos registrados en los videos, se registran las explicaciones que dan los estudiantes hasta concluir lo que posteriormente expresarían en la actividad anterior.

Estudiante 1: Escribele

Estudiante 2: ¿Qué?

Estudiante 1: Cuando el capacitor se carga hasta el punto que su voltaje iguala al de la fuente, deja de fluir la corriente.

Estudiante 2: ¿O sea, en un momento dado, esto [capacitor] está cargado a seis volts?

Estudiante 1: Seis volts. Haz de cuenta, en ese momento cuando tiene seis volts, se detiene la corriente.

Estudiante 2: Pero, esto [capacitor] se va a ir bajando, va a ir decreciendo cuando lo desconectas, ¿no? En algún momento, este capacitor se va a descargar totalmente

Estudiante 1: Se va a descargar, sí.

La inserción de esta tarea en el proceso de modelación matemática pudo observarse de la siguiente manera:

- Resultados Matemáticos → Resultados Físicos → Resultados Pseudo-concretos: Fue posible apreciar que los alumnos lograron una transición entre los Resultados Matemáticos, representados por la gráfica obtenida, y los Resultados Físicos y Pseudo-concretos. Las explicaciones respecto a los resultados de la gráfica están tildados por las reacciones físicas que ellos mismos pudieron apreciar en el armado del circuito eléctrico. Además, la ecuación diferencial, sus partes y su solución tienen un sentido tanto físico como matemático para los alumnos, lo que les permite anticipar la resolución del problema planteado en un inicio. Es importante resaltar que, hasta ahora, los alumnos no han resuelto analíticamente la Ecuación Diferencial y, sin embargo, tienen idea del comportamiento que seguirá la respuesta obtenida debido a las respuestas gráficas registradas por el sensor.

7.4. T_{RF} Reflexionar entre la solución analítica y la gráfica obtenida

A fin de provocar una reflexión más amplia, la siguiente actividad que se incorporó al plan de clase, gracias al uso de la tecnología en la sesión, fue la reflexión respecto a las diferencias o semejanzas que se encontraban entre la solución analítica, la gráfica y el circuito eléctrico armado.

A los alumnos se les preguntaba cuál era la relación entre estas tres etapas ubicadas en los tres dominios diferentes. Las respuestas obtenidas se dialogaron, primero, al interior de cada uno de los equipos para posteriormente plasmarlas en papel.

Las respuestas de los alumnos dieron cuenta de que había una relación entre lo que ocurría en el circuito eléctrico y que se había mostrado en la gráfica obtenida por el sensor y la respuesta analítica. Los alumnos describieron que, en la resolución analítica de la Ecuación Diferencial, pudieron encontrar ellos mismos errores en cálculos, puesto que conocían de qué manera se iba a comportar la respuesta y hacia qué valor debía tender, es decir, sabían la solución.

En el proceso de búsqueda de la solución analítica, se registraron expresiones entre los miembros del equipo donde se autoevaluaban respecto a lo que iban obteniendo, entre ellos:

Diálogo del Equipo 1.

Estudiante 1: Se eliminan las exponenciales y ya. No, ¿por qué?
Estudiante 2: Te falta la C [constante] después de la integral y multiplicarla para que quede la exponencial.

En este diálogo es posible apreciar que la eliminación de las exponenciales, aunque matemáticamente suponían estaba bien, no concordaba con lo que habían analizado físicamente, por lo que encuentran el error rápidamente.

Diálogo del Equipo 2.

Estudiante 1: ¿Qué pasa al infinito?, ¿cómo se hacía eso de límites?
Estudiante 2: Pero el infinito...
Estudiante 3: Este número cada vez se va a hacer más grande [exponencial]
Estudiante 1: Va a dar a 1.
Estudiante 2: No, va a dar a cero.
Estudiante 3: Según yo se va a descargar...
Estudiante 2: Sí, porque este es menos [el exponente del exponencial], ya decía yo, se te hace el número muy pequeño, entonces se te va a hacer cero...
Estudiante 1: Empieza así [estable] y cuando llega a 5 se estabiliza.

A través de lo registrado por los diversos instrumentos, se encuentran algunas acentuaciones particulares en ciertos elementos del proceso de modelación:

- Resultados Matemáticos → Resultados Físicos → Resultados Pseudo Concretos: El diálogo de nuevo deja ver cómo las respuestas matemáticas

son validadas de acuerdo a los resultados físicos encontrados. Además, es posible apreciar que los alumnos utilizan términos físicos en las explicaciones de orden matemático. Los anteriores ejemplos dan cuenta de cómo la tecnología empleada apoyó la relación que los alumnos establecen entre las respuestas matemáticas (tanto analíticas como gráficas), las respuestas físicas y, a su vez, en los términos pseudo concretos con los que se planteó el problema.

8. CONCLUSIONES

A través de los resultados obtenidos y descritos en la sección anterior, la presente investigación llegó a las siguientes conclusiones. La modelación matemática utilizada como estrategia didáctica en la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales permitió el acercamiento de los alumnos a problemas en contexto donde es posible la utilización de las matemáticas para dar respuesta a fenómenos propios de la ingeniería.

Las clases basadas en el uso de dicha estrategia demandan un diseño específico donde se cuiden las diversas etapas de la modelación matemática reflejadas en una secuencia de actividades que promuevan, tanto su desarrollo, como el tránsito entre ellas. En el desarrollo de la investigación se dio cuenta de la propuesta de una situación basada en el contexto de Circuitos Eléctricos.

El contexto eléctrico para estudiantes de ingeniería provee la oportunidad de comprender la manera de utilizar el método de Ecuaciones Diferenciales Lineales y el funcionamiento de un Circuito eléctrico RC. Las leyes que gobiernan la carga y descarga del capacitor, si bien en su mayoría han sido estudiadas por los ingenieros en formación, tienden a tener algunas lagunas que son compensadas cuando se trabaja colaborativamente en el aula. Los alumnos más aventajados explican a sus compañeros sus conocimientos y entre todos pueden llegar a manipular el experimento propuesto.

Una aportación importante de la investigación consiste en la incorporación del tipo de tareas específicas donde se utilizan diversas herramientas tecnológicas que permitieron superar las dificultades que habían sido reportadas previamente por Rodríguez (2007, 2010) en la implementación de la secuencia didáctica. De esta manera, el armado de un circuito eléctrico de manera física por parte de los alumnos, en el interior de cada equipo de trabajo, apoya el tránsito entre diversas etapas del proceso de modelación matemática que habían sido consideradas como dificultad en un estudio anterior.

El armado del circuito eléctrico RC vinculó la Situación Real con el establecimiento de un Modelo Pseudo-concreto y Físico. Se permitió el acercamiento de los alumnos a las diversas partes del circuito eléctrico y sus conexiones, lo que llevó a la comprensión del fenómeno de carga y descarga del capacitor. El trabajo realizado de manera colaborativa promovió explicaciones entre pares a través de representaciones pictográficas de un circuito eléctrico en los diversos pizarrones del salón de clase, así como con la manipulación de los mismos elementos proporcionados. Lo anterior deriva en una comprensión del fenómeno al tiempo que se realizaba la tarea propuesta T_{AC} (Armar un circuito eléctrico) de manera efectiva.

El segundo tipo de recurso tecnológico utilizado en el aula, la calculadora graficadora y un sensor de voltaje, fue indispensable para la visualización por parte de los estudiantes de las gráficas de carga y descarga de los capacitores de la experimentación. Dicha visualización permitió una reflexión que vinculó el Modelo Físico con el planteamiento del Modelo Matemático, segunda dificultad presentada en una investigación anterior. Con las leyes claras por el armado del circuito eléctrico, fue posible el tránsito hacia la creación de un Modelo Matemático del que, incluso, podían vislumbrar la respuesta (aun sin tener el resultado analítico), puesto que la calculadora indicaba punto a punto lo que ocurría con la carga del capacitor de manera gráfica.

Esta relación también apoyó el tránsito entre la Respuesta Matemática y la Respuesta Física, debido a que con el planteamiento de la ED, su resolución mediante el método de resolución de una ED lineal llevó inmediatamente a una reflexión conjunta donde los alumnos pudieron detectar errores en el procedimiento analítico debido a que conocían la manera en que se comportaría la respuesta gráficamente. La vinculación entre lo indicado analíticamente y los datos que la tecnología proporcionaba posibilitaron una reflexión en el interior de los equipos para una mejor comprensión del procedimiento seguido.

Con lo anterior, el estudio concluye que la tecnología, debidamente elegida y puesta en marcha en actividades clave del proceso de modelación (Ver Figura 11), puede ser un elemento importante e, incluso, indispensable para la generación de relaciones entre los diversos dominios del ciclo de modelación matemática por parte de los alumnos. La tecnología proporciona un apoyo para la vivencia de experiencias de trabajo en contextos de áreas ingenieriles diversos donde se aplican ecuaciones diferenciales en el mismo salón de clase.

Además, la utilización de tecnología resultó en un motivante para los alumnos quienes, a pesar de no haber tenido anteriormente contacto con los dispositivos utilizados, los manipularon de manera intuitiva y rápidamente fueron usuarios de todas sus posibilidades.

Sin embargo, es importante resaltar el papel del investigador en el diseño y selección de actividades didácticas más adecuadas para cada etapa del proceso, así como de tutoriales que guiaran a los alumnos en la utilización de los dispositivos seleccionados.

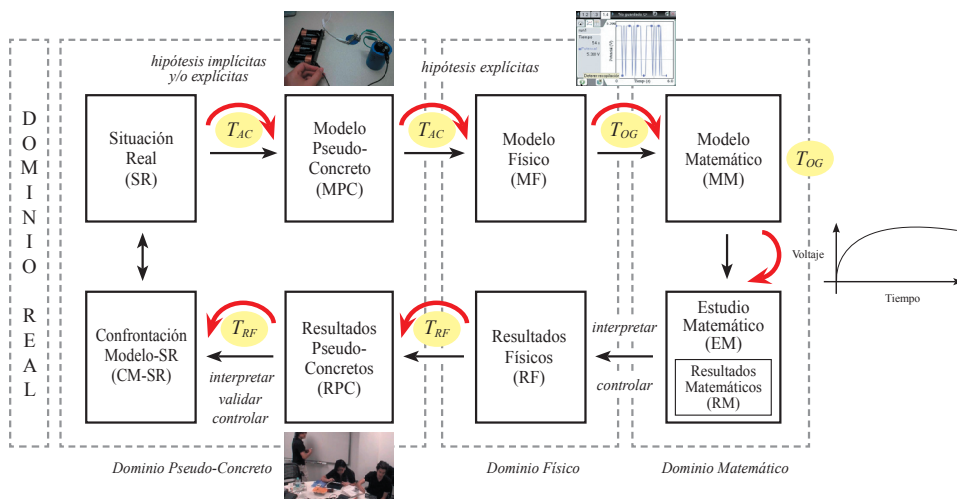


Figura 11. Momentos del ciclo de modelación favorecido por la incorporación de tecnología en clase.

Fue sumamente valiosa la búsqueda de características que permitieran el diseño de situaciones de clase donde se promovieran todos los elementos de la modelación matemática en el aula. Asimismo, es importante guiar el trabajo futuro hacia la profundización del papel de la tecnología en otros contextos propios de una Ecuación Diferencial. Actualmente, se trabaja en la búsqueda, diseño e implementación de tecnología para el apoyo del proceso de modelación matemática en contextos mecánicos, eléctricos, hidráulicos y de naturaleza social.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alsina, C. (2007). Less chalk, less words, less symbols... more objects, more context, more actions. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study* (Vol. 10, pp. 35–44). doi:10.1007/97803872982212

- Aravena, M. D. & Caamaño, C. E. (2009). Mathematical models in the secondary Chilean education. In M. Blomhøj & S. Carreira (Eds.), *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education: Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (Vol. TSG 21, pp. 159–176). Monterrey, México: ITESM.
- Artigue, M. (1989). *Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles du premier cycle universitaire*. Cahier du séminaire de Didactique des Maths et de l'Informatique de Grenoble (pp. 183-209). Grenoble, France: Édition IMAG.
- Artigue, M. (1992). Functions from an Algebraic and Graphic Point of View: Cognitive Difficulties and Teaching Practices. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (MAA notes 25). Washington, DC: MAA.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). Ciudad de México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Artigue M. (1996). *Teaching and learning Elementary Analysis*. In C. Alsina, J. M. Álvarez, M. Niss, A. Pérez, L. Rico & A. Sfard (Eds.) *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education* (Selected Lectures, pp. 15-30). Sevilla, España: S. A. E. M. Thales.
- Arslan, S., Chaachoua, H., & Laborde, C. (2004). Reflections on the teaching of differential equations. What effects of the teaching of algebraic dominance? In Niss, M. A. (Ed.), *Proceedings of the 10th International Conference in Mathematics Education* (Vol. 10, pp. 54-69). Copenhagen, Denmark: University Dinamarca.
- Arslan S. & Laborde C. (2003). Un outil favorisant le jeu de cadres: Cabri. Une étude de cas dans l'apprentissage des Equations Différentielles. Lagrange, J. B. & al. (Eds.), *Actes du Colloque Intégration des Technologies dans l'Enseignement des Mathématiques* (Vol. 1, pp. 1-10). Paris, France: Riems.
- Barnes, M. & Fulford, G. (2002). *Mathematical Models with Case Studies. A differential Equation Approach Using Maple*. Nueva York, USA: Taylor & Francis Inc.
- Beneitone, P., Esquetini, C., González, J., Maletá, M., Siufi, G. y Wagenaar, R. (2007). *Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina. Informe Final Proyecto Tuning América Latina 2004-2007*. Madrid, España: Universidad de Deusto.
- Blanchard, P. (1994). Teaching differential equations with a dynamical systems viewpoint. *College Mathematics Journal*, 25(5), 385-393. doi: 10.2307/2687503
- Blanchard, P., Devaney, R., & Hall, G. (2006). *Differential Equations*. (3ra. ed.). Belmont, USA: Cengage.
- Blum, W. & Niss, M. (1990). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37–68. doi: 10.1007/BF00302716
- Boyce, W. y DiPrima, R. (2010). *Ecuaciones Diferenciales y problemas en valores de la frontera* (5ta. ed.). Ciudad de México, México: Limusa Wiley.
- Brannan, J. y Boyce, W. (2007). *Ecuaciones Diferenciales. Una introducción a los métodos modernos y sus aplicaciones*. Ciudad de México, México: Grupo Editorial Patria.
- Brousseau, G. (1999). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165–198.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266.

- Confrey, J. (2007). Epistemology and modelling-overview. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study* (Vol. 10, pp. 125–128). doi: 10.1007/97803872982214
- Hernández, R., Baptista, P. y Fernández, C. (2010). *Metodología de la investigación*. Ciudad de México, México: McGraw-Hill.
- Kaiser, G., & Maaß, K. (2007). Modelling in lower secondary mathematics classroom-problems and opportunities. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study* (Vol. 10, pp. 99–108). doi: 10.1007/97803872982218
- Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38(3), 302–310. doi:10.1007/BF02652813
- Kallaher, M. (1999). *Revolutions in Differential Equations: Exploring ODEs with Modern Technology*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America Notes.
- Lomen, D. y Lovelock, D. (2000). *Ecuaciones Diferenciales a través de gráficas, modelos y datos*. D.F., México: CECSA.
- Moreno J. & Laborde C. (2003). Articulation entre cadres et registres de représentation des équations différentielles dans un environnement de géométrie dynamique. Lagrange, J. B. & al. (Eds.), *Actes du Colloque Intégration des Technologies dans l'Enseignement des Mathématiques* (Vol. 1, pp. 1-11). Paris, France: Riems.
- Muller, E., & Buskhardt, H. (2007). Applications and modelling for mathematics-overview. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study* (Vol. 10, pp. 267–274). doi: 10.1007/978038729822128
- Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study* (Vol. 10, pp. 3–32). doi: 10.1007/9780387298221
- OCDE - Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. (2003). *Informe PISA 2003. Learning*. Madrid, España: OCDE Publishing.
- Quiroz, S. y Rodríguez, R. (2015). Análisis de praxeologías de modelación matemática en libros de texto de educación primaria. *Educación Matemática*, 27(3), 45-80.
- Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(1), 55-87. doi:10.1016/S0732-3123(01)00062-1
- Rasmussen, C. & Whitehead, K. (2003). *Learning and Teaching Ordinary Differential Equations. The Mathematical Association of America*. Disponible en: http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_7.html
- Rodríguez, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée: une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S. Sciences-New York*. (Tesis de maestría no publicada). Université Joseph Fourier, Grenoble, Francia.
- Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-1), 191–210.
- Salinas, P. y Alanís, J. A. (2009). Hacia un paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(3), 355–382.
- Salinas, P., Alanís, J. A. y Pulido, R. (2011). Cálculo de una variable. Reconstrucción para su enseñanza y aprendizaje. *DIDAC*, 56-57, 62–69.

- Santos, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Ciudad de México, México: Grupo Editorial iberoamerica
- Zill, D. (2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* (9na. ed.). Ciudad de México, México: Cengage.

Autoras

Ruth Rodríguez Gallegos. Tecnológico de Monterrey, México. ruthrdz@itesm.mx

Samantha Quiroz Rivera. Tecnológico de Monterrey, México. samanthaq.rivera@gmail.com