

SIGNIFICADOS PRETENDIDOS Y PERSONALES EN UN PROCESO DE ESTUDIO CON EL LÍMITE FUNCIONAL

INTENDED AND PERSONAL MEANINGS IN A STUDY PROCESS WITH THE FUNCTIONAL LIMIT

RESUMEN

El límite de una función es uno de los conceptos más controvertidos en la educación matemática, al grado tal que su enseñanza y aprendizaje son un auténtico reto para los investigadores. Han sido numerosos los trabajos sobre este objeto matemático, en los cuales se ocupan enfoques como el APOS, la teoría de los obstáculos epistemológicos y la TAD, e incluso se han desarrollado teorías matemáticas a partir de su estudio. En este trabajo, basado en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, se ahonda en los significados pretendido, evaluado y personal de un proceso de estudio sobre el límite de una función. Los resultados indican que, a pesar de que se analizan unas clases intuitivas sobre el límite (es decir, sin que se emplee la definición métrica del ε y δ), son muy numerosos los conflictos semióticos que tienen los estudiantes cuando se interrelacionan con dicho concepto.

PALABRAS CLAVE:

- *Límite de una función*
- *Enseñanza y aprendizaje*
- *Significados institucionales*
- *Significados personales*
- *Conflicto semiótico*

ABSTRACT

The limit of a function is one of the most controversial concepts in mathematics education, to such an extent that its teaching and learning are a real challenge for researchers. Many papers have been prepared in relation to this mathematical object, which focus on areas such as APOS, the theory of epistemological obstacles and the TAD, and mathematical studies have even been developed based on their study. In this paper, based on the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction, we go more in-depth into the intended, assessed and personal meanings of a study process regarding the limit of a function. The results indicate that, despite some intuitive classes being analyzed in relation to the limit (i.e. without using the metric definition of ε and δ), students encounter numerous semiotic conflicts when interrelating with said concept.

KEY WORDS:

- *Limit of a function*
- *Teaching and learning*
- *Institutional meanings*
- *Personal meanings*
- *Semiotic conflict*



RESUMO

O limite de uma função é um dos conceitos mais controversos na educação matemática, a um ponto em que seu ensino e aprendizagem são um desafio para os pesquisadores. Existem muitos estudos sobre este objeto matemático, onde são ocupadas abordagens como a APOS, a teoria dos obstáculos epistemológicos e a TAD, e até mesmo teorias matemáticas foram desenvolvidas a partir de seu estudo. Neste trabalho, baseado na abordagem onto-semiótica da cognição e instrução matemática, investiga o significado de pretendido, avaliado e pessoal de um processo de estudo sobre o limite de uma função. Os resultados indicam que, apesar de são analisadas algumas classes intuitivas sobre o limite (ou seja, sem empregar a definição métrica de ϵ e δ), são muito numerosos os conflitos semióticos dos alunos quando eles interagem com o conceito.

PALAVRAS CHAVE:

- *Limite de uma função*
- *Ensino e aprendizagem*
- *Significados institucionais*
- *Significados pessoais*
- *Conflito semiótico*

RÉSUMÉ

Les limites de fonctions sont un concept de l'éducation mathématique tellement controversé que leur enseignement et leur apprentissage constituent un véritable défi pour les chercheurs. De nombreux travaux sur ce sujet ont été publiés en adoptant des approches diverses : celle de la théorie APOS (Action-Processus-Object-Schéma), celle des obstacles épistémologiques ou celle la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD). D'autres théories mathématiques ont même vu le jour à partir de ce thème. Notre travail, qui se caractérise par une approche onto-sémiotique de la cognition et de l'instruction mathématique, approfondit, quant à lui, les concepts de signifiés visé, évalué et personnel propres à un processus d'étude portant sur les limites de fonctions. Bien que quelques classes intuitives sur ce sujet soient analysées (autrement dit, sans que la définition métrique de ϵ et δ joue un rôle), les résultats obtenus montrent que les conflits sémiotiques chez les étudiants sont très nombreux lorsque ces derniers manient un tel concept.

MOTS CLÉS:

- *Limites de fonctions*
- *Enseignement et apprentissage*
- *Signifiés institutionnels*
- *Signifiés personnels*
- *Conflit sémiotique*

1. INTRODUCCIÓN

Las investigaciones acerca del límite de una función son relativamente frecuentes en la educación matemática, hasta tal punto que el estudio didáctico de este concepto sirvió, en su momento, para desarrollar teorías sobre la enseñanza del Cálculo, como el Advanced Mathematical Thinking (AMT) y la teoría APOS, uno de los enfoques más utilizados en la actualidad.

Artigue (1998) señala la importancia de utilizar enfoques de carácter semiótico en la investigación de la enseñanza del Cálculo para clarificar las dificultades y las restricciones que surgen cuando los alumnos interaccionan con los conceptos de este tema. Con base en ello, consideramos que el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática ofrece un marco conceptual adecuado para investigar en torno al límite funcional.

El trabajo que expondremos a continuación lleva a cabo un análisis de los significados institucionales —tanto el pretendido como el evaluado— y los personales —que se definen en el apartado 4 del marco teórico— correspondientes a una clase sobre el límite funcional, a la que asisten estudiantes del primero del bachillerato español (15 y 16 años), con el objetivo de determinar las configuraciones didácticas y las dificultades en la enseñanza-aprendizaje mediante el estudio de los conflictos semióticos.

La investigación consta de varias secciones: la dos y la tres describen brevemente el problema de investigación y los antecedentes; la cuatro refiere los elementos teóricos del marco conceptual que son necesarios para poder seguir el discurso del artículo; la quinta se ocupa de la metodología de análisis del trabajo; la seis y la siete desarrollan los significados institucionales pretendido y evaluado, mientras que la octava describe y discute los resultados sobre las respuestas de los alumnos. Por último, se extraen las conclusiones pertinentes.

2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En la enseñanza de las matemáticas correspondiente al primer y segundo año del bachillerato español, los conceptos básicos del Análisis Matemático representan un alto porcentaje de los contenidos curriculares (aproximadamente el 40%); sin embargo, en los resultados de las evaluaciones se puede notar un preocupante fracaso académico en muchos alumnos cuando se enfrentan a la comprensión de los conocimientos de esta rama de la matemática. Este fenómeno, unido al hecho de que ambos cursos son verdaderamente preuniversitarios, dota de una gran importancia social a la formación matemática de los alumnos, ya que una comprensión superficial de las nociones del Cálculo Infinitesimal les lleva a una deficiente formación que, posteriormente, redundará en una posible frustración en las aulas universitarias, y muchas veces causará el abandono de los estudios (Fonseca, 2003 y Corica y Otero, 2009).

Dado que el concepto de límite de una función es uno de los más controvertidos del Análisis Matemático en cuanto a su comprensión, ya que está asociado a las ideas de infinito potencial y actual, su enseñanza siempre ha representado una fuente de problemas didácticos que es muy difícil de resolver. Por ello, no extraña que sean numerosos los trabajos de investigación relacionados con su aprendizaje. Incluso se puede apreciar que la profundización acerca de la naturaleza y fundamentación de esta noción, junto a otras del Análisis Matemático, ha sido motor para construir y formalizar algunas de las teorías más conocidas actualmente en la Didáctica de las Matemáticas, como la teoría APOS (Dubinsky, 1996; Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996; Baker, Cooley & Trigueros, 2000). Otro enfoque que ha tenido un gran desarrollo es el enfoque socioepistemológico (Cantoral, Farfán, Lezama & Martínez., 2006).

A partir del enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994; Contreras & Font, 2002; Godino, 2002; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005; Godino, Contreras & Font, 2006), consideramos que las ideas de significado institucional, significado personal y conflicto semiótico pueden aportar elementos clarificadores para poder entender la complejidad del proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción de límite de una función.

Dicho planteamiento nos ha impulsado a realizar este trabajo de investigación, que tiene una naturaleza epistemológica-cognitiva-semiótica-curricular. Su problema de investigación consiste en *el estudio de las causas de naturaleza onto-semiótica sobre las dificultades mostradas por los alumnos respecto al concepto de límite de una función en 1º de bachillerato*. Se trata de un estudio que busca describir, explicar e identificar los factores que condicionan la enseñanza-aprendizaje del límite de una función en un contexto institucional fijado. La investigación completa aparece en la memoria de tesis de García (2008).

El objetivo concreto del trabajo es ahondar en los significados pretendido, evaluado y personal de un proceso de estudio sobre el límite de una función, y trata de mostrar que en las clases intuitivas sobre el límite (donde no se utiliza la definición métrica del ϵ y δ) aparecen numerosos conflictos semióticos en las respuestas de los estudiantes al resolver las tareas. Esto proporciona una valiosa información a los profesores de secundaria que han de abordar el tema del límite funcional en sus aulas, a fin de que elaboren materiales didácticos que ayuden al alumno a superar todos estos conflictos.

El problema que se pretende abordar, al estar íntimamente relacionado con la práctica del profesor en el aula de 1º de bachillerato, tiene una *componente instruccional*. Además, como la enseñanza está dirigida a los estudiantes y nos interesamos por las dificultades de su comprensión, incluye una *componente cognitiva* que se estudia por medio de los significados personales de los alumnos. Al contemplarse el aspecto de tipo institucional subyace también una *componente epistemológica*, la cual forma parte de un trabajo más amplio (García, 2008) que no contempla este artículo. Por último, al tratarse de la noción de límite de una función coexiste una *componente semiótica*, propia del lenguaje del Análisis Matemático, que se plasma a través de las entidades primarias y los conflictos semióticos detectados. En este trabajo nos centraremos fundamentalmente en la componente cognitiva.

Debido a la complejidad del problema didáctico, aparecen una serie de interrogantes más específicos: *¿Cuál es el significado del límite que pretende el profesor poner en práctica en su aula? ¿Qué tipos de conflictos semióticos potenciales, propios de los manuales, pueden mostrarse y qué conflictos semióticos efectivos, propios de los alumnos en las respuestas a las tareas que les proponen, pueden incidir en las actividades de los alumnos con el citado objeto matemático? Más específicamente: ¿Cómo coordinar los aspectos intuitivo-geométricos, inherentes al desarrollo epistemológico-evolutivo del límite, con los numéricos? ¿Son transferibles ciertos procedimientos de cálculo de límites desde el profesor al alumno? ¿Qué influencia pueden tener los conflictos semióticos en las posibles no transferencias de dichos procedimientos?*

3. ANTECEDENTES

Los antecedentes que tendremos en cuenta son de dos tipos. Por una parte, se encuentran los trabajos relacionados con nuestro marco conceptual, que ya describimos en el apartado anterior; por otra, las investigaciones recientes sobre el límite de una función. De manera concreta, describiremos aquellos estudios que tienen que ver directamente con nuestra investigación.

Przenioslo (2004) estudia las imágenes mentales acerca del concepto de límite en 238 estudiantes de tercero, cuarto y quinto curso de estudios matemáticos, y en 182 que comenzaban dichos cursos. Se utilizaron análisis de

tests escritos, se hicieron observaciones sobre las discusiones entre grupos de alumnos y se efectuaron entrevistas. Se identificaron varias clases de imágenes sobre el concepto de límite: aproximación gráfica, aproximación estimada, como valor de la función en un punto y como algoritmo de cálculo. El estudio señala que los alumnos tienen varias categorías sobre las imágenes del límite, las cuales están relacionadas con una enseñanza no formal de esta noción.

Otro antecedente es el trabajo de Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas(2006), donde se cuestiona la conceptualización métrica del límite que formuló Weierstrass, a la que se concibe como muy difícil para la comprensión de los estudiantes, por lo cual se le propone como una alternativa del límite en la aproximación óptima. Como puede observarse, la definición formal del ε y δ es rechazada en los inicios de la enseñanza del límite funcional, y se aboga por otros métodos.

Sobre la concepción que tienen los estudiantes del límite como un proceso infinito potencial, Kidron (2008) recurre a diversos marcos teóricos para afirmar que los estudiantes ven un proceso dinámico en la formación del concepto de límite. Es decir, el paso del infinito potencial al actual es la clave para poder comprender la noción de límite funcional, por lo cual resulta muy importante estudiar el límite de forma preformal con el fin de poder analizar aquellas dificultades que los alumnos encuentran y, de este modo, facilitar que las superen.

Roh (2008, 2010) llevó a cabo un estudio en el que exploró las imágenes creadas por los estudiantes sobre el límite de sucesiones que, según el autor, influyen en su comprensión de sus definiciones. El estudio muestra que la comprensión de las definiciones de límite está estrechamente relacionada con la existencia, o no, de las imágenes previamente construidas de los límites que son compatibles con el concepto matemático. De manera concreta, se suele promover en los estudiantes una imagen mental sobre el movimiento dinámico que implica el límite antes que su comprensión formal rigurosa. Podemos observar de nueva cuenta que la enseñanza intuitiva del límite es previa a su definición formal.

Oehrtman (2009) investigó el razonamiento espontáneo de los estudiantes acerca de las concepciones del límite, apoyándose en una teoría interaccionista del razonamiento metafórico. Se analizaron los resultados de 120 estudiantes y sus descripciones verbales sobre los cambios que han sufrido los diversos conceptos del límite, de lo que resultaron diversas categorías. Una de ellas fue el tratamiento del infinito como un número.

4. MARCO TEÓRICO

A continuación, referiremos los elementos del enfoque ontosemiótico que son necesarios para el desarrollo de nuestro trabajo. Dicha perspectiva de análisis es ampliamente conocida entre la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas; por ejemplo, Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2006, 2010) lo utilizan en dos investigaciones sobre la integral definida, mientras que Font y Contreras (2008) lo ocupan en otra investigación sobre la derivada. Además, se trata de enfoque holístico de numerosas herramientas que se describen posteriormente y clarifican los análisis didácticos.

La primera cuestión que plantea el enfoque ontosemiótico es de tipo ontológico, ya que establece a la práctica como una noción primitiva: “Llamamos práctica a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino & Batanero, 1994, 334). Esta es una noción clave, señala Godino (2002), ya que “como objeto básico para el análisis cognitivo (tanto en su dimensión institucional como personal) proponemos a *los sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problema*” (pág. 242), lo cual permite considerar a los objetos matemáticos como emergentes de dichos sistemas de prácticas y, por tanto, que derivan de ellas. Así, adoptando los presupuestos antropológicos, los objetos matemáticos se conciben como una construcción humana que se va elaborando y enriqueciendo a través de la actividad reflexiva.

Cuando un profesor planifica el proceso de instrucción sobre un objeto matemático para un grupo de estudiantes, comienza por delimitar “lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas”. Acudirá a los textos matemáticos, a las orientaciones curriculares y, en general, a lo que los *expertos* conciben como las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, que se fija en los términos del objetivo instruccional. Asimismo, usará sus conocimientos personales previamente adquiridos. Todo constituye un sistema de prácticas que designamos como *significado institucional de referencia del objeto*.

Se considera al *significado institucional pretendido* como el sistema de prácticas que se planifica para un determinado objeto matemático, el cual se desarrollará en un cierto proceso instruccional. Es decir, el profesor tiene en cuenta el significado institucional de referencia, su propia experiencia,

las restricciones institucionales y los conocimientos previos de los estudiantes para seleccionar y ordenar la parte del significado que va a proponer a los estudiantes.

En el momento de la evaluación, el profesor ha de seleccionar aquellas prácticas y conceptos que considera pertinentes para tratar de evaluar los aprendizajes de sus alumnos. Es decir, habrá de tomar una muestra del *significado institucional implementado* (el sistema de prácticas efectivamente utilizadas en el aula por el docente en un proceso de estudio específico), lo cual se denomina *significado institucional evaluado*.

Una vez que el profesor elabora las pruebas de evaluación se proponen al estudiante, quien muestra un conocimiento que, lógicamente, trata de acercarse al significado institucional implementado. A las prácticas manifestadas por el sujeto se les llama *significado personal declarado*.

Los objetos matemáticos personales, según Godino y Batanero (1994), son “emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas” (Godino & Batanero, 336); por tanto, van cobrando forma en un aprendizaje que motiva la propia práctica. Unido a este término está el *significado personal de un objeto*, que consiste en “el sistema de prácticas personales de una persona para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto en un momento dado” (pág. 343).

La relación entre los signos usados para codificar el conocimiento y los contextos que sirven para establecer su significado ha sido modelizada por Godino (2002), quien esboza un marco teórico que incluye los siguientes tipos de entidades primarias, propias de la actividad matemática:

1. *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos). En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica, pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros, como el oral o el gestual. Mediante el lenguaje, tanto en el ordinario como en el matemático, se describen otros objetos no lingüísticos.
2. *Situaciones* (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios). Son las tareas que inducen la actividad matemática.
3. *Acciones del sujeto ante las tareas matemáticas* (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).
4. *Conceptos*. Son dados mediante definiciones o descripciones (por ejemplo, número, punto, recta, media, función).
5. *Propiedades o atributos de los objetos mencionados*. Suelen darse como enunciados o proposiciones.

6. *Argumentaciones*. Se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).

Estos seis tipos de objetos, que podemos calificar de matemáticos porque se ponen en juego en la actividad matemática, son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales o las teorías.

Una configuración epistémica es una situación problema que, junto a los lenguajes, los conceptos, las proposiciones y procedimientos y los argumentos —llamados objetos primarios en el EOS—, pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuirse entre ambos. Será global si se refiere a la unidad didáctica completa, parcial si alude a una parte de aquella y puntual si es un aspecto muy concreto.

Asimismo, se usará el concepto de *trayectoria epistémica*, que consiste en la distribución temporal de las prácticas, los objetos primarios y procesos que se activan, al igual que la idea de *conflicto semiótico*, que se entiende como “la disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos —personas o instituciones— en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas” (Godino, 2002, 258).

5. ELEMENTOS DE METODOLOGÍA

La investigación que hemos desarrollado aporta diferentes componentes sobre el sistema didáctico: el contenido a enseñar, el libro de texto, el profesor y los alumnos. Además, combina diversas técnicas y enfoques que dependen de la cuestión abordada.

Puesto que el estudio cualitativo se ha realizado con una muestra de tamaño reducido, su carácter es exploratorio y está principalmente orientado a la formulación de hipótesis que deberán ser contrastadas formalmente en nuevas investigaciones.

Se emplearon diversas técnicas de recopilación de datos, acordes con las fases de la investigación. En primer lugar, se construyó una ficha para el análisis epistemológico del manual, mientras que para los estudiantes se usó el cuestionario escrito, con la finalidad de lograr una muestra de máxima representatividad.

La población que fue objeto de estudio se conformó por estudiantes de primer curso del bachillerato en Ciencias de la Naturaleza y la Salud, cuyas edades oscilaron entre 16 y 17 años, que estudiaban en un Instituto de Educación Secundaria (IES) de la provincia de Jaén, España. Optamos por trabajar con este nivel para eliminar la fuerte influencia que, en segundo de bachillerato, tienen los exámenes de acceso a la universidad en las decisiones de los profesores (Contreras et al., 2010). Por otra parte, hemos intentado minimizar la influencia del parámetro *estudiantes*, al elegir a un profesor que trabajaba en un Instituto de Educación Secundaria, donde el reclutamiento de estudiantes no era ni privilegiado ni difícil. La enseñanza del límite de una función se hizo en cuatro sesiones de clase de 45 minutos cada una.

En la investigación se analizaron principalmente las variables cualitativas, como los elementos que integran el significado institucional y personal del límite de una función en primero de bachillerato.

Con respecto al significado institucional pretendido, se estudió mediante el análisis del libro de texto, ya que el profesor siguió fielmente el manual. En primer lugar, se hizo un análisis ontosemiótico de las configuraciones globales del objeto límite de una función, con el fin de poder situar las configuraciones parciales y prepararlas para su estudio.

En cada una de las cuatro configuraciones parciales extraídas se detectaron puntos críticos. Es decir, la investigación se centró en los aspectos del manual que pudieran presentar conflictos semióticos y dificultades de comprensión para el estudiante. Con el propósito de hacer operativo el análisis, el texto se descompuso en unidades de análisis que fueron estudiadas críticamente para extraer las dificultades potenciales de significado.

Los significados personales de los estudiantes que participaron en el estudio se evaluaron por medio de la aplicación de un cuestionario. Para que tuviera la validez de contenido necesaria (Muñiz, 1994), el cuestionario se construyó teniendo en cuenta los datos que aportó el estudio sobre las distintas trayectorias; asimismo, se elaboró una tabla resumen, cuyos ítems correspondieron a los conflictos semióticos detectados.

Antes de aplicar el cuestionario se efectuó un análisis a priori sobre los diferentes ítems, con el fin de determinar con la mayor exactitud posible lo que se indagaba en cada uno de ellos, así como la hipotética trayectoria semiótica que seguía el alumno al resolver cada cuestión.

El análisis de las respuestas que dieron los estudiantes se realizó de acuerdo con una metodología basada en la naturaleza de la actividad matemática, y se incorporó la clasificación de los conflictos semióticos que mostraron los alumnos en las diversas categorías.

6. SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDO

El significado institucional pretendido en nuestra investigación comprende al sistema de prácticas y configuraciones de objetos que se planifican para el límite de una función (objeto matemático), de cara al desarrollo de cierto proceso instruccional. En el caso que nos ocupa, el profesor ha seguido estrictamente el libro de texto, por lo cual se ha considerado pertinente analizar los sistemas de prácticas y configuraciones epistémicas correspondientes a dicho libro.

La configuración epistémica es una herramienta del enfoque ontosemiótico —ya definida en el apartado 4— que permite describir tanto la estructura de textos puntuales (por ejemplo, la anatomía) como de textos globales (por ejemplo, las unidades didácticas). En esta investigación, primero la hemos utilizado para realizar un macroanálisis de la configuración global *cálculo de límites de funciones*, que correspondía a una unidad didáctica del libro de texto ocupado por el profesor. También se usó para obtener configuraciones parciales (por ejemplo, los *límites de funciones en el infinito*) y configuraciones puntuales, tocantes a los *puntos críticos* o centros de interés específicos que explicaban las diversas dificultades que tenían los sujetos a lo largo del proceso de estudio. Por cuestiones de espacio, a continuación comentaremos brevemente la configuración global y las parciales y mostraremos la configuración epistémica de un punto crítico.

6.1. *Análisis ontosemiótico de las configuraciones global y parciales del objeto límite*

El manual estudiado se emplea en el primer curso de bachillerato que ofrece el IES “La Pandera” de Los Villares, y es uno de los más utilizados en Jaén y en su provincia. Como se ha señalado, el profesor de la asignatura utiliza el libro de texto como referencia para impartir sus clases de matemáticas, por lo cual puede decirse que el significado institucional implementado queda bien reflejado en el discurso que plantea el libro de texto.

Así, de la configuración global *cálculo de límites de funciones* se extraen cuatro configuraciones parciales: *límites de funciones en el infinito*, *cálculo de límites de funciones en el infinito*, *límites laterales de una función en un punto* y *límite de una función en un punto*. Enseguida, se estudiará la primera de ellas.

Dicha configuración, que denominaremos CGP1, parte de la representación gráfica de una función racional y estudia su comportamiento intuitivo para

valores de x *muy grandes* (en el libro de texto se dice lo anterior con la expresión *cuando x tiende a $\pm\infty$*), a fin de obtener su límite 1. Luego, a la recta $y=1$ se le denomina *asíntota horizontal*, generalizando para $y=k$. Por último, con base en el hecho de que el límite en el infinito puede ser también infinito, se toma una función racional adecuada y se definen intuitivamente tanto las asíntotas oblicuas como las ramas asíntóticas y parabólicas.

El *punto crítico* de esta configuración corresponde al estudio de la función racional hasta determinar que su límite, cuando x tiende a ∞ , es 1, ya que ahí se encuentran los elementos más interesantes de la actividad matemática, los cuales pueden ayudar a comprender las ausencias y disparidades de significados. Por tanto, de este punto crítico extraemos la configuración puntual que se analizará a continuación.

6.1.1. *Análisis de la configuración puntual correspondiente a la configuración parcial CGP1*

En este *punto crítico*, la práctica del alumno consiste en entender el texto (Bescós & Pena, 2002) que se muestra enseguida:

6.1. Límites de funciones en el infinito

A partir de la representación gráfica de funciones, es posible estudiar cuál es su comportamiento para valores muy grandes, positivos o negativos, de la variable x .

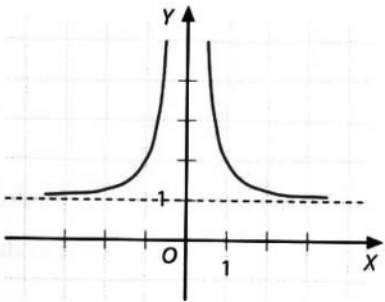
Consideramos, por ejemplo, la función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$. Como se observa en su gráfica (figura 9.6), para valores de x muy grandes, es decir, cuando x tiende a $+\infty$, la función tiende a 1, y lo mismo ocurre para valores de x muy pequeños, es decir, cuando x tiende a $-\infty$. Si la función presenta la misma tendencia en ambos extremos de la gráfica, se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$$

La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$.

La configuración de los objetos que se activa en esta práctica matemática aparece en la Tabla I:

TABLA I
Configuración epistémica

LENGUAJE	
<p><i>Verbal</i></p> <p>Función, representación gráfica, comportamiento, valores grandes y pequeños, tiende, recta, asíntota horizontal</p> <p><i>Gráfico</i></p>  <p>FIGURA 9.6.</p> <p><i>Simbólico:</i></p> $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}, -\infty, +\infty, x, 1, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1, y=1$	
SITUACIONES	CONCEPTOS
<p>- Ejemplo de comportamiento en el infinito</p> <p>(para la función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$)</p>	<p><i>Previos</i></p> <p>- Función, abscisa, ordenada, positivo, negativo, infinito, valor, gráfica, límite, tendencia</p>
	<p><i>Emergentes</i></p> <p>- Comportamiento en el infinito</p> <p>- Asíntota horizontal</p>

PROCEDIMIENTOS	PROPOSICIONES
Observación de la gráfica	<ul style="list-style-type: none"> - A partir de la representación gráfica de funciones, es posible estudiar cuál es el comportamiento para valores muy grandes, positivos o negativos, de la variable x. - La recta $y=1$ es una asíntota horizontal
ARGUMENTOS	
<ul style="list-style-type: none"> - Argumento 1: Ejemplificación - Argumento 2: Observación visual en el ejemplo 	

Esta configuración epistémica puntual se relaciona con las configuraciones del significado de referencia, a las que hemos llamado gráfica e infinitesimal, donde se advierte la ausencia del significado numérico del límite porque falta el uso de tablas de variación; con ello, se deja a cargo del alumno la elaboración implícita de las sucesiones de valores para las variables independiente y dependiente. Es decir, no se usa el significado numérico como un medio para comprender el objeto límite de una función en el infinito. Dicha ausencia puede ser causa de un conflicto semiótico potencial.

7. SIGNIFICADO INSTITUCIONAL EVALUADO

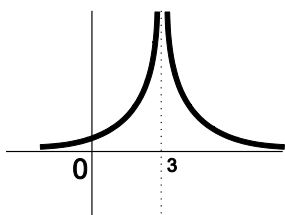
En el significado evaluado se ponen en juego los procesos de evaluación. El profesor selecciona una colección de tareas o cuestiones que incluye en las pruebas de evaluación de los aprendizajes, siendo una muestra representativa del significado que los estudiantes deben haber extraído en la clase. En la elaboración del cuestionario (ver Anexo 1) se han elegido 11 preguntas; cada una tiene pertinencia y validez porque se relaciona con las diversas sesiones de clase observadas. Veamos cómo se han construido algunas de ellas.

Cuestión 1. *¿Qué significa la expresión “ x tiende a $+\infty$ ”? Responde aclarando con ejemplos y detallando tus respuestas.*

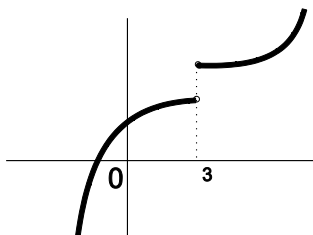
En la primera sesión y en las tres siguientes se repite mucho la idea de la tendencia de x hacia el infinito, aunque no la aclara el profesor, lo cual puede indicar que es un concepto transparente para el alumnado. Debido a que esa transparencia puede no ser pertinente, se considera necesario comenzar el cuestionario interrogando al estudiante sobre qué significa la expresión “ x tiende a $+\infty$ ”, pidiendo que aclare sus respuestas con ejemplos.

Cuestión 4. *Estudia, para cada una de las siguientes gráficas, si existe, o no, $f(3)$, y si existe o no el límite, cuando x tiende a 3 de $f(x)$, especificando el valor de sus límites laterales:*

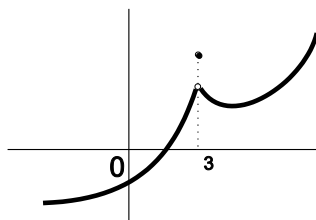
a)



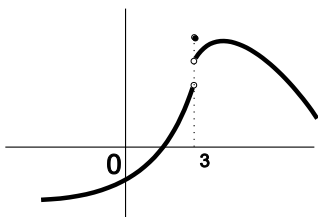
b)



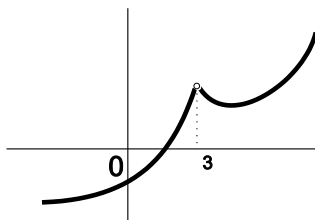
c)



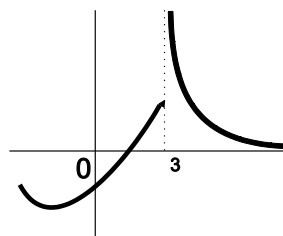
d)



e)



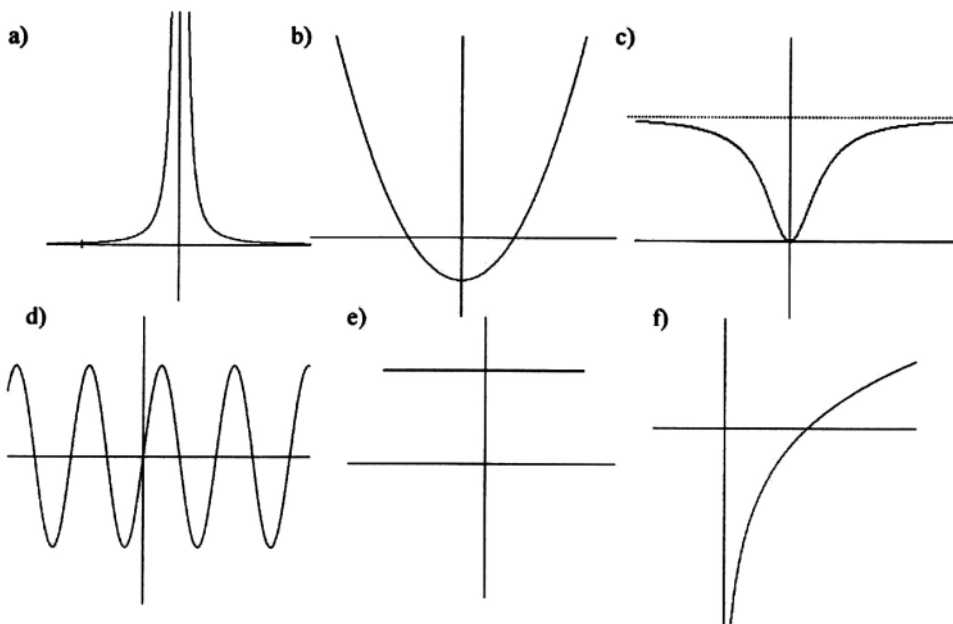
f)



En un momento de la sesión, el profesor otorga valores a la derecha y la izquierda del valor de la variable independiente, donde se calcula el límite, y conduce a los estudiantes a que interpreten los límites laterales de manera intuitiva (los cuales conforman una nueva unidad de análisis); además, estudia la relación entre los límites laterales y el límite de la función con algunos ejemplos gráficos. Esto da origen a la Cuestión 4, donde se pide que el alumno estudie, en seis gráficas de funciones de distinto comportamiento, la relación entre el valor

de una función en un punto –en este caso, $x=3$ – y la existencia de los límites laterales y del límite en dicho punto. La primera presenta una asíntota vertical en $x=3$; la segunda tiene límites laterales distintos en el punto y no definida en el 3; la tercera muestra límites laterales iguales y distintos al valor de $f(3)$; la cuarta ofrece límites laterales distintos y un distinto valor para $f(3)$; la quinta da límites laterales iguales y no definida en el 3, y la sexta indica un límite lateral finito y el otro infinito.

Cuestión 5. *¿Cuáles de las funciones, cuyas representaciones gráficas son las de la figura de abajo, crees que verifican $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$? Explica, uno a uno, los motivos de decisión.*



Dicha cuestión resulta pertinente porque la primera sesión inicia con la idea intuitiva de límite en el infinito, que constituye la unidad de análisis 1. Se inicia con el planteamiento de cuatro gráficas que tienen comportamientos distintos para analizar los límites en el infinito: la primera es estrictamente creciente a $+\infty$, la segunda tiene asíntota horizontal y vertical, la tercera presenta dos asíntotas horizontales y la cuarta muestra una gráfica tipo “parábola”.

Es necesario que el alumno adquiera los significados de los límites de funciones en $+\infty$ y $-\infty$; por ello se plantea la Cuestión 5 del cuestionario: *detectar el límite cuando la variable independiente tiende a más infinito en seis funciones*

dadas por sus gráficas. La primera presenta asíntotas horizontal y vertical, la segunda es del tipo “parábola”, la tercera muestra una asíntota horizontal, la cuarta es periódica (sin límite), la quinta consiste en una función constante y la sexta es creciente, estrictamente hacia más infinito.

El objetivo de esta pregunta es confirmar que lo visto en la clase para algunas funciones pueda generalizarse a otras, ya que en el desarrollo de la sesión parecía que el alumnado tenía dificultad en detectar los comportamientos gráficos para $x \rightarrow +\infty$ de algunas funciones, en especial cuando aparecían asíntotas horizontales.

Cuestión 8. *Observa la tabla de abajo y explica porqué crees que las imágenes conforman una sucesión cuyo límite es 8.*

x	2,90	2,95	2,99	...	3	...	3,01	3,05	3,10
$f(x)$	7,41	7,7025	7,94	...	8	...	8,0601	8,3025	8,61

Al analizar las cuatro clases, se observó que el profesor no utilizó una tabla numérica de variación para introducir el concepto ni el cálculo de límites. Las mencionó y, en algún caso, puso ejemplos de valores próximos a un número para aclarar la idea *tan cerca como se quiera*, pero no llegó a plasmarlas ni a estudiarlas en forma efectiva. Por todo ello, se planteó la Cuestión 8, en la que, tomando valores cercanos al 3, se pretende que el alumno explique *si las imágenes estaban tan cerca de 8 como para deducir que ese era su límite*. Aquí se estaba aplicando el cálculo a límites de sucesiones, cuando el profesor no habló explícitamente de ellas en las cuatro sesiones.

Cuestión 10. *Dibuja una gráfica de una función $f(x)$ que cumpla las siguientes condiciones:*

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad b) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -4 \quad c) \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad e) f(3) = 2 \quad f) \nexists f(-4)$$

En este estudio de límites se potencia el lenguaje gráfico frente al analítico y al numérico, por lo cual se plantea la Cuestión 10, donde se pide a los estudiantes que dibujen una gráfica de función, cumpliendo una serie de condiciones. De manera implícita, la gráfica que deben construir va asociada la posibilidad de que exista o no una asíntota vertical, una asíntota horizontal hacia $+\infty$ (pero no hacia $-\infty$) y dos límites laterales en un punto dado, los cuales sean distintos entre sí

y al valor numérico de la función en dicho punto. El resto de condiciones no son relevantes. Se intenta que el sujeto razone de manera inversa a la usual (que extraiga la información de una función al observar su gráfica); es decir, dada la información sobre la función, que dibuje una gráfica que cumpla todos los requisitos preestablecidos.

Como resultado de un análisis a priori, se exponen a continuación los posibles conflictos semióticos que se pretende detectar en los estudiantes, con base en cada una de las preguntas del cuestionario. En su elaboración se ha respetado el modo en que el manual de uso plantea las cuestiones, pues constituye el significado institucional pretendido.

TABLA II
Cuestionario y posibles conflictos semióticos que se pueden detectar.

CUESTIONARIO	CONFLICTOS SEMIÓTICOS
Cuestión 1: significados personales sobre “ x tiende a $+\infty$ ”.	<ul style="list-style-type: none"> - Posibles conflictos ligados al infinito. - Si x tiende a $+\infty$, la variable dependiente también tiende a $+\infty$.
Cuestión 4: significados personales que relacionen el valor de una función en un punto y su límite en dicho punto a partir de seis gráficas.	<ul style="list-style-type: none"> - El límite de una función en un punto coincide con el valor de la función en dicho punto, o recíprocamente. - La existencia de un límite lateral es suficiente para la existencia del límite.
Cuestión 5: saber identificar, entre una colección de seis gráficas de funciones, aquellas que verifican que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.	<ul style="list-style-type: none"> - Si x tiende a $+\infty$, entonces $f(x)$ también. - No reconocer el papel de una asíntota horizontal por el conflicto anterior. - No reconocer el límite en el caso de la función constante.
Cuestión 8: significados personales respecto al límite de una función representado en una tabla de valores.	<ul style="list-style-type: none"> - Justificar que el límite es 8 porque lo es uno de sus límites laterales. - Confundir la sucesión numérica de $f(x)$ con la de x. - Justificar que el límite es 8 porque es el valor de la función para $x=3$. - Los puntos suspensivos de la tabla indican que no puede saberse cuál es el límite.

Cuestión 10: significados personales acerca del dibujo de la gráfica de una función bajo un conjunto de condiciones expresadas en lenguaje analítico.	<ul style="list-style-type: none"> - Sostener que hay datos incompatibles, dado que el valor de la función en $x=3$ no coincide con el valor de los límites laterales en ese punto (apartados b, c y e). - Argumentar la falsedad del apartado a), ya que si x tiende a infinito la función también.
---	--

En el siguiente apartado, que contiene los resultados de las respuestas que dieron los estudiantes al cuestionario, se irán detectando diversos conflictos semióticos. Muchos de ellos coincidirán con los que aparecen en la Tabla II.

8. SIGNIFICADOS PERSONALES

En este apartado se muestran los significados personales declarados por los estudiantes, los cuales se extrajeron de las respuestas a una prueba de evaluación que se aplicó a los 17 alumnos que tomaron parte en el proceso de instrucción, quienes constituían la clase de primero de bachillerato en Ciencias de la Salud.

El análisis de las respuestas se hizo teniendo en cuenta las entidades primarias (lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, propiedades y argumentaciones), ya descritas en el apartado 4, que se ponen en juego según el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática. En este trabajo se describen los distintos conflictos semióticos que se detectaron en los alumnos, aunque sólo se explican los resultados de algunas cuestiones.

Resultados de la Cuestión 1.

Los diversos conflictos semióticos que se identificaron en los estudiantes, se han codificado de la forma siguiente:

Conflictos semióticos argumentales:

CSA-1.1: Si x tiende a $+\infty$ implica que y es cada vez mayor.

CSA-1.2: Si x tiende a $+\infty$ implica que $f(x)$ tiende a $+\infty$.

CSA-1.3: Si x tiende a $+\infty$ implica que $f(x)$ es creciente.

CSA-1.4: Si x tiende a $+\infty$ implica que la gráfica de $f(x)$ se acerca a OX.

Conflictos semióticos conceptuales:

CSC-1.1: Considera ∞ como un número.

CSC-1.2: Identifica el límite con un cálculo algebraico.

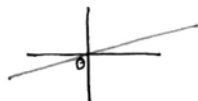
CSC-1.3: Identifica y con los valores de x .

Algunos ejemplos de conflictos semióticos son los siguientes:

El alumno 4 da la siguiente respuesta:

1.) Conforme vamos dándole a la x valores más grandes la función se nos acerca indefinidamente al $+\infty$.

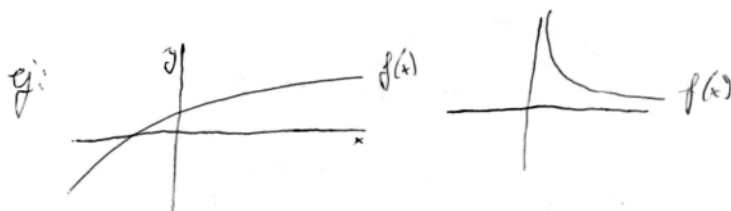
Ejemplo:



Como se observa, el estudiante asocia el crecimiento indefinido de x al crecimiento de la función hacia más infinito, y lo corrobora mediante una gráfica. Aquí se detecta el conflicto semiótico CSA-1.2: si x tiende a más infinito, entonces $f(x)$ tiende a más infinito.

Existen casos donde aparecen incongruencias, incluso al expresar que la función se acerca a más infinito, como sucede con el alumno 11:

1.) x tiendo a $+\infty$ quiero ~~decir~~ decir que a el
efe x de una gráfica la función (f) se acerca
a $+\infty$



Se aprecia cómo este alumno, en la primera gráfica, vuelve a incurrir en el conflicto semiótico CSA-1.2, mientras que en la segunda gráfica muestra el conflicto CSC-1.3: identificar y con los valores de x , y el CSA-1.4: si x tiende a más infinito, entonces la gráfica de $f(x)$ se acerca al eje OX.

Resultados de la Cuestión 4.

Los diversos conflictos semióticos que se distinguieron en los estudiantes fueron codificados de la forma siguiente:

Conflictos semióticos argumentales:

CSA-4.1: Si una función no está definida en un punto no puede tener límite.

CSA-4.2: No considerar el infinito potencial.

Conflictos semióticos conceptuales:

CSC-4.1: Interpretación incorrecta del límite al confundir los valores de y por x .

CSC-4.2: No reconocer el valor de los límites laterales.

Conflictos semióticos procedimentales:

CSP-4.1: No saber calcular límites laterales por no saber traducir del lenguaje gráfico al analítico.

CSP-4.2: Obliga a que el límite en el punto sea igual al valor de la función en el punto.

A continuación, se explican algunos de los conflictos semióticos mostrados por los estudiantes.

Un ejemplo interesante corresponde al alumno 1, quien utiliza exclusivamente el lenguaje analítico y realiza todas las acciones dentro de dicho lenguaje, como puede observarse a continuación:

$$4.) \textcircled{a} f(3) = \cancel{3} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = - \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \boxed{+\infty}$$

$$\textcircled{b} f(3) = 5 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = - \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2'9 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \cancel{3}$$

$$\textcircled{c} f(3) = 5 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = - \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \boxed{3}$$

$$\textcircled{d} f(3) = 5 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = - \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \boxed{3}$$

$$\textcircled{e} f(3) = \cancel{3} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2'9 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3'01 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \cancel{3}$$

$$\textcircled{f} f(3) = 2 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3'01 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \cancel{3}$$

Los apartados b), d) y f) muestran el conflicto semiótico conceptual CSC-4.1: interpretación incorrecta del límite al confundir los valores de y por x ; el apartado e) indica el conflicto semiótico argumental CSA-4.1: si una función no está definida en un punto, no puede tener límite; por último, el apartado f) presenta el conflicto CSA-4.2: no considerar el infinito potencial.

Otro caso es el del alumno 4, quien ocupa de manera alternada el lenguaje natural y el analítico, como se muestra a continuación:

$$4.) \quad \begin{array}{ll} \text{a) no tiene } g(3) & \text{b) } g(3) \text{ no da valores al eje y pero} \\ & \text{podría ser el } 4 = g(3). \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} +\infty$$

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^+} \left. \begin{array}{l} \text{no da valores al eje y pero} \\ \text{podría ser el } 3 \end{array} \right\} \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \left. \begin{array}{l} \text{no da valores al eje y pero} \\ \text{podría ser el } 3. \end{array} \right\} \end{array}$$

c) $g(3) =$ podría ser el 4 o el 5
porque ~~aunque~~ no lo indica el eje y.

$\lim_{x \rightarrow 3^+}$ podría ser el 3
aunque no lo indica el eje y

$\lim_{x \rightarrow 3^-}$ podría ser el 3
aunque no lo indica el eje y

d) $g(3) =$ podría ser el 5 o 6
porque no lo indica el eje y.

$\lim_{x \rightarrow 3^+}$ podría ser el ~~3~~ 4
aunque no lo indica el eje y.

$\lim_{x \rightarrow 3^-}$ podría ser el ~~3~~ 3
aunque no lo indica el eje y.

e) $g(3) = 3$ aunque no lo indica
el eje y

$\lim_{x \rightarrow 3^+}$ es el mismo que $g(3)$

$\lim_{x \rightarrow 3^-}$ es el mismo que $g(3)$

f) $g(3) = 3$ aunque lo indica el eje y.

$\lim_{x \rightarrow 3^+}$ No tiene

$\lim_{x \rightarrow 3^-}$ parece ser el 3 aunque no
lo indica el eje y.

Aquí se nota el conflicto semiótico conceptual CSC-4.1, ya definido en el alumno anterior, y el conflicto semiótico conceptual CSC-4.2: no reconocer el valor de los límites laterales.

Resultados de la Cuestión 5

Los conflictos semióticos que mostraron los estudiantes se han clasificado de la forma siguiente:

Conflicto semiótico argumental:

CSA-5.1: Si $x \rightarrow +\infty$, entonces $f(x) \rightarrow +\infty$

Conflictos semióticos conceptuales:

CSC-5.1: Identificar valores de y con los de x

CSC-5.1': Confundir $y=3$ con $x=3$.

CSC-5.2: Calcula el límite cuando $x \rightarrow -\infty$ de forma incorrecta, y justifica que al ser los límites laterales distintos no hay límite y, por tanto, no se verifica la cuestión.

CSC-5.3: Confunde la gráfica de la función con la asíntota en el apartado c).

Algunos conflictos semióticos que se detectaron en los alumnos fueron:

Para el caso del alumno 4, se observa que utiliza en todos los apartados los lenguajes analítico y natural, pasando del primero al segundo:

59)

a) ~~Para~~ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$: si, porque conforme le damos valores a la x cada vez mayores se acerca al $+\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$: si, porque ~~esta~~ ~~función~~ es una parábola con una rama derecha que va hacia el $+\infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$: si, porque parece haber una asíntota horizontal y acercarse la función sin llegar a tocarla, tiraría indefinidamente al $+\infty$.

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$: si, porque es periódica, esta función se ~~aproximaría~~ indefinidamente al $+\infty$.

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$: si, porque es una constante.

f) ~~Para~~ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$: si, porque crece indefinidamente hacia la derecha.

En los apartados a), c), d) y e) aparece el conflicto semiótico conceptual CSC-5.1: identificar valores de y con los de x . Asimismo, se observa el conflicto semiótico proposicional CSA-5.1: si x tiende a más infinito, entonces $f(x)$ tiende a más infinito.

Por su parte, el estudiante 9 no contesta algunos incisos como requiere la pregunta que se le plantea; sin embargo, responde con datos que no se le piden:

51

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \varnothing$. Las ramas se acercan a la asíntota vertical sin llegar a tomar esos valores de x .

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ porque la función crece indefinidamente hacia $+\infty$.

c) función simétrica respecto $(0,0)$

- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ porque la función se prolonga hacia $+\infty$
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ porque la función se prolonga hacia $+\infty$
- f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ porque la función se prolonga hacia $+\infty$

Aquí se detecta el conflicto semiótico conceptual CSC-5.1, ya descrito anteriormente.

Resultados de la Cuestión 8.

Los diversos conflictos semióticos detectados en los estudiantes se han catalogado de la forma siguiente:

Conflictos semióticos argumentales:

- CSA-8.1: Si en la tabla aparecen puntos suspensivos para $f(x)$, entonces no puede saberse cuál es su límite.
- CSA-8.2: El hecho de dos sucesiones que se acercan al 8 implica una gráfica simétrica.
- CSA-8.3: Si existe uno de los límites laterales, es suficiente para la existencia del límite.
- CSA-8.4: El hecho de que la función sea creciente implica que no puede saberse el límite.

Conflictos semióticos conceptuales:

- CSC-8.1: Asignar a la variable x los valores de la variable y (el alumno escribe $x \rightarrow 8^-$; $x \rightarrow 8^+$).
- CSC-8.2: Creencia de que el límite no es alcanzable.
- CSC-8.3: Aceptar como límite en un punto el valor de su imagen, sin tomar en cuenta los límites laterales.

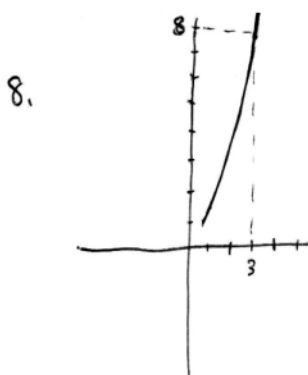
A continuación, se describen algunos de los conflictos semióticos identificados en los alumnos:

En el alumno 1 puede observarse que sólo utiliza el lenguaje natural, y las acciones están dentro de este lenguaje:

8.-) Las reglas transforman una sucesión cuyo límite es 8 porque $f(x)$ se acerca infinitamente a 8 sin llegar a tocarlo y $f(x)$ se acerca infinitamente a 8 sin llegar a tocarlo.

La respuesta indica la presencia de los conflictos semióticos conceptuales CSC-8.1: asignar a la variable x los valores de la variable y (el alumno escribe $x \rightarrow 8^-$; $x \rightarrow 8^+$), y el CSC-8.2: creencia de que el límite no es alcanzable.

El último ejemplo corresponde al alumno 14, quien moviliza los lenguajes gráfico y natural, y realiza las acciones del primero al segundo, como se nota en su respuesta:



Es debido a que la rama de la grafica está en crecimiento. "Es creciente".

Este alumno presenta el conflicto semiótico conceptual CSC-8.3: aceptar como límite en un punto el valor de su imagen, sin tomar en cuenta los límites laterales.

Se incluye a continuación la Tabla III, donde aparece el porcentaje de respuestas correctas por cuestiones, junto con los porcentajes de los tipos de conflictos semióticos ya descritos.

TABLA III
Porcentaje de respuestas correctas por cuestión, con indicación de los tipos de conflictos semióticos.

CUESTIÓN	CORRECTA	C.S. CONCEPTUAL	C.S. ARGUMENTAL	C.S. PROCEDIMENTAL
1	23.53	29.41	76.47	-
4	81.37	7.84	1.96	4.90
5	83.33	11.76	0.98	-
8	52.94	17.65	23.53	-

La ausencia del registro numérico en este tipo de cuestiones propicia que los estudiantes incurran en conflictos semióticos como los descritos, ya que en el significado institucional implementado se utilizó dicho registro de manera escasa.

Ahora bien, las dos cuestiones que muestran un porcentaje más alto de respuestas correctas son la 4 y la 5, que corresponden a interpretaciones de funciones dadas por su gráfica y sus límites, lo cual es congruente con el significado institucional implementado, ya que incide fundamentalmente en tales aspectos. No obstante, los alumnos también revelan conflictos semióticos; por ejemplo, confunden las dos variables o no interpretan correctamente el valor de los límites laterales.

9. CONCLUSIONES

El estudio que expusimos en este artículo forma parte del trabajo de tesis de García (2008), y corresponde a un proceso de estudio sobre la noción de límite de una función en el que no se estudia el significado métrico-analítico, sino un significado intuitivo que, prescindiendo de ε y δ , centra su atención en los aspectos geométricos, infinitesimales y numéricos de dicho objeto matemático.

Por tanto, en respuesta a la primera pregunta de investigación, *¿cuál es el significado del límite que pretende el profesor poner en práctica en el aula?*, el docente pone en práctica el *significado gráfico*, el cual está asociado a la idea de que se responda el concepto límite de una función con motivos gráficos. En segundo lugar, aplica el *significado infinitesimal*, que corresponde a la idea de una aproximación intuitiva numérica, donde se obtiene el límite al sustituir la variable

x por el valor al que tiende dicha variable. Por último, realiza el *significado numérico*, que se asocia a la justificación tabular, incluso implícita, del límite. Aquí se responde la tercera pregunta, *¿cómo coordinar los aspectos intuitivo-geométricos, inherentes al desarrollo epistemológico-evolutivo del límite, con los numéricos?*, ya que se trata de que el profesor profundice en el significado numérico; por ejemplo, que ocupe una calculadora o lo ligue continuamente al *significado gráfico*.

En principio, podría pensarse que, dado que se prescinde en la clase de la métrica del límite, no serían demasiadas las dificultades que se presentarían al momento de la evaluación de resultados. Sin embargo, como se muestra a lo largo del trabajo, son numerosos los conflictos de significado que aparecen en las respuestas de los estudiantes, lo cual indica que el concepto de límite de una función está dotado de un fuerte complejidad ontosemiótica y, por tanto, se encuentra lejos de que sea un objeto matemático transparente para los alumnos. Por estas razones se empleó el marco conceptual del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (Godino, 2002), ya que permite relacionar los elementos semióticos con los ontológicos e instruccionales.

En respuesta al segundo interrogante del problema de investigación, *¿qué tipo de conflictos semióticos potenciales pueden mostrar los manuales y qué tipo de conflictos semióticos efectivos pueden incidir en las actividades de los alumnos con el citado objeto matemático?*, por una parte, como se indica en el apartado 6, la ausencia del significado numérico en el manual de referencia provoca un conflicto semiótico potencial. Además, como indica la Tabla II, son numerosos los conflictos semióticos que presentan los alumnos en sus respuestas a las tareas propuestas.

Para responder a las dos últimas interrogantes del problema de investigación: *¿son transferibles ciertos procedimientos de cálculo de límites del profesor al alumno?* y *¿qué influencia pueden tener los conflictos semióticos en las posibles no transferencias de dichos procedimientos?*, tendremos en cuenta que la proliferación de conflictos semióticos, incluidos en la Tabla II del apartado 7, nos indica que en algunos casos resulta difícil que se dé tal transferencia, ya que los conflictos semióticos son los responsables de su posible ausencia.

Aunque en el estudio completo se analizaron los significados de referencia del límite, así como el significado implementado, este trabajo se ha centrado en el significado pretendido, que se estudió por medio del manual usado por el profesor, y en los significados personales de los alumnos participantes en la investigación, que fueron analizados mediante un cuestionario que se elaboró a partir de los resultados de las sesiones de clase observadas.

Ahora bien, para realizar el análisis ontosemiótico del significado pretendido se utilizó la idea de *configuración epistémica*, puesto que este constructo permite visualizar los elementos de la actividad matemática relacionados entre sí. Se desarrollaron dos tipos de análisis. El primero, de índole macro, abarcó la configuración global y las configuraciones parciales correspondientes al objeto límite de una función, el cual facilitó la extracción de los puntos críticos o *centros de interés específicos explicativos* sobre las diversas dificultades que presentaron los sujetos a lo largo del proceso de estudio. El segundo, de carácter micro, se centró en las configuraciones puntuales de los puntos críticos detectados, con el objetivo de poder hacer explícitas sus entidades primarias y los conflictos semióticos potenciales implicados.

En el análisis sobre los significados personales de los estudiantes se utilizó un cuestionario de once ítems, que se hizo a partir de los resultados de las sesiones de clase observadas. Dicho instrumento propuso cuestiones que permitieron observar el afloramiento de numerosos conflictos semióticos en los alumnos. Para una mayor clarificación, los clasificamos en *argumentales*, *conceptuales* y *procedimentales*, apoyándonos en los puntos de si respondían a argumentaciones falsas de los alumnos, a la aplicación incorrecta de conceptos o al desarrollo erróneo de procedimientos.

Aunque, por razones de espacio, tuvimos que centrarnos solamente en cuatro de las once cuestiones planteadas a los alumnos, parece conveniente citar aquellos conflictos semióticos más frecuentes en las respuestas al cuestionario completo. Por ejemplo, *identificar y con los valores de x* se presenta 47 veces; *una función crece indefinidamente cuando ésta tiene a más infinito* se ha detectado 10 veces; *relaciona los ideas de aproximaciones y los límites laterales con la existencia de asíntotas verticales* se muestra 19 veces; *el límite en un punto es el valor de la función en ese punto* se repite 39 veces. Sin embargo, el conflicto *considerar al infinito como un número*, que es una concepción detectada por Oehrtman (2009), sólo apareció dos veces en nuestra investigación.

Por tanto, la forma intuitiva del límite que prescinde de la definición métrica provoca un conjunto de dificultades para el alumno, que debemos considerar en nuestras clases. Además, dado que las sesiones han correspondido a unas clases efectivamente impartidas en un centro tipo de la provincia de Jaén, España, y aunque habría que hacer más aplicaciones del estudio para poder generalizar algunas consecuencias, cabe inferir que los resultados de este trabajo puedan ser tomados en cuenta por los profesores que se enfrenten al concepto elemental del límite de una función.

Nuestra conclusión es que el modelo de análisis didáctico que empleamos en este artículo resulta útil para investigar la práctica de los profesores de matemáticas. De acuerdo con los seminarios de formación que se imparten a los docentes de secundaria, también es interesante para aquel profesorado que quiera reflexionar sobre su propia práctica.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado en el marco del Proyecto I+D+i EDU2009-08120, del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'Analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18 (2), 231-262.
- Asiala, M., Brown, A., De Vries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In Jim Kaput, Alan H. Schoenfeld & Ed Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II* (pp. 1-32). Washington, D.C: Mathematical Association of America.
- Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education* 31 (5), 557-578.
- Bescós, E. y Pena, Z. (2002). *Matemáticas 1º Bachillerato. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Tecnología*. Proyecto Exedra. Editorial Oxford Educación.
- Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización del límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9 (2), 189-209..
- Cantoral, R. Farfán, R.M., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9 (4), 83-102.
- Contreras, A. y Font, V. (2002). ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica? *XVIII Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*. Castellón (Boletín 14), 1-21.
- Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25 (2), 151-186.
- Contreras, A. y Ordóñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(1), 65-84.

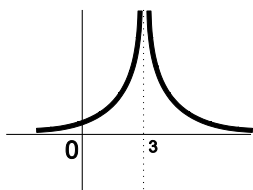
- Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M.R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, 28 (3), 367-384.
- Corica, A.R. y Otero, M.R. (2009). Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de estudiantes en el momento de la evaluación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 12 (3), 305-331.
- Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática* 8 (3), 25-41.
- Fonseca, C. (2003). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Tesis doctoral no publicada,. Universidad de Vigo, España.
- Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 69 (1), 33-52. doi: 10.1007/s10649-008-9123-7
- García, M. (2008). *Significados institucionales y personales del límite de una función en el proceso de instrucción de una clase de primero de bachillerato*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Jaén, España.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14 (3), 325-355.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22 (2/3), 237-284.
- Godino, J. D.; Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico - semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 26 (1), 39-88.
- Muñiz, J. (1994). *Teoría clásica de los test*. Madrid: Pirámide.
- Kidron (2008). Abstraction and consolidation of the limit precept by means instrumented schemes: the complementary rule of three different frameworks. *Educational Studies in Mathematics* 69 (3), 197-216.
- Oehrtman, M. (2009). Collapsing dimensions, physical limitation, and other student metaphors for limit concepts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40 (4), 396-426.
- Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics* 55 (1-3), 103-132.
- Roh, K. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics* 69 (3), 217-233.
- Roh, K. (2010). An empirical study of students' understanding of a logical structure in the definition of limit via the epsilon-strip activity. *Educational Studies in Mathematics* 73 (3), 263-279.

ANEXO

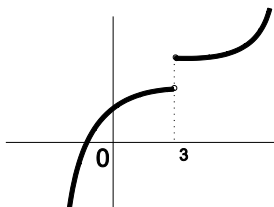
CUESTIONARIO SOBRE EL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

- 1) ¿Qué significa la expresión “ x tiende a $+\infty$ ”? Responde aclarando con ejemplos y detallando tus respuestas.
- 2) ¿Qué entiendes por la expresión “una función crece indefinidamente”? Responde aclarando con ejemplos y detallando tus respuestas.
- 3) ¿Qué entiendes por la expresión “ x se aproxima a 3”? Responde aclarando con ejemplos y detallando tus respuestas.
- 4) Estudia, para cada una de las siguientes gráficas, si existe o no $f(3)$; y si existe o no el límite cuando x tiende a 3 de $f(x)$, especificando el valor de sus límites laterales:

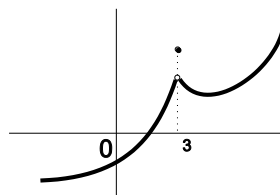
a)



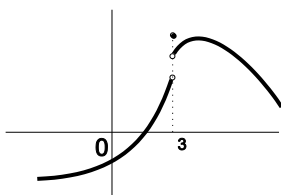
b)



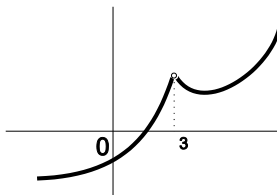
c)



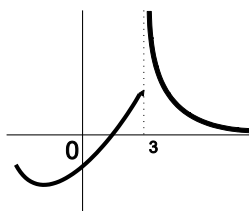
d)



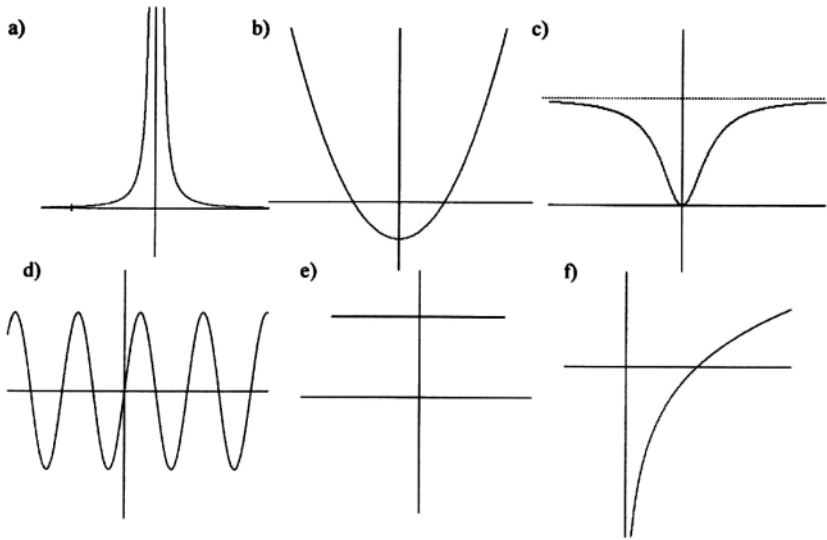
e)



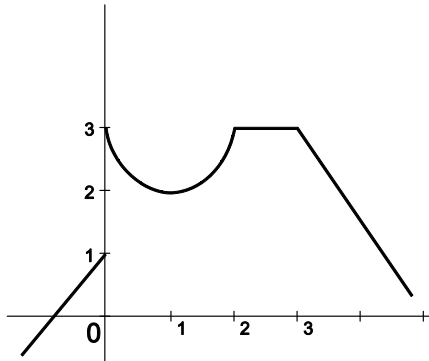
f)



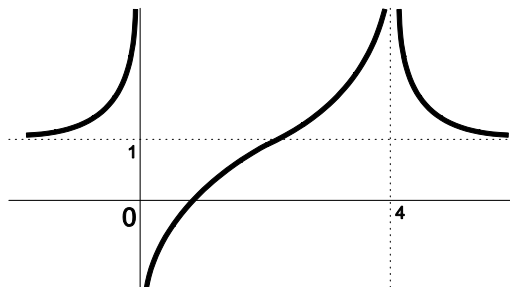
- 5) ¿Cuáles de las funciones, cuyas representaciones gráficas son las de la figura de abajo, crees que verifican $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$? Explica, uno a uno, los motivos de decisión.



- 6) Hallar los límites en los puntos $x=0$; $x=2$ y $x=3$ para la función cuya gráfica es:



- 7) Hallar los límites para $-\infty$; 0 ; 4 y $+\infty$ para la función, cuya gráfica es:



- 8) Observa la tabla de abajo y explica porqué crees que “las imágenes conforman una sucesión cuyo límite es 8”.

x	2,90	2,95	2,99	...	3	...	3,01	3,05	3,10
f(x)	7,41	7,7025	7,94	...	8	...	8,0601	8,3025	8,61

- 9) Calcula $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)$ y justifica cómo lo has hecho.
- 10) Dibuja una gráfica de una función $f(x)$ que cumpla las siguientes condiciones.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad b) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -4 \quad c) \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad e) f(3) = 2 \quad f) \exists f(-4)$$

- 11) Fíjate en las tablas siguientes y razona si existe o no, y porqué el límite cuando x tiende a 1.

x	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1
f(x)	3	3	3	...	0	...	0,001	0,01	0,1

x	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1
f(x)	-0,1	-0,10	-0,001	...	—	...	0,001	0,01	0,1

x	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1
f(x)	1,9	1,99	1,999	...	4	...	2,001	2,01	2,1

x	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1
f(x)	1,9	1,99	1,999	...	—	...	0,001	0,01	0,1

Autores:

Ángel Contreras de la Fuente. Universidad de Jaén, España. afuente@ujaen.es

Manuel García Armenteros. Universidad de Jaén, España. mgarmen@ujaen.es