

JOSU RUIZ DE GAUNA GOROSTIZA, PAULÍ DÁVILA BALSERA,
JUAN ETXEBERRIA MURGIONDO, JOXEMARI SARASUA FERNÁNDEZ

LOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS DEL BACHILLERATO EN EL PERIODO 1970 - 2005

THE MATHEMATICS TEXTBOOKS OF HIGH SCHOOL IN THE PERIOD 1970-2005

RESUMEN

En este artículo se aborda el análisis de un importante corpus documental de libros de texto de matemáticas nivel bachillerato publicados en España durante el periodo 1970 -2005. Los autores recogen categorías de análisis de diversos modelos para proponer una metodología que considera *el tratamiento didáctico del contenido matemático, el lenguaje gráfico-simbólico, los problemas y ejercicios y las innovaciones metodológicas y modelo de enseñanza - aprendizaje*. Se establecen las características de los libros de texto de cada una de las tres etapas en las que se divide el periodo analizado. En las conclusiones se resalta la evolución del tratamiento de estos aspectos desde el punto de vista formal, formativo y de contenido.

PALABRAS CLAVE:

- *Didáctica*
- *Matemática*
- *Libros de texto*
- *Enseñanza*
- *Currículo*

ABSTRACT

This article focuses on a big corpus of mathematics text books from a high school level, published in Spain from 1970 to 2005. The authors work with analytic categories that are taken from various models in order to suggest a methodology that includes *the didactic approach to the mathematics contents, the graphic-symbolic language, mathematical problems and exercises, as well as the methodological innovations and the learning-teaching processes*. The characteristics from these text books are described in each stage (there are three of them) in which the analyzed period is divided. In the conclusion, we emphasize the evolution of the analysis of these aspects from three points of view: the formal, the formative and the content one.

KEY WORDS:

- *Didactics*
- *Mathematics*
- *Text books*
- *Teaching*
- *Curriculum*



RESUMO

Neste artigo, aborda-se a análise de um importante corpus documental de livros de texto de matemática nível “bachillerato” (equivalente ao Ensino Médio), publicados na Espanha, durante o período de 1970-2005. Os autores coletam categorias de análise de diversos modelos para propor uma metodologia que considera *o tratamento didático do conteúdo matemático, a linguagem gráfico-simbólica, os problemas e exercícios e as inovações metodológicas e modelo de ensino-aprendizagem*. Estabelecem-se as características dos livros de texto de cada uma das três etapas nas que se divide o período analisado. Nas conclusões, ressalta-se a evolução do tratamento destes aspectos desde o ponto de vista formal, formativo e de conteúdo.

PALAVRAS CHAVE:

- Didática
- Matemática
- Livros de texto
- Ensino
- Currículo

RÉSUMÉ

Cet article rapporte l'analyse d'un corpus important de manuels scolaires de mathématiques du collège publiés en Espagne pendant la période 1970 - 2005. Les auteurs ont recueilli différents catégories d'analyse pour proposer la méthodologie suivante : *le traitement didactique du contenu mathématique, le langage symbolique-graphique, les problèmes et les exercices, et les innovations méthodologiques et le modèle d'enseignement-apprentissage*. Pour chaque étape historique, il y en a trois, on caractérise les manuels selon cette méthodologie. Dans les conclusions on fait ressortir l'évolution du traitement de ces aspects du point de vue formel, formatif et du contenu.

MOTS CLÉS:

- Didactique
- Mathématique
- Manuels scolaires
- Enseignement
- Programme scolaire

1. INTRODUCCIÓN

Los libros de texto tienen tradición y arraigo en la enseñanza impartida en España y “su desarrollo ha sido considerado como un elemento fundamental del modernismo” (Vea Muniesa, 1995, p. 179). Popkewitz señala que el libro de texto ha sido el centro de la escolarización de las escuelas islámicas, cristianas y judías al menos desde la Edad Media (Martínez Bonafé, 2002). Asimismo, la importancia de los libros de texto en los centros de enseñanza ha sido resaltada por varios autores: Richaudeau (1981); Martínez Santos (1987); Gimeno (1988); Choppin (1992); Martínez Bonafé (1992); Escolano (2009). Estos autores señalan

que el libro de texto se debería seleccionar en función de criterios estrictamente pedagógicos e inciden en la necesidad de hacer un uso crítico y reflexivo del mismo. Por otra parte, el estudio de los manuales escolares está considerado como campo de investigación, tanto en lo que se refiere a su relación con el currículo, como en lo que se refiere a la historia y epistemología; además de la importancia relativa a la transmisión del conocimiento.

Dentro del ámbito de las matemáticas, y por lo que respecta a las clasificaciones de investigaciones curriculares en educación matemática, aparecen los libros de texto como una de las variables destacadas. Esto es así, en la clasificación realizada por Begle en 1979 o en la de Keitel de 1982, y en el caso español Rico hace una clasificación de investigaciones en educación matemática, que incluye dentro de lo que él denomina el nivel de diseño curricular: “El campo de la preparación de materiales curriculares y la selección de medios, modelos y recursos para el aula. Se incluyen aquí estudios sobre libros de texto, su estructura, composición, ilustraciones, vocabulario y empleo de modelos y materiales” (Rico, 2007, p. 270).

En un contexto cada vez más tecnologizado, el salón de clases no es la excepción: la inserción de ordenadores (denominada escuela 2.0), del software educativo y otros recursos disponibles en línea es ahora una realidad y el libro de texto se encuentra ante un mayor número de competidores. Sin embargo, no podemos decir que estos constituyan el núcleo principal de la clase, pues siguen siendo materiales de apoyo y consulta que promueven el aprendizaje, y tampoco podemos decir que hayan desplazado al material impreso.

Además, a nivel internacional, tal y como afirman Kajander y Miroslav (2009), más del 95 por ciento de los profesores del grado 12 (Canadá) indican que el libro de texto es su principal recurso didáctico, y tal como lo hemos constatado a través de un estudio realizado en el curso 2009-2010 en los centros de enseñanza del País Vasco, se sigue utilizando mayoritariamente el libro de texto frente al material que denominamos como propio de cada centro (apuntes, cuadernos, recursos de Internet, ...) en las clases de matemáticas del bachillerato. Tal es así, que en 2º de Bachillerato (curso Terminal, previo a la Universidad), el 90 por ciento de los centros declara tener un libro de texto para las asignaturas de matemáticas, que es utilizado “para todo” en un 67 por ciento de los casos, frente a un 11 por ciento que sólo lo utilizan “para los problemas”. También se utiliza el libro de texto, aunque en menor medida, para la preparación del examen de acceso a la universidad, en un 38 por ciento de los centros. Estos datos recientes permiten afirmar que el libro de texto sigue jugando un papel preponderante en la enseñanza de las matemáticas del Bachillerato y de ahí la importancia de realizar análisis de los textos, de matemáticas en particular.

2. ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

Para el análisis de libros de textos en general se han propuesto diferentes modelos, más o menos exhaustivos, que comprenden el estudio de diversos elementos que permiten caracterizar el texto en cuestión. Así por ejemplo, Maillo (1973) proponía la atención en las siguientes características didácticas: método, elementos motivadores, ejercicios y evaluación. Posteriormente, Bernard Mainar (1979), propuso los siguientes criterios básicos de análisis: postulados educativos generales, programación del proceso de aprendizaje y cumplimiento de la normativa legal vigente. Cada uno de estos criterios contenía varios apartados que los desarrollaban. La UNESCO encargó a Richadeau en 1981 un estudio para la elaboración de una guía práctica para la creación y producción de manuales escolares en el que se señalaba como difícil o imposible concebir un mismo cuestionario que permitiese calificar a la vez un manual de historia y un manual de matemáticas, un curso tradicional y un curso programado. Hartley (1986) dice que en la evaluación de los contenidos se deben analizar las situaciones de resolución de problemas, la secuencialidad de los contenidos, la claridad de las exposiciones y la organización de los capítulos. Martínez Bonafé (1992) señala siete tópicos a evaluar en un libro de texto: modelo pedagógico, cultura y valores, estrategias didácticas, modelo de profesionalidad docente implícito, sugerencia de tareas organizativas que implican al centro, evaluación del material, vinculación con programas de formación. En la propuesta de guía de evaluación realizada por Prendes Espinosa (2001) se destacan: análisis de contenidos, lenguaje y legibilidad, ilustraciones, ejercicios y aspectos generales.

En cuanto al análisis de textos de matemáticas Vea Muniesa señala, “la importancia que el estudio de los libros de texto tiene para el conocimiento específico, interno y formal de la educación matemática impartida en cada momento, no sólo en cuanto a los contenidos y su ordenación, sino en cuanto a métodos de exposición, orientaciones pedagógicas, carácter teórico-práctico, lenguaje matemático utilizado, predominio de unos contenidos sobre otros, y tantos otros parámetros que nos descubre la observación de cualquier obra impresa” (Vea Muniesa, 1995, p. 37).

González y Sierra (2004) hacen una propuesta de análisis de textos de matemáticas que se basa en los modos de representación, que son: descripciones verbales, tablas de datos, representaciones gráficas y expresiones simbólicas. También proponen estudiar el sistema matemático de signos a través de sus aspectos sintáctico (estructura del problema, descripciones teóricas, símbolos utilizados en las tablas, tipos de expresiones simbólicas), semántico (fenomenología,

tipos de descripciones, tipos de tablas, tipos de gráficas y significado de las expresiones simbólicas), pragmático (función de los ejercicios, papel de las definiciones, actividades relacionadas con las tablas, actividades gráficas y papel de las expresiones simbólicas) y sociocultural (influencia social y adaptación al currículo, influencias didácticas, aplicación de las tablas, presentación de las gráficas (estática/dinámica) y complejidad de las expresiones simbólicas). Desdoblando las descripciones verbales, según sea el caso, en teoría y práctica y combinando las clases anteriores, obtienen una tabla con 20 celdas que les permite clasificar los libros en tres categorías: expositivos, tecnológicos y comprensivos.

Para la valoración de textos de matemáticas Ortega (1996) construye un instrumento con diez organizadores, entre los que se encuentran: entorno, teoría, ilustraciones, enfatización, actividades, motivación, metodología, nuevas tecnologías. Este instrumento de valoración es ampliado posteriormente (Monterrubio y Ortega, 2012) denominado *modelo exhaustivo de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas*; en él amplían el número de categorías a analizar, categorías que subdividen en numerosos epígrafes. Fernández (2011) sintetiza en tres dimensiones la información necesaria para el análisis de textos: organización del contenido, análisis fenomenológico y análisis conceptual, y lo ejemplifica con el estudio del tratamiento de la proporcionalidad en diversos textos de matemáticas.

Respecto a las investigaciones, son numerosos los trabajos que abordan el tratamiento de la probabilidad y de la estadística; por ejemplo, Cobo y Batanero (2004) analizan el significado de la media; Lavalle, Micheli y Rubio (2006) efectúan un análisis didáctico de regresión y correlación para la Enseñanza Media. Hay otro grupo de trabajos que abordan aspectos relativos a la didáctica de algunos conceptos importantes del Análisis, por ejemplo los realizados por Sierra, González y López (2000) que estudian las concepciones de los alumnos de bachillerato sobre el límite funcional y la continuidad; el límite de funciones también es estudiado por Espinoza y Azcárate (2000) y por Blázquez y Ortega (2001) que estudian los sistemas de representación en la enseñanza del límite; González y Sierra (2004) analizan el tratamiento dado a los puntos críticos en los libros de texto durante el siglo XX, Sánchez, García y Llinares (2008) estudian la comprensión de la derivada como objeto de investigación, y Contreras y Ordoñez (2006) la introducción a la integral definida. Hay otros trabajos como el de Escudero (2005) que analiza el tratamiento de la semejanza y otros que tienen la proporcionalidad como objeto de estudio, como por ejemplo los de Gairin y Escolano (2009) y el de Fernández (2011). Podemos también citar otros dos trabajos que abordan el estudio de la recta numérica (Bruno & Cabrera, 2006) y

la simbolización del concepto de potencia (Martínez & Penalva, 2006). Kajander y Miroslov (2009) analizan el papel que representan los libros de texto en la transmisión de errores conceptuales.

Se trata de estudios de variado signo, donde se analizan errores y dificultades en la comprensión de los conceptos, aplicaciones del concepto, sistemas de representación, desarrollo de esquemas, el tipo de tratamiento del concepto que los textos efectúan (intuitivo, normativo, etc.), la existencia en los libros de contextos de ejemplificación, exploración y aplicación, etc. Como el número de trabajos es muy amplio y las conclusiones obtenidas de distinta índole y muy variadas, se entiende que el marco de comprensión de este fenómeno es complejo.

3. MODELO TEÓRICO

Presentamos un modelo adaptado a los requerimientos de nuestra investigación, esto es, que considera un periodo largo de tiempo y un gran volumen de textos a analizar y que permite caracterizar los textos, las etapas a las que pertenecen y el estudio de su evolución, que son los objetivos de nuestra investigación. Consta de cuatro categorías: *Tratamiento Didáctico del Contenido Matemático, Lenguaje Gráfico-Simbólico, Problemas y Ejercicios, Innovaciones metodológicas y Modelo de Enseñanza-Aprendizaje*.

Antes de explicar cada una de las categorías queremos señalar que constituyen los grandes epígrafes de los principales métodos de análisis de libros de texto reseñados más arriba. Nuestro modelo incluye las categorías del modelo general de análisis de libros de texto de Prendes Espinosa (análisis de contenidos, lenguaje y legibilidad, ilustraciones, ejercicios y aspectos generales), pero aplicado al campo de las matemáticas; en el modelo de análisis de González y Sierra se habla de modos de representación en sus aspectos sintáctico y semántico, que nosotros los hemos recogido en Lenguaje Gráfico-Simbólico, y también en su aspecto pragmático que está recogido en nuestra categoría de Problemas y Ejercicios y el aspecto sociocultural que se inserta en nuestras primera y cuarta categorías. Los organizadores (entorno, teoría, ilustraciones, enfatización, actividades, motivación, metodología, nuevas tecnologías) definidos por Ortega tienen cabida en las categorías utilizadas por nosotros, pues como se verá al definir las categorías, éstas abarcan en su desglose dichos organizadores; finalmente, de las tres dimensiones de análisis establecidas por Fernández, la organización del

contenido y el análisis conceptual tienen su reflejo en la categoría de Tratamiento Didáctico del Contenido y el análisis fenomenológico se recoge en los análisis de contexto y de aplicabilidad realizados. ¿Qué aporta, pues, nuestro modelo a los anteriores? Es una síntesis de modelos y como tal síntesis, el modelo permite caracterizar los libros de texto de una forma más global, considerando el texto como unidad de análisis pero sin perder información relevante para el objetivo que se persigue, que es el estudio de su evolución a lo largo de tiempo. Este modelo permite efectuar el análisis de la plasmación práctica del currículo, de las propuestas metodológicas recogidas en los libros de texto y de la comparación entre ellas, lo que hace que la comparación global entre textos y el estudio de su evolución sean más sencillos de realizar. También va a permitir analizar la relevancia dada a los contenidos incluidos en los textos, la evolución que experimentan conceptos que son importantes en una etapa o para unos autores, pero no lo son en otras circunstancias. En conjunto, supone una metodología coherente y dirigida al logro de los objetivos propuestos: caracterizar los textos y las etapas a las que pertenecen y estudiar su evolución. Este análisis no se podría efectuar de forma global aplicando los modelos reseñados anteriormente, bien por que proponen modelos generales o, en el caso de modelos dirigidos a analizar textos de matemáticas, por su exhaustividad.

Tratamiento Didáctico del Contenido Matemático

Se analiza el contenido matemático tal y como aparece recogido en el currículo establecido. Se pretende estudiar el grado de cumplimiento del currículo y el tratamiento didáctico con que se aborda en el texto. Se señalan aspectos didácticos, tales como la contextualización de las situaciones, –porque la contextualización de las situaciones planteadas facilita la comprensión de los conceptos–, la aplicabilidad de las matemáticas, –poniéndolas en relación directa con los fenómenos a los cuales modeliza o transfiriendo los conceptos o las técnicas de las matemáticas a diferentes contextos de utilización–, los aspectos lúdicos, motivacionales o hechos relevantes extraídos de la Historia de las Matemáticas.

Lenguaje Gráfico-Simbólico

El uso de la notación matemática, de los símbolos, ayuda a reducir el esfuerzo cognoscitivo y puede tener una influencia directa en el desarrollo de las ideas. Los símbolos están conectados a las ideas y un único símbolo puede emplearse para varios conceptos. Ya el informe Cockroft (1985) señaló en su párrafo 306

que “el lenguaje desempeña un papel esencial en la formulación y expresión de las ideas matemáticas” (Cockroft, 1985, p. 111). El lenguaje simbólico utilizado en los libros de texto es refinado, producto de sucesivas redacciones y su utilización en los libros de texto de Bachillerato aporta mucha información sobre los objetivos de la enseñanza de las matemáticas que se pretenden conseguir. Además, en las matemáticas, el simbolismo está asociado al concepto de rigor, para el que, como dice el matemático R. Thom “no existe una definición rigurosa del rigor” (Piaget et al., 1978, p. 122). A cada nivel le corresponde su propia forma de exactitud. Tomemos como ejemplo el concepto de límite, objeto de estudio en Bachillerato y de numerosas investigaciones sobre su tratamiento en los libros de texto, como señala Sixto Ríos: *“el concepto de límite, basado en (ϵ, n) , señala el paso de la Aritmética al Análisis Matemático. Su formulación rigurosa en la forma actual, que elimina toda idea de movimiento, fue lograda por Cauchy y costó siglos a los matemáticos que se ocuparon de ello desde las famosas paradojas de Zenón”* (Ríos, 1973, p.18). En consecuencia, se aborda en esta categoría, el análisis del lenguaje simbólico utilizado en los textos, pero también el lenguaje escrito, su interrelación, el predominio de uno u otro y la legibilidad y comprensión para el público al que van dirigidos. Pero los textos, sobre todo más recientes, tienen también un rico lenguaje gráfico que es consustancial a las matemáticas y que facilita y estimula su comprensión. Por lo tanto, se aborda también el análisis del lenguaje gráfico, la función de los gráficos utilizados y sus tipos, las tablas, diagramas y otros símbolos y la tecnología utilizada en su realización.

Problemas y Ejercicios

Constituyen una parte esencial de los libros de texto de matemáticas de cualquier época. Además su relevancia ha ido en aumento en los textos actuales, pues se ha pasado de ser una colección de ejercicios situados al final del libro a ser un elemento central en el logro de los aprendizajes. Su evolución hace que hoy en día debamos hablar más de actividades que de problemas, pues estos tienen cabida en aquellas, pero también lo tienen los ejemplos, las situaciones propuestas para introducir los conceptos y los meros ejercicios de manipulación. Por lo tanto, en esta categoría se analizan las actividades en sentido amplio trabajadas en el libro de texto, sus tipos, su colocación en el texto, su función, las situaciones que plantean, los enunciados, los problemas de aplicación y los contextualizados y su carácter de ejercicio propuesto en las pruebas de acceso a la universidad, que es una sección cada vez más frecuente en los textos actuales.

Innovaciones metodológicas y modelo de enseñanza-aprendizaje

Dentro de las innovaciones metodológicas, se sitúa el texto en la etapa a la que pertenece y se analizan las continuidades y rupturas que los textos contienen, estudiando las innovaciones que recogen y señalando si han sido precursores en la apertura de alguna línea metodológica que haya perdurado en el tiempo. Los textos reflejan un modelo de enseñanza-aprendizaje que básicamente se sustenta en el tratamiento didáctico que efectúan y en las opciones metodológicas utilizadas y propuestas, todos estos elementos recogidos en el análisis y que por lo tanto permiten determinar el modelo de enseñanza-aprendizaje del texto. Dentro del modelo de enseñanza-aprendizaje se analizan los siguientes epígrafes: método didáctico, propuesta metodológica, tipo de texto, tendencia y enfoque utilizados en el texto.

4. METODOLOGÍA

En esta investigación se han analizado los textos de matemáticas producidos en el periodo 1970-2005, dividiendo para ello el periodo en tres etapas que permitirán comparar textos homogéneos entre sí con el fin de determinar su evolución a lo largo del periodo.

Los criterios utilizados para seleccionar los libros objeto de análisis han sido los siguientes:

- a) Libros que hayan sido de uso bastante generalizado por haber sido libros de autor o pertenecientes a editoriales importantes.
- b) Libros que han tenido continuidad en varios cursos y que cubrían el conjunto del bachillerato.
- c) Libros innovadores que marcaron el camino de la reforma de la enseñanza de las matemáticas.

La época analizada va de 1970 hasta 2005, abarca por lo tanto 35 años y en ella hubieron dos grandes leyes como la LGE (Ley General de Educación, 1970) y la LOGSE (Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo, 1990), aunque algunos de los textos reflejan características de épocas anteriores a la que pertenecen o posteriores, y en ese sentido también se puede decir que algunos aspectos de la LOE (Ley Orgánica de Educación, 2006) pueden aparecer en alguno de los últimos textos analizados. Acorde con lo anterior, el periodo se ha dividido en tres etapas: la que corresponde a la primera parte de la

vigencia de la LGE, y que abarca desde 1970 hasta 1980, la etapa correspondiente a la segunda parte de la vigencia de la LGE, que abarca de 1980 a 1990 y la etapa que corresponde a la LOGSE, de 1990 a 2005. El periodo correspondiente a la L.G.E. se ha dividido en dos etapas, primero porque en un periodo tan largo es evidente que hubieron textos muy diversos, lo cuál constituye una gran riqueza y amplia gama de líneas de investigación, pero obliga a delimitar etapas con tendencias pedagógico-didácticas similares. Los textos no se caracterizan sólo por pertenecer al periodo de vigencia de una misma ley educativa, inciden sobre todo las corrientes pedagógicas internacionales de renovación de enseñanza de las matemáticas y la propia práctica diaria que moldearon las propuestas de libros de texto. No hay que olvidar que las tendencias renovadoras en la enseñanza de las matemáticas que imperaban en Europa tuvieron su reflejo en los textos de matemáticas españoles, a partir sobre todo de 1980 con el auge de los movimientos de renovación pedagógica y la creación de grupos de trabajo que desarrollaron materiales innovadores.

Debemos hacer algunas precisiones terminológicas sobre el significado de la palabra bachillerato que aparecerá ligada a los textos analizados. Todos los textos corresponden a Educación Postobligatoria, que en España se ha denominado tradicionalmente como Bachillerato. Pero mientras que con la LGE esta Educación Postobligatoria comprendía tres cursos de Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP) y un Curso de Orientación Universitaria (COU), en la LOGSE, la Educación Postobligatoria pasó a tener sólo dos cursos de Bachillerato. Se han analizado 36 libros de texto, 28 pertenecientes al tiempo de vigencia de la LGE, seis pertenecientes a la época LOGSE y dos que no son propiamente libros de texto sino materiales didácticos elaborados dentro de la etapa LGE.

En el análisis realizado hemos aglutinado los textos por editoriales, ya que nos permite una mayor coherencia, y también recoge las opciones del mercado editorial en cuanto a la difusión y a la implantación que tienen en los centros, tal como se constató en el estudio de opinión a los centros antes mencionado. Es por lo tanto natural poner el énfasis en las características de los textos de cada etapa y en analizar la evolución de estos a lo largo del periodo.

5. TEXTOS DE LA PRIMERA ETAPA DE LA L.G.E. (1970-1980)

Etayo J., Colera J. y Ruiz A. Matemáticas 1º. (1976), Matemáticas 2º (1976), Matemáticas 3º (1977), Matemáticas de COU (1978). Anaya: Madrid.

Son textos que ya no son de un único autor, como se estilaba en los textos de la época anterior. Los textos cuentan con prólogos en los que los autores desarrollan su concepto de didáctica de la matemática. Inciden en la importancia del trabajo personal y el esfuerzo, que *“puede ser aliviado pero nunca abaratado”* (Etayo, J., Colera, J., Ruiz, A., *Matemáticas 2º*, p. 6), resaltan la importancia del análisis de casos previo a la introducción de nuevos conceptos y se critica el aprendizaje de las matemáticas *“según pautas literarias, demostrando por analogías y utilizando un lenguaje aproximado”* (Etayo, J., Colera, J., Ruiz, A., *Matemáticas 3º*, p. 6). Frente a esto resaltan la *“univocidad de su lenguaje como una de las principales aportaciones de las matemáticas a la formación del alumno”* (Etayo, J., Colera, J., Ruiz, A., *Matemáticas 3º*, p. 6). Insisten en que entender en matemáticas es saber hacer y consideran las matemáticas como parte del acervo cultural de la sociedad moderna, es decir, como un producto de su cultura, siendo un punto de vista muy actual y desde luego innovador para la época.

5.1. *Tratamiento Didáctico del Contenido Matemático*

Contenido Matemático

Se enseñan las matemáticas oficiales elaboradas por la comunidad científica, sustentando todo el edificio matemático en sus aspectos lógico-deductivos y demostrando con rigor matemático las propiedades y teoremas. Se prima la consistencia interna de las matemáticas y el concepto de “elegancia” matemática es leitmotiv para la introducción de algunas teorías y demostraciones. En los textos se recogían los nuevos programas elaborados según la matemática moderna y por lo tanto se le da una gran importancia a la teoría de conjuntos, a las estructuras algebraicas: “Una vez más se comprueba cómo entes muy distintos pueden ser manejados de la misma forma y la importancia que tiene conocer ese manejo, es decir, conocer la estructura de los entes” (1º BUP, pág. 184). Se desarrollan todos los contenidos de los programas oficiales.

Tratamiento Didáctico

Tratamiento formal en el desarrollo matemático de propiedades y teoremas. La intuición se usa como recurso, pero no como justificación. Los autores utilizan una didáctica expositiva consistente en la introducción de conceptos y definiciones apoyados en la elección de unos buenos ejemplos, no siempre matemáticos, que ilustran el concepto, sus diferentes acepciones y los pasos teóricos a seguir posteriormente. Precisan definiciones y teoremas con un riguroso lenguaje

matemático y efectúan demostraciones formales, lo más generales que sea posible. Inciden también en el entrenamiento de lo aprendido en los ejercicios, reservando para estos algunos de los temas que consideran de ampliación. Como ejemplo del planteamiento didáctico utilizado, señalamos que en el estudio de las ecuaciones no se estudian por separado las ecuaciones de primer grado y luego las de segundo grado como un tema aparte, además, relacionado con lo anterior y para no sobrecargar el texto, se dejan para ampliar en los problemas todas las cuestiones colaterales referentes a suma y producto de raíces de la ecuación de segundo grado y ecuaciones bicuadradas; se actúa de igual forma en las progresiones, donde la interpolación queda como ampliación para los ejercicios del final de la lección.

Otro ejemplo es el estudio de sucesiones y límites en 2º de bachillerato. Dicen los autores que utilizarán “un proceso dinámico, intuitivo, de presentación de la idea de límite”. Pero nos advierten que “una definición matemática nunca puede ser una descripción más o menos literaria de un objeto: tiene que señalar rigurosa y unívocamente el objeto”. La primera definición de límite contiene la idea fundamental, pero la expresan con lenguaje ordinario, para rápidamente pasar a la definición clásica, aunque no escrita estrictamente en lenguaje simbólico, pues no utilizan los cuantificadores lógicos. Es la siguiente, pág. 17:

“ $\lim s_n = l \Leftrightarrow$ cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un número natural n_0 de modo que: si $n > n_0$ entonces $|s_n - l| < \varepsilon$ ”

Apoyándose en los infinitésimos (que se trataban en algunos de los textos de épocas anteriores, pero que poco a poco fueron desapareciendo de los textos de este nivel), se definen y estudian las propiedades de las sucesiones convergentes y se pasa al cálculo de límites. Se dan las definiciones simbólicas de sucesiones monótonas y acotadas. Se demuestra que toda sucesión convergente está acotada y se enuncia su recíproco, pero no se da la demostración porque se dice que es bastante laboriosa. Esto viene acompañado de una nota que reproducimos por su gran interés, pág. 42:

Nota: “nos parece importante que el alumno vea muy razonables, intuitivamente, cada uno de los resultados a los que se va llegando, pues sólo así sabrá recordarlos y utilizarlos en el momento oportuno. No obstante, téngase presente que a veces la intuición engaña y sólo una buena demostración puede dar seguridad sobre la validez de una conclusión. Recomendamos al alumno una sana desconfianza de todo aquello que no ha sido demostrado. El estudiante, con inquietud matemática, puede consultar la demostración de este teorema, así como de otros que aquí se dan sin demostrar, en libros, de nivel superior, que su profesor, mejor que nadie, podrá recomendarle”

Aplicabilidad de las matemáticas y contextualización

Se resaltan algunas aplicaciones de las matemáticas, por ejemplo, a la física, la economía y las cuestiones técnicas. No tratan aspectos relacionados con la historia de las matemáticas, ni aspectos lúdicos, pero quedan algunos temas abiertos a otros enfoques y ampliaciones, preparando así al alumno para posteriores retos.

5.2. Lenguaje gráfico-simbólico

El lenguaje ordinario juega un importante papel en los textos, pues en las demostraciones se mezcla el lenguaje ordinario con las expresiones y símbolos matemáticos, para así acercar y facilitar su comprensión a los alumnos. El lenguaje usado es un lenguaje de transición entre épocas anteriores y actuales. Las propiedades y los ejercicios se escriben de manera parsimoniosa, detallando de la mejor manera posible lo que se quiere explicar o preguntar. Se hacen perífrasis para el mejor entendimiento de una cuestión y no se busca la redacción más escueta, común en los textos de matemáticas de la época. Aún así, determinadas expresiones (*para cualesquiera, cualesquiera que sean, tanto como queramos, sin más que efectuar el experimento tantas veces como sea necesario, insuficiencia, ...*) son redundantes y aunque traducidas al lenguaje ordinario, siguen reflejando la dificultad para abandonar la matemática estrictamente deductiva y sustituirla por una matemática más intuitiva y menos formal, en aras de una mayor comprensión y una mejor aceptación por los alumnos de estas edades.

Dos ejemplos de uso de lenguaje simbólico son los siguientes:

- En el texto de 1º de BUP se habla de divisores y múltiplos con notaciones lógico-conjuntistas para las definiciones.

Por ejemplo $D(24) = \{\text{Divisores de } 24\}$

$$D(24) \cap D(36)$$

- Algunos de los símbolos que representan conjuntos numéricos:

$$R^+, R^-, R_*, R_*, R_*, R^+ \cap R^-, R^+ \cup R^-, R^+ \cap R_*, R^+ \cup R_* \cup \{0\} = R$$

Este formalismo en las expresiones utilizadas es también reflejo de un cierto distanciamiento con respecto al público al que va dirigido el texto, que supone a la vez un elemento de la tradición educativa, una consideración más adulta del

alumno, empleando un castellano que hoy en día no resulta próximo. Aún así, hay veces en las que supeditan el rigor matemático al estadio formal de desarrollo del alumno; por ejemplo al utilizar para el límite de una sucesión la notación $\lim a_n$ en lugar de la clásica $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

En cuanto al lenguaje gráfico, éste acompaña a las propiedades y ejemplos, y su función es la de facilitar la comprensión de los conceptos matemáticos. En el texto de COU se ilustra el empleo de la calculadora y en la aproximación de funciones, hay profusión de gráficas de gran calidad, hay tablas de doble entrada, diversos tipos de diagramas (sectores, árboles, histogramas), gráficas de funciones, diagramas de Venn y organigramas. En el cálculo numérico, en COU, se utilizan los organigramas para ilustrar los procesos iterativos. No hay gráficos cuyo contenido sea lúdico o motivador o que no sean en cierto sentido matemáticos. Tampoco hay fotografías, ni ilustraciones a color (tipo viñeta o cómic).

5.3. Problemas y ejercicios

Hay ejercicios destinados al aprendizaje de destrezas, ejercicios teóricos, de ampliación y abstractos; la mayoría de ellos surgen de la propia matemática. Un ejemplo extraído del libro de 1º, pág. 141, “*Recuerda que está prohibido dividir por 0. ¿Dónde está el fallo en la siguiente “demostración”?*”

$$x=y \Leftrightarrow xx=xy \Leftrightarrow xx-yy=xy-yy \Leftrightarrow (x-y)(x+y)=(x-y)y \Leftrightarrow x+y=y \Leftrightarrow 2y=y \Leftrightarrow 2=1$$

Hay ejercicios a lo largo de los temas, al final de los mismos y una extensa colección de ejercicios de repaso y ampliación al final de los libros. Hay algunos ejercicios en los que se presentan aplicaciones, principalmente a otros campos de la ciencia en las lecciones sobre derivadas. En el libro de COU, son de destacar los problemas de tipo práctico, clásicos que luego se han repetido en numerosos textos y en exámenes de selectividad.

5.4. Innovaciones metodológicas y modelo de enseñanza-aprendizaje

Los textos estudiados constituyen un elemento de transición entre los textos producidos en la época anterior y los actuales. Por ello no llegan a suponer una ruptura con lo hecho hasta entonces, porque en esencia prima la concepción matemática del texto sobre los aspectos didácticos. Es por ello que en lo fundamental transmiten la misma matemática de los textos anteriores,

pero limando la crudeza de las exposiciones tradicionales. En este sentido son continuistas, pero rupturistas con respecto a otros muchos textos del mismo periodo. En el tema de derivadas marcaron una línea pedagógica que sigue vigente hoy en día. Los conceptos de tasas de variación media e instantáneas, el uso de gráficas de funciones sobre las que se hacían preguntas y el uso también de funciones definidas a trozos, era innovador, suponía una clara ruptura con el estilo pedagógico anterior y ha resultado muy fructífero, porque conectaba con la intuición y con las nuevas tecnologías que han supuesto una mayor facilidad en la elaboración de los gráficos y en la realización de los cálculos. El tratamiento de la estadística en tercero, con la introducción de los conceptos de variable aleatoria y de funciones de densidad y distribución, fue pionero en el bachillerato y supuso un gran esfuerzo de clarificación didáctica. El modelo de los textos es el denominado de racionalidad tecnológica, con un enfoque instrumental y tratamiento formal de las matemáticas. Los textos se adaptaban a las matemáticas modernas y el aprendizaje que proponen es práctico-transmisivo.

5.5. *Características generales de los textos de la primera etapa de la LGE*

- Inmersos en la concepción formalista y estructuralista de la matemática. El proceso lógico-deductivo era eje central en la concepción de los textos y por lo tanto se presentaban las matemáticas de manera rigorista.
- La intuición se dejaba para los ejercicios y problemas, y si acaso, se le concedía algún valor a la capacidad visual como auxiliar en la comprensión de los procesos deductivos.
- Consideran el lenguaje simbólico como parte del aprendizaje.
- Había muchos recuadros (elementos de enfatización), algún color y lenguaje gráfico que acompaña a las propiedades y ejemplos; su función principal es la de facilitar la comprensión de los conceptos. Pero en los textos de este nivel, ahí se acababa la parte gráfica. No había otro tipo de ilustraciones que sí que aparecían, aunque reducidas, en libros más elementales de matemáticas. A los alumnos de estas edades se les consideraba más maduros y además las ilustraciones extramatemáticas no tenían cabida dentro de una concepción seria de la matemática.
- Presentan un buen número de ejercicios, normalmente situados al final de la lección, pero se comenzaban ya a intercalar a lo largo de la teoría, al finalizar los epígrafes correspondientes. Ya no había textos, como en épocas anteriores, que sólo incluyeran una colección de ejercicios al

final del libro. En cuanto al tipo de ejercicios, normalmente incidían en la práctica de conceptos y propiedades y por lo tanto eran procedimentales y manipulativos.

- Los textos son de transición entre la época anterior y los textos actuales de matemáticas. Transmitían un estilo de enseñanza expositivo por parte del profesor y receptivo por parte del alumno, que por medio de un aprendizaje memorístico, al repetición y de la práctica de los algoritmos y de las situaciones presentadas en los libros y en clase, llegaba a dominar los contenidos de los programas.

6. TEXTOS DE LA SEGUNDA ETAPA DE LA L.G.E. (1980-1990).

Borrás E., Salvador A. y otros (Grupo Cero). Matemáticas de Bachillerato Volumen 1. (1977). Matemáticas de Bachillerato Volumen 2. (1978), Estadística (1980), Geometría y Cónicas (1980). Valencia: ICE.

Compostela B., González A., González J., Laborda M. Matemáticas 1º BUP (1986), Matemáticas 2º BUP (1987), Matemáticas 3º BUP (1988), Matemáticas COU (1989). Akal: Madrid.

Guzmán M., Colera J., Salvador A. Matemáticas Bachillerato 1 (1987a), Matemáticas Bachillerato 2 (1987b), Matemáticas Bachillerato 3 (1988), Matemáticas I COU (1989a), Matemáticas II COU (1989b). Anaya: Madrid.



Figura 1 Libros de texto de bachillerato.
Anaya (J. Etayo), Grupo Cero, Edelvives-Ibaizabal

6.1. *Tratamiento Didáctico del Contenido Matemático*

En los textos del Grupo Cero se reestructura el programa oficial de 1º, 2º y 3º de BUP, redistribuyéndolo entre los tres cursos. Los textos de 1º y 2º sí abarcan el programa oficial, aunque la distribución es diferente y el tratamiento de algunos de los temas es singular e innovador, su función era la de ser un material experimental, que sin embargo era utilizado como material complementario por muchos profesores. Si se puede utilizar un símil, se recurría a estos libros para obtener actividades, situaciones y propuestas diferentes de las de los textos en uso, muy sugerentes y que suponían un soplo de aire fresco en el aula de matemáticas, al estilo de los recursos que hoy en día se pueden obtener en la red, que no suelen constituir el núcleo de la clase pero que la complementan hasta el punto de convertirlos en imprescindibles. En los textos de Estadística y Cónicas (3º de BUP) se estudian las distribuciones de probabilidad, el concepto de apuesta y de juego equitativo y se deduce la fórmula de Chebycheff, el ajuste de una distribución empírica, la función de densidad de la normal, las muestras, y los test de hipótesis. En la primera parte de geometría se comienza con ejemplos en los que aparecen mosaicos (Escher) y varias fotografías. Se estudian las isometrías, las homotecias y semejanzas y hay una sección sobre deformaciones topológicas y otra sobre proyecciones. Hay que tener en cuenta que estos libros de 3º de BUP eran experimentales y no abarcan todo el programa oficial.

En estos textos se enfatiza sobre el cambio necesario en el rol del profesor y del estudiante y se habla de investigar, conjeturar, verbos desconocidos en el lenguaje de la época usado para describir la actividad de la clase de matemáticas: “los estudiantes actúan, investigan, conjeturan, rectifican ellos mismos sus propios errores”. Aparece, creemos que por primera vez en textos en lengua castellana, la palabra “matematizar”, para referirse a establecer modelos que describan situaciones empíricas pero reales. Se aborda la cuestión de la separación entre teoría y práctica y se decantan por un tratamiento unificado, abordando desde la peculiaridad del tratamiento matemático los fenómenos que estudian otras ciencias. Hay un cambio metodológico en la presentación de los conceptos: “Los ejercicios de introducción no tienen como objetivo <<motivar>> al estudiante. Su objetivo es más bien ofrecer problemas que le adviertan del tipo de cuestiones desde ángulos suficientemente diversos”. Se formalizan los conceptos tras una larga experimentación, se realizan construcciones, se utilizan situaciones abiertas y hay un claro rechazo de las demostraciones formales (sólo hay una en todo el texto de 1º de BUP). En el librito de Estadística hay un breve prólogo en el que se mencionan los textos consultados que son: *S.M.P. Cambridge University Press, 1975*; *S.M.P. Revised Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1973*

y *L'Enseignement des probabilités et de la Statistique de Arthur Engel*. CEDIC, 1975. Son textos que en aquella época no eran muy conocidos en España, pero que luego se tradujeron al castellano y se han convertido en clásicos. Se habla de “evaluación inicial” y de habilidades (cálculo de porcentajes, agilidad combinatoria, empleo de diagramas en árbol y práctica de aritmética general), término que hoy en día está incorporado a las teorías curriculares y es de uso generalizado.

En los textos de la editorial Akal tratan los bloques temáticos de forma integral, mostrando las interrelaciones entre conceptos afines. Los títulos de las preguntas son informales y representan una introducción al tema (“desfile de números”, “comportamiento de la sucesión”, “cada vez más cerca”). Los libros tienen varias citas de personajes históricos, muchos de ellos matemáticos que sirven para introducir unidades o bloques. Las siguientes son algunas de las que aparecen en el texto de 1º de bachillerato (BUP): “Donde está el número hay belleza” (Proclo), “Los números me ponen enfermo” (Shakespeare) y “Lo que una inteligencia humana puede esconder, otra puede encontrarlo” (Edgar Allan Poe).

En los textos de Miguel de Guzmán (Anaya) la estructura de los bloques temáticos comienza con una introducción que sitúa el tema históricamente y destaca su lugar en la cultura y la ciencia, además de resaltar el lugar que en la matemática actual desempeña. A continuación se desarrollan los temas, que comienzan con una sección de “*Resuelve a tu aire*”, ó “*Medita y Lee*” ó, “*Aprende jugando*” en la que se le proponen al alumno actividades que le introducen en la materia de un modo natural. Al final de cada tema hay una revista cuya finalidad es tratar de motivar, entretener y ofrecer aspectos lúdicos de la materia en cuestión.

Aplicabilidad de la matemática y contextualización

Se presentan las matemáticas en estrecho contacto con el estudio de situaciones científicas, técnicas, sociales o cotidianas y se hace divulgación científica al situar los problemas en su entorno científico y abordar los conceptos y la terminología que les son propios.

Historia, motivación y aspectos lúdicos

Se recurre a anécdotas y momentos de la historia de las matemáticas. Por ejemplo, en estadística, al hablar sobre ruletas hay algún ejercicio y una anécdota sobre un desequilibrio producido por desgaste en una de las ruletas del Casino

de Montecarlo, que parece ser que alguien aprovechó para hacerse millonario. En esto también se marcó una línea metodológica, al intercalar lecturas interesantes o hechos curiosos relacionados con la materia estudiada, que sin ser estrictamente matemáticos, sirven de motivación o fomentan el interés.

6.2. Lenguaje gráfico–simbólico

El lenguaje simbólico utilizado en los textos del Grupo Cero está influenciado por los usos de la época. Hay simbología de conjuntos, se utiliza el alfabeto griego y se escriben de manera sintética algunas fórmulas. Dos ejemplos curiosos de notaciones que aparecen en los textos: se tratan las diferencias de una función polinómica, como una propiedad interesante que las caracteriza y se utiliza su simbología (p. ej. $\Delta_2 y$) y se utilizan las fracciones mixtas: $2\frac{13}{16}$. En probabilidad, no se utiliza la terminología de operaciones entre conjuntos sino que escriben: $p(\text{no}X)$, $p(A \text{ y } B)$, $p(A \text{ ó } B)$. Pero sí se escriben las fórmulas para el cálculo de los parámetros estadísticos. Por ejemplo:

$$\Omega \xrightarrow{X} R, X(\omega_1) = 0, X(\omega_2) = 0, \dots, \bar{x} = \sum_{i=1}^{i=r} f_i x_i, s = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=r} (x_i - \bar{x})^2 f_i}$$

Aún así predomina el lenguaje escrito sobre el simbólico, que sólo se utiliza como conclusión de los procesos. Son textos largos de un aspecto semiliterario, extraídos de diferentes contextos y situaciones y planteados con la terminología del contexto-situación a la que pertenecen. Es decir, se presupone un objetivo de alfabetización cultural y científica a través de las matemáticas. Así por ejemplo, transcribimos el ejercicio de introducción a las tablas de contingencia, pág. 159: Diagnósticos: “Para comprobar la existencia de una lesión de hígado leemos en una revista médica que existen dos procedimientos fundamentales: <<el histológico>> y el <<gráfico>>. Este último no es tan preciso como el primero, pero es menos expuesto. Para verificar la precisión de un procedimiento gráfico se estudiaron 580 lesiones de hígado, comprobándose luego histológicamente si el diagnóstico había sido correcto o incorrecto”

El lenguaje gráfico, con las limitaciones de la época, constituye otro aspecto muy rupturista e innovador. Las ilustraciones están hechas por un equipo de ilustradores y hay unas que sirven de apoyo a las explicaciones –tipo gráfica de rectas, segmentos, rectángulos, triángulos–, o bien, como la mayoría, otras ilustraciones tipo cómic o viñeta, que pretenden mostrar cierto contenido de una forma más agradable para el alumno. Su función no es sólo auxiliar, sino que se utilizan también como estrategia para la resolución de problemas. Otra

novedad es la introducción de los diagramas de árbol y las tablas de contingencia. Fueron los primeros en hacerlo en los textos en lengua castellana. Esto suponía de facto eliminar todos los teoremas sobre la probabilidad compuesta (incluido el teorema de Bayes) y facilitaba un tratamiento práctico a base de ejemplos que no eran triviales. El estudio de la combinatoria se hace sobre cajas y diagramas de árbol, marcando en esto también una línea metodológica nueva, se ilustra el aparato de Galton y con él se justifican las propiedades de los números combinatorios. Innovación en la introducción de fotografías relacionadas con las matemáticas; por ejemplo, el bloque de números comienza con una actividad contextualizada, en la que aparece una fotografía aérea de la ciudad de Valencia.

En los textos de 1º y 2º de bachillerato (BUP) de la editorial Akal se crea un personaje propio denominado “*Plastón*”, a imitación del Platón griego y vestido como él, que es utilizado ampliamente, para introducir conceptos, anécdotas y servir de hilo conductor de la narración. Las ilustraciones son de autor, a color y a diferencia de los textos de última generación, no están hechas por ordenador.

En los textos de Guzmán el lenguaje escrito con el que se dirigen al alumno es directo y próximo, huyendo de frases al uso y estereotipos matemáticos. Se plantean ejercicios para trasladar frases del lenguaje ordinario a lenguaje simbólico. Recogemos aquí el siguiente ejemplo de inecuaciones, que también era novedoso, por el lenguaje que utiliza, por estar formulado en forma de diálogo y por no estar acostumbrados en los textos de matemáticas a que los ejercicios de inecuaciones tuvieran letra (pág. 87, 1º de BUP):

- “Le pregunté a mi padre: ¿Cuánto vale el chocolate con churros en la cafetería de la esquina?*
- No sé, nunca me he fijado.*
 - Pero hombre... lo acabamos de tomar mamá, la abuela, mis dos hermanas, tú y yo. ¿Cuánto has pagado?*
 - Algo más de 700 pesetas.*
 - El domingo pasado además de nosotros seis, invitaste a dos amigos míos. ¿Cuánto pagaste?*
 - Era poco menos de 1000, pues puse un billete y dejé la vuelta.*
 - ¿Cuánto vale el chocolate con churros en la cafetería de la esquina?”*

6.3. Problemas y ejercicios

Los tipos de ejercicios son los siguientes: de introducción y sondeo, de consolidación, problema núcleo, de manipulación (para practicar). Como la

metodología se basa en la resolución de problemas, se plantean problemas abiertos en la introducción de los temas que suponen una investigación para los alumnos. Estos tipos de ejercicios y estas denominaciones eran también novedosas y han prevalecido en los textos de matemáticas actuales. Algunos ejemplos de funciones son: *“llamadas de teléfono y su coste, globo sonda y temperatura, producción española de carbón en miles de Tm, franqueo de cartas, distancia despejada por un vehículo quitanieves, superficie forestal, natalidad y población, catenaria”*. Muchos de ellos aparecen en un contexto, por ejemplo, hay actividades en las que se presentan diferentes conceptos de economía, que comprenden una pequeña introducción a la teoría de la producción. En el bloque del azar hay un cambio metodológico muy importante, representado no sólo por trabajar los conceptos sobre problemas, sino por el tipo y la calidad de estos que estaban alejados de los tradicionales, estaban contextualizados y provenían de diferentes situaciones. Enumeremos, por ejemplo, los tipos de ejercicios que se proponen: *actividades culturales en el instituto, fluidez del tráfico, empleados de banca, torneo de boxeo* (se incluye aquí un diagrama de árbol que no es simétrico, pues el juego finaliza cuando un boxeador gane cuatro partidas; este tipo de ejercicios también eran novedad), *líneas de autobuses, distribución de la población española*. En el bloque de azar hay un total de 137, que son muchísimos.

Reproducimos un ejercicio en el que se refleja que se tratan “otro tipo de problemas” incluidos aquellos de tipo lógico que hacen que se acepte o refute un argumento. En este caso el ejercicio no es sólo de tipo lógico, puesto que la respuesta está basada en un cálculo. También ponemos de manifiesto la profundidad del concepto “aceptar el argumento” o “que resulte una falacia”, que nos conectan con los métodos de razonamiento de la ciencia en general y de la matemática en particular y el lenguaje utilizado: *“Analiza el siguiente argumento: La humanidad ha tenido que crecer a un ritmo superior al uno por mil anual (es decir, por cada mil personas, un aumento anual de una persona), porque si sólo hubiese crecido a ese ritmo sería imposible tener ahora unos 4000 millones de personas. ¿Cómo puedes comprobar si el argumento es válido o es una falacia?”*

En los textos de Akal, en la unidad de la función exponencial se comienza con la introducción del conocido ejemplo de particiones moleculares de bacterias, que dan lugar a una tabla exponencial. La singularidad de esta actividad está, sin embargo, en los datos que del ese proceso aporta, pues no se limita a decir cada cuanto tiempo se produce la bipartición, sino que aporta otros datos. Así, por ejemplo, se dice que *“las bacterias normalmente se reproducen por esciparidad, es decir, una célula madre se divide en dos células hijas”*. A continuación nos habla de la bacteria *“Salmonella typhimurium”* y se nos dice que es *“productora*

de gran número de intoxicaciones alimenticias” y de la cual se sabe que “necesita aproximadamente una hora para que se duplique”. Se introduce en otro apartado de la misma actividad otro nombre de bacteria que es la “Brucella melitensis”, que es la “productora de la fiebre de malta” y “que tarda seis días en crecer al sembrarla en un cultivo”. Por fin se habla de la bacteria “Mycobacterium tuberculosis, bacilo productor de la tuberculosis en el hombre, que tarda unas cuatro horas en duplicarse”.

Sirva como ejemplo de contextualización y aplicabilidad de las matemáticas, en los textos de Guzmán, aquél en el que se trabaja con el modelo que representa la temperatura de un cazo con agua hirviendo en una habitación a 20° en la que se retira el cazo del fuego y que aparece como $T = 20 + \frac{480}{t^2 + 2t + 6}$. Pues bien, en el curso posterior, trabajando con el mismo ejemplo, se dice que la anterior era una fórmula aproximada y que la fórmula real con la que se enfría el agua del cazo es: $T = 20 + 80e^{-0,41t}$. Es decir, la precisión matemática se adecua a los requerimientos del nivel.

6.4. Innovaciones metodológicas y modelo de enseñanza-aprendizaje

El lenguaje simbólico es bastante continuista, se recurre al uso de terminología lógico-conjuntista y no se renuncia a una cierta visión estructuralista, de clara influencia Bourbakista. En el azar, la primera ruptura con respecto a los textos de la época que observamos es el hecho de ordenar los tres temas de manera diferente a como era usual. El orden es: probabilidad, combinatoria, estadística. Lo usual era estudiar combinatoria antes de la probabilidad, pues se suponía que sus procedimientos eran aplicables y facilitaban el cálculo de probabilidades.

En el apartado de estimaciones, se manejan cantidades muy grandes, a las que tampoco nos tenían acostumbrados los textos de matemáticas, tales como: *masa de la Tierra, del Sol, del electrón, de la Luna, edad de la Tierra, periodo de semidestrucción del Uranio 238, tiempo que tarda la luz en llegar desde Sirio a la Tierra, ídem del Sol a la Tierra, intervalo entre dos pulsaciones normales del corazón, tiempo que tarda una partícula elemental rápida en atravesar un núcleo de tamaño medio, distancia de la Tierra a la nebulosa más cercana (Andrómeda), radio de nuestra Galaxia, tamaño del virus de la poliomielitis, radio de un átomo de hidrógeno, radio de un protón*. Hay que tener en cuenta que muchos de los conceptos que aparecen en esa lista suponen un conocimiento, que para los alumnos de hoy en día, están por encima de la media y no suelen ser objeto de su interés.

En el tema de funciones ya se han señalado algunos de los ejemplos que han prevalecido en los textos de matemáticas. Además, en el tema de estudio sistemático de las gráficas, hay varios ejercicios de tipo inverso; es decir, nos dan el dibujo de la gráfica de una función sencilla y nos piden determinar la expresión de la función.

En conjunto, son textos innovadores, que fomentan el aprendizaje por descubrimiento, a través de la metodología de resolución de problemas, con un enfoque integrado de las matemáticas, mediante situaciones contextualizadas de aprendizaje que se resuelven usando el método deliberativo-reflexivo. Representan el inicio de unas matemáticas que surgen de lo cotidiano y son aplicables a diversos tipos de situaciones, habitualmente extraídas del saber científico. Todo el enfoque de los libros es innovador. Se resaltan las situaciones donde la matemática aparece de manera natural, se plantean situaciones reales y cotidianas, se hace uso de la intuición y de la visión gráfica. Con el tratamiento integrador y contextualizado de los temas, se inició un camino que sigue vigente hoy en día.

6.5. *Características generales de los textos de la segunda etapa*

- Presentan una matemática práctica, intuitiva y aplicable. Se parte de situaciones cotidianas o de situaciones extraídas de distintos campos del saber, bien elegidas y contextualizadas, que son el hilo conductor del desarrollo posterior del tema. Tratamiento integrador y contextualizado de los temas.
- No se demuestran, ni enuncian, todas las propiedades y teoremas, sino sólo las que tienen relación con la situación planteada. A veces antes de formalizar una demostración, se sugiere una prueba o camino, o varios, y sólo en última instancia se formaliza.
- El lenguaje simbólico que utilizan, aunque influenciado por la época, es mucho menor que el de los textos tradicionales y es el indispensable para escribir las matemáticas que se presentan. Muchas veces se sustituyen los símbolos por lenguaje ordinario para facilitar la comprensión.
- Lenguaje próximo al alumno que no se encuentra en los textos tradicionales. Pero también se le enfrenta al alumno a nuevos términos, que proceden del planteamiento de una situación que tiene una resolución en términos matemáticos.
- La parte gráfica da un salto fundamental. Ilustraciones a toda página en la introducción de las unidades, retratos de matemáticos, planos de

ciudades, paisajes, elementos cotidianos y sobre todo personajes vivos que le hablan al alumno. Elementos de motivación y lúdicos.

- Ejercicios y problemas menos manipulativos y que muestran más las aplicaciones de las matemáticas tanto en contextos próximos al alumno, como en las ciencias y tecnología. Presencia de problemas más o menos abiertos.
- Son textos de enfoque intuitivo-constructivista, innovadores, basados en un modelo empírico y situados en un contexto internacional de renovación de la enseñanza de la matemática. Proponen un aprendizaje mediante el análisis de casos situacional, el método reflexivo y el heurístico.

7. TEXTOS DE LA ETAPA L.O.G.S.E. (1990-2005)

Cámara M.T., Monteagudo M.F., Paz J. Matemáticas I (1997), Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II (1998). Monteagudo M.F., Paz J. Matemáticas II (2003). Edelvives-Ibaizabal: Zaragoza.

El cambio social experimentado en pocos años, ha hecho que unas pocas y grandes editoriales acaparen la oferta, introduciendo numerosos cambios de ediciones, en los que siempre se incluía algún elemento diferenciador que convertía los textos en un producto más volátil en el tiempo. Los textos son reflejo de los estándares de calidad que demanda una sociedad tecnológica. Además como resultado de las directrices metodológicas y los proyectos curriculares, bastante explícitos en cuanto a la metodología que debe acompañar a los contenidos, los textos suelen contener parecidos epígrafes en cuanto a los aspectos que no son puramente contenido matemático: sección de historia de las matemáticas, de biografías de matemáticos, de juegos, pasatiempos y aspectos lúdicos y de una buena y extensa parte gráfica.

7.1. *Tratamiento Didáctico del Contenido Matemático*

Contenido Matemático

Se desarrollan los programas del currículo oficial mediante un tratamiento clásico, con exposición de conceptos y propiedades y con demostraciones formales. Hay algunos temas nuevos en este nivel como pueden ser la Combinatoria y las

distribuciones estadísticas; por el contrario el estudio de las cónicas se reduce al de la circunferencia. Los textos tratan todos los temas con bastante precisión y desmenuzando los conceptos en propiedades y apartados especializados, que hacen recordar tratamientos de épocas anteriores. Como ejemplo cabe señalar el de la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, que en la pág. 14 del texto de 1º de bachillerato vuelve a parecer con todo detalle, cuando ya hemos comentado que, incluso en los textos de Etayo de la 1ª etapa de la LGE, comenzaba a eludirse la demostración.

Tratamiento Didáctico

Los textos no tienen preámbulo y por lo tanto nada se dice de las intenciones explícitas de los autores. Las unidades didácticas comienzan con una fotografía y un texto relacionado con el tema que sirven de introducción a la unidad y motivación para el estudio del tema. Baste como ejemplo de la formalidad expositiva, la siguiente definición de dominio de una función irracional (1º bachillerato, p. 210):

$$\text{Sea } f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} n & \text{impar} & \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \\ n & \text{par} & \text{Dom}(g) / g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Además se dispone al finalizar las unidades de pruebas de autoevaluación y de Revista matemática. También el tema transversal de Resolución de Problemas se trata al finalizar las unidades de forma fragmentada pero progresiva.

Aplicabilidad de las matemáticas y contextualización

Las aplicaciones de las matemáticas se dejan para los apartados de la revista y para los ejercicios y problemas. No hay en el núcleo de la exposición de contenidos, aplicaciones extramatemáticas.

Historia, motivación y aspectos lúdicos

Es este un aspecto cuidadosamente recogido en los textos, pues disponen de biografías de muchos matemáticos en las que se mencionan algunos de sus descubrimientos, en particular los relacionados con los temas y que van acompañadas de retratos tipo ilustración.

Otros aspectos

Hay lecturas de textos antiguos o de otras culturas, pero relacionados con la matemática. El texto de 2º contiene software matemático mediante el cual se ilustran algunos de los métodos expuestos en las unidades (derive) y algunas direcciones de Internet relacionadas con las matemáticas.

7.2. Lenguaje Gráfico–Simbólico

Lenguaje simbólico

El lenguaje simbólico abarca expresiones de tipo lógico-conjuntista, cuantificadores y lenguaje algebraico asociado a los temas. Se vuelve a la precisión del lenguaje matemático más formal para escribir ciertas propiedades y definiciones. Por ejemplo, en el texto de 1º de bachillerato, pág. 34, se dan las definiciones de intervalo y entorno escritas de forma conjuntista, de la siguiente forma:

$$[r, +\infty) = \{x \in R / x \geq r\} \qquad E^+[a, r) = (a, a + r)$$

De esta forma, se formalizan los conceptos mediante esta escritura compacta y simbólica propia de la matemática superior y, en nuestra opinión, fuera de las tendencias y recomendaciones actuales de utilizar un lenguaje matemático lo más parecido al lenguaje ordinario y con el menor número de símbolos posible; desde luego sustituyendo los cuantificadores lógicos por expresiones del lenguaje escrito.

Lenguaje escrito

El lenguaje escrito que acompaña a los desarrollos teóricos es técnico, escueto y de estilo tradicional. El que acompaña a la revista o a los aspectos motivadores y lúdicos del texto es más próximo al alumno y más cotidiano. Aún así no hay problemas que se destaquen por su redacción en un rico, pausado y descriptivo lenguaje escrito.

Lenguaje gráfico

La función de los gráficos es principalmente auxiliar en la explicación de conceptos y propiedades, pero también sostén de algunos razonamientos, por lo que sirven para apoyar y desarrollar la intuición. Las tablas y los diagramas están

prácticamente limitados a los temas de probabilidades y estadística. Abundan más los recuadros donde se remarcan propiedades y conceptos, con el objetivo de resaltar su importancia y facilitar su memorización. Hay por el contrario muchísimas ilustraciones y fotografías a todo color y algún gráfico elaborado por ordenador. La gama de colores y tonalidades es muy variada y muchas de las fotos que aparecen a página completa son tratadas digitalmente.

7.3. Ejercicios y Problemas

Los problemas están intercalados con las unidades detrás de la parte expositiva y su función es la de practicar con lo aprendido. Se denominan actividades. También los hay al final, muchos y con la misma denominación. Al final de cada unidad hay una sección de denominadas actividades, problemas y cuestiones donde se tratan aspectos más teóricos. No abundan los problemas de aplicación o contextualizados, suelen ser aplicaciones de tipo inmediato y no muy variadas. Hay sin embargo una sección específica para problemas propuestos en pruebas de selectividad.

7.4. Metodología

El tratamiento expositivo de la teoría recuerda épocas lejanas en el tiempo y ya superadas en la etapa anterior. Como innovaciones se pueden considerar la utilización de recursos matemáticos en la red. No hay apertura de nuevas líneas metodológicas, aunque sí se tratan, porque así se recoge en el currículo. También se abordan aspectos colaterales de las matemáticas tratados magníficamente con amplitud de recursos, que entran dentro de los estándares de los textos actuales. Se trata de textos tecnológicos que fomentan un aprendizaje práctico, basado en el método intuitivo. Predomina en el desarrollo del contenido matemático la tendencia estructural y son de enfoque funcional.

7.5. Características generales de los textos de la etapa LOGSE

- Productos que responden a las demandas de la época y de su sociedad. Las unidades didácticas han perdido originalidad ofreciendo un desarrollo estándar de las matemáticas con una exposición de los contenidos más clásica pero sin mucho aparato lógico – deductivo.
- Se ha avanzado en temas de estadística y probabilidad y en la consolidación de las líneas metodológicas innovadoras del periodo anterior.

- Parte gráfica de gran calidad y cantidad, elaborada con tecnología informática.
- En el lenguaje simbólico se ha retrocedido, e incluso se ha vuelto a la utilización del lenguaje simbólico de elevado nivel.
- Ejercicios de muchos tipos y con diferentes denominaciones, pero se ha caído en la monotonía de rellenar las diferentes secciones con ejercicios parecidos que incluso se repiten en diferentes cursos. Se tratan pocas situaciones nuevas.
- Textos tecnológicos provistos de guías didácticas, programación, solucionario, CDs interactivos, recursos en la red y determinados programas de software que ilustran la solución de algunos de los ejercicios.

8. CONCLUSIONES

Los libros de texto de matemáticas, durante la vigencia de la LGE, pueden caracterizarse de la siguiente manera:

- Los libros de la primera etapa de la LGE se llenaron de escritura simbólica y de método deductivo, eran libros del profesor, no del alumno y algunos de ellos muy formalistas. Pronto fueron desapareciendo de los centros para imponerse un tipo de texto más práctico, donde la teoría se reducía al mínimo indispensable y se disponía de una gran colección de problemas que facilitaban el trabajo diario de la clase. Se sustentaban en el modelo conductista y en la Pedagogía por objetivos.
- Ya en la segunda etapa de la LGE, había textos en los que se proponían caminos, se hacían sugerencias, se utilizaban las gráficas para indagar en las demostraciones y se abrían líneas innovadoras. Los textos renovadores utilizaban poco aparato matemático y mucho trabajo matematizante del alumno, con situaciones contextualizadas y extraídas de la ciencia y de la cultura en general; textos acompañados de muchas y muy buenas ilustraciones. Se inspiraban en el modelo constructivista, presentaban situaciones de aprendizaje y la metodología de resolución de problemas tenía un lugar importante en ellos.

La LOGSE supuso una serie de cambios en la estructura del sistema educativo y de los niveles de enseñanza, también en los libros de texto de matemáticas:

- En la etapa LOGSE los textos introdujeron importantes cambios, sobre todo en los recursos tecnológicos utilizados en su elaboración, y en el acompañamiento que se le da a la teoría, a través de elementos gráficos, ilustraciones, historia y aplicabilidad de las matemáticas.
- En los textos del final de la etapa LOGSE, y en los actuales, se tiende al uso de otros recursos ajenos al propio libro y externos, pero cuya utilización se recomienda y facilita en el propio libro de texto (videos, software, recursos en la red).

Por lo que respecta a las continuidades, rupturas e innovaciones que se producen a lo largo de este proceso histórico, en tantos ámbitos de la realidad educativa, los libros de texto de matemáticas son muestra también de estos cambios:

- Lo que ha permanecido es un núcleo temático que recuerda las exposiciones clásicas de los textos de matemáticas, con una sobreutilización del lenguaje simbólico, y no tanto del aparato deductivo. Es decir, textos que han mantenido una estructura parecida en la parte expositiva, renunciando a presentaciones novedosas de los temas.
- Los textos se han adaptado a las características de los alumnos de la segunda enseñanza. Alumnos con poca capacidad de atención, poca comprensión lectora, pero receptores de impacto visual y manipuladores de tecnología electrónica. Se basan en el modelo de racionalidad tecnológica.
- Los textos han evolucionado hacia un modelo tecnológico-pragmático, por lo que el aspecto relacionado con la Resolución de Problemas o el estudio de situaciones no está debidamente recogido en ellos.
- Hacen falta ideas innovadoras que permitan producir textos que no se parezcan tanto entre sí, aunque tal vez este cambio no venga de los propios libros de texto, sino de la realización de unidades didácticas conforme al trabajo por competencias implantado por la LOE; está por verse cómo se readecuarán los textos a esta nueva metodología y los cambios que se producirán a causa de la utilización cada vez mayor de libros de texto digitales.

Como implicaciones didácticas podemos señalar que los dos núcleos principales a los que la evolución ha llevado a los libros de texto de matemáticas, el núcleo expositivo por un lado y la periferia de elementos que se han ido añadiendo en el transcurso de los años (historia, elementos gráficos y lúdicos,

software) por el otro, indican que el peso relativo se va inclinando cada vez más a favor de los segundos, limitando los primeros a exposiciones escuetas de los elementos teóricos fundamentales. Incluso con la irrupción de los libros de texto digitales en los que la interacción libro-alumno es mayor, y con la utilización cada vez mayor de software dinámico en la enseñanza de las matemáticas, podemos prever que se adelgazará todavía más el núcleo expositivo a favor de una enseñanza de la matemática más cercana a los intereses del alumno actual, de la realidad e inmediatez de la sociedad en la que vivimos y en definitiva a caminar por los senderos desbrozados por los textos innovadores y por los autores pioneros de alguno de los periodos analizados, pero abordados con nuevos recursos y enfoques diferentes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Begle, E. (1979). *Critical variables in Mathematics Education: findings from a survey of the empirical literature*. Washington D.C.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Bernard Mainar, J.A. (1979). *Modelo de evaluación de textos escolares*. Barcelona: Teide.
- Blázquez, S.; Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4(3), 219-236.
- Borrás, E.; Carrillo, M.E.; Dopazo, J.; González, M.; Gozálb, D.; Hernán, F.; Salvador, A.; Talens, V. (Grupo Cero) (1977). *Matemáticas de Bachillerato Volumen 1*. Valencia: ICE.
- Borrás, E.; Carrillo, M.E.; Dopazo, J.; González, M.; Gozálb, D.; Hernán, F.; Morata, M.; Puig, L.; Salvador, A.; Talens, V.; Casany, J. (Grupo Cero) (1978). *Matemáticas de Bachillerato Volumen 2*. Valencia: ICE.
- Borrás, E.; Carrillo, M.E.; Casany, J.; Dopazo, J.; García, C.; Gozálb, D.; Hernán, F.; Morata, M.; Puig, L.; Salar, A.; Salvador, A.; Talens, V. (Grupo Cero) (1980). *Estadística*. Valencia: ICE.
- Borrás, E.; Carrillo, M.E.; Dopazo, J.; García, C.; Hernán, F.; Morata, M.; Puig, L.; Salar, A.; Salvador, A.; Talens, V. (Grupo Cero) (1980). *Matemáticas 3º BUP. Geometría y Cónicas*. Valencia: ICE.
- Bruno, A.; Cabrera, N. (2006). La recta numérica en los libros de texto en España. *Educación Matemática* 18(3), 125-149.
- Cámara, M.T., Monteagudo, M.F.; Paz J. (1997). *Matemáticas I*. Zaragoza: Edelvives-Ibaizabal.
- Cámara, M.T., Monteagudo, M.F.; Paz J. (1998). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Zaragoza: Edelvives-Ibaizabal.
- Cobo, B.; Batanero, C. (2004). Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las ciencias* 22(1), 5-18.
- Cockroft, W.H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan: informe de la Comisión de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas bajo la presidencia del Dr. W.H. Cockcroft*. Madrid: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.
- Compostela, B., González, A., González, J.; Laborda, M. (1986). *Matemáticas 1º BUP*. Madrid: Akal.

- Contreras, A.; Ordóñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática* 9(1), 65-84.
- Choppin, A. (1992). *Les manuels scolaires: histoire et actualité*. París: Hachette.
- Escolano, A. (2009). El manual escolar y la cultura profesional de los docentes. *Tendencias Pedagógicas* 14, 169-180.
- Escudero, I. (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias* 23(3), 379-391.
- Espinoza, L.; Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de una función": una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias* 18(3), 355-368.
- Etayo, J., Colera, J.; Ruiz, A. (1976). *Matemáticas 1º*. Madrid: Anaya.
- Etayo, J., Colera, J.; Ruiz, A. (1976). *Matemáticas 2º*. Madrid: Anaya.
- Etayo, J., Colera, J.; Ruiz, A. (1977). *Matemáticas 3º*. Madrid: Anaya.
- Etayo, J., Colera, J.; Ruiz, A. (1978). *Matemáticas de COU*. Madrid: Anaya.
- Fernández, C. (2011). Análisis de temas en los libros de texto de matemáticas. Características de un instrumento para la actividad profesional del profesor de matemáticas. *UNO* 56, 77-85.
- Gairin, J.M.; Escolano, R. (2009). Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional. *Suma* 62, 35-48.
- Gimeno, J. (1988). *El currículo: una reflexión sobre la práctica*. Madrid: Ediciones Morata.
- González, A.; González, J.; Laborda, M. (1987). *Matemáticas 2º BUP*. Madrid: Akal.
- González, A.; González, J.; Laborda, M. (1988). *Matemáticas 3º BUP*. Madrid: Akal.
- González, A. y González, J. (1989). *Matemáticas COU*. Madrid: Akal.
- González, M.T.; Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de Matemáticas. Los puntos críticos en la Enseñanza Secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias* 22(3), 389-408.
- Guzmán, M.; Colera, J.; Salvador, A. (1987a). *Matemáticas Bachillerato 1*. Madrid: Anaya.
- Guzmán, M.; Colera, J.; Salvador, A. (1987b). *Matemáticas Bachillerato 2*. Madrid: Anaya.
- Guzmán, M.; Colera, J.; Salvador, A. (1988). *Matemáticas Bachillerato 3*. Madrid: Anaya.
- Guzmán, M.; Colera, J.; Salvador, A. (1989a). *Matemáticas I COU*. Madrid: Anaya.
- Guzmán, M.; Colera, J.; Salvador, A. (1989b). *Matemáticas II COU*. Madrid: Anaya.
- Hartley, J. (1986). *Designing instructional text*. Londres: Kogan Page.
- Kajander, A.; Miroslav, L. (2009). Mathematics textbooks and their potencial role in supporting misconceptions. *Internacional Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 40(2), 173-181.
- Keitel, C. (1982). Curriculum variables, theory and goals: a comment on Begle's Critical Variables in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics* 13(3), 257-267. DOI: 10.1007/BF00311244
- Lavalle, A.L., Micheli, E. B. y Rubio, N. (2006). Análisis didáctico de regresión y correlación para la Enseñanza Media. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(3), 383-406.
- Maillo, A. (1973). *Enciclopedia de Didáctica Aplicada (I)*. Barcelona: Labor.
- Martínez Bonafé, J. (1992). Siete cuestiones y una propuesta. *Cuadernos de Pedagogía* 203, 8-13.
- Martínez Bonafé, J. (2002). *Políticas del libro de texto escolar*. Madrid: Ediciones Morata.
- Martínez Santos, S. (1987). *El currículo explícito y el currículo oculto en los libros de texto*. Madrid: Librería Pedagógica.

- Martínez, C.; Penalva, M. C. (2006). Proceso de simbolización del concepto de potencia. *Enseñanza de las Ciencias* 24(2), 285-298.
- Monteagudo, M.F.; Paz J. (2003). *Matemáticas II*. Zaragoza: Edelvives-Ibaizabal.
- Monterrubio, M.C.; Ortega, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas. *PNA* 5(3), 105-127.
- Ortega, T. (1996). Modelo de valoración de textos matemáticos. *Números* 28, 4-12.
- Piaget, J.; Choquet, G.; Dieudonné, J.; Thom, R.; Schaaf, W.L.; Stone, M.; Nevanlinna, R.; Freudenthal, H.; Leray, J.; Krygowska, A.Z.; Markusievtch, A.; Glaeser, G.; Godement, R.; Artin, E.; Revuz, A. (1978). *La Enseñanza de las Matemáticas Modernas*. Madrid: Alianza Editorial.
- Prendes Espinosa, M.P. (2001). Evaluación de materiales escolares. *Revista Pixel-bit* 16, 1-20.
- Rico, L. (Editor) (2007). *Bases teóricas del currículo de Matemáticas en Educación Secundaria*. Madrid: Editorial Síntesis S.A.
- Rico, L.; Sierra, M. (1994). Educación matemática en la España del siglo XX. En J. Kilpatrick; L. Rico y M. Sierra, *Educación matemática e investigación* (pp. 99-207). Madrid: Editorial Síntesis S.A.
- Richaudeau, F. (1981). *Concepción y producción de manuales de escolares. Guía práctica*. París: SECAB/CERLAL/Editorial UNESCO.
- Ríos, S. (1973). *Matemáticas Especiales*. Madrid: Paraninfo.
- Ruiz de Gauna, J. (2011). *La Enseñanza de las Matemáticas del Bachillerato, los libros de texto y las pruebas de acceso a la UPV-EHU*. Tesis Doctoral, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, Leioa, España.
- Sánchez, G.; García, M.; Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11(2), 267-296.
- Sierra, M.; González, M. T.; López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 3(1), 71-85.
- Vea Muniesa, F. (1995). *Las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria en España en el siglo XIX*. Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

Autores

Josu Ruiz de Gauna Gorostiza. Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, España. josu.ruizdegaua@ehu.es

Paulí Dávila Balsera. Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, España. pauli.davila@ehu.es

Juan Etxeberria Murgiondo. Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, España. juan.etxeberría@ehu.es

Joxemari Sarasua Fernández. Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, España. joxemari.sarasua@ehu.es