Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Directora Fundadora: ROSA MARIA FARFÁN

Director Editorial: RICARDO CANTORAL
Departamento de Matemática Educativa
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN
Av. Instituto Politécnico Nacional No. 2508
CP 07360, San Pedro Zacatenco, Ciudad de México DF
M É X I C O
E-mail: rcantor@cinvestav.mx

Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática, Clame AC. Consejo Directivo: *Presidente:* Gustavo Martínez (presidencia@clame.org.mx) – México; *Secretario:* Germán Beitía (secretario@clame.org.mx) – Panamá; *Tesorero:* Joaquín Padovani (tesorero@clame.org.mx) – Puerto Rico; *Vocal Norteamérica:* Gisela Montiel (vocal_norteamerica@clame.org.mx) - México; *Vocal Caribe:* Juan Raúl Delgado (vocal_caribe@clame.org.mx) – Cuba; *Vocal Sudamérica:* Cecilia Crespo (vocal_sudamerica@clame.org.mx) – Argentina.

Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Vol. 10, Núm. 3, noviembre, 2007. Tiraje 2000 ejemplares.
Las solicitudes de suscripciones deberán enviarse a la dirección electrónica: suscripcion-relime@clame.org.mx.
Para cualquier contribución o mayor información, favor de enviarla a la dirección electrónica: relime@clame.org.mx, o consulte la página http://www.clame.org.mx. Relime está disponible en los siguientes índices: Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica: http://www.conacyt.mx/dac/revistas/revistas_catalogo2004.html; Índice de Revistas Latinoamericanas en Ciencia (Periódica): http://www.dgbiblio.unam.mx/periodica.html;
Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal (Latindex): http://www.latindex.unam.mx/; Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (Iresie): http://www.unam.mx/cesu/iresie/; Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe (RedALyC): http://www.redalyc.com/; EBSCO Information Services: http://www.ebsco.com/home/; IBZ – International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences: http://www.gale.com/; ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik: http://www.fizkarlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdmp1.html

2007 Impreso en México

Volumen 10 – Número 3 – 2007

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ISSN 1665 – 2436.

Edición CLAME – México, RFC CMM 040505 IC7.
Impreso en México

2007

Volumen 10 Número 3 Noviembre de 2007

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

EDITORIAL

ARTÍCULOS

La *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* es una publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre.
Programa de publicación 2007: Volúmenes 10 (1 – 3), tres números. Tiraje 2000 ejemplares.

EDITORIAL

¿PUBLICAR O PERECER, O PUBLICAR Y PERECER?

PUBLISH OR PERISH, OR PUBLISH AND PERISH?

RICARDO CANTORAL

En la década de los años setentas del siglo XX, las políticas universitarias latinoamericanas no planteaban a sus profesores la necesidad de la publicación como requisito de permanencia, reconocimiento o promoción. La universidad de los años ochentas y sobre todo la de los noventas en ese mismo siglo, por el contrario, basó su modelo de desarrollo en la evaluación de los logros de los profesores, de los grupos de investigación y de los índices institucionales asociados a la productividad. El requisito para el otorgamiento de reconocimientos o promociones ha sido desde entonces, fundamentalmente la publicación y la graduación de estudiantes. Es así como en esos años se estableció como máxima: *no hay nada peor que no publicar*. Con los cambios en las formas de evaluación al mérito académico, se ha ido consolidando una variante de la anterior que señala: sí hay algo peor que no publicar, *publicar y que nadie te lea (o te cite)*.

Hace algunos años el artículo *Publish or perish* de Phillip Clapham, suscitó una serie de reacciones encontradas tanto en el ámbito académico como editorial. Si bien la necesidad de publicación fue siempre importante para los miembros de la comunidad académica desde el siglo XVII, la idea de asociarla con progreso profesional y su impacto en la vida laboral produjo efectos que podríamos llamar de "perversos". Ya que si bien la investigación científica y la publicación del artículo científico son actividades íntimamente relacionadas, no es posible inferir una asociación directa y simple entre publicación y progreso laboral. Es claro que la investigación termina cuando se obtienen resultados, cuando éstos se analizan, se entrega el informe del trabajo o se presenta la investigación en algún congreso o simposio. Sin embargo, hoy día habría que comprender que una investigación termina propiamente cuando se ha publicado en revistas de alto *impacto científico* y *social*, hecho que confirmaría su aceptación y reproduciblidad por parte de la comunidad académica, más allá del entorno propio del investigador. El criterio entonces es saber localizar cuáles son las publicaciones de alto impacto, en ambos sentidos del término, para lograr cerrar el círculo investigación – publicación.

No obstante, en nuestra opinión, la investigación realmente termina con la publicación de artículos en revistas científicas especializadas, sólo entonces la contribución pasa a formar parte del conocimiento científico en un sentido amplio. Algunos colegas e instituciones van aún más lejos, al sugerir que la investigación termina sólo cuando el lector entienda el artículo; es decir, que no bastaría con publicarlo, sino que sería necesario además que la audiencia comprendiese su contenido.

Con este tercer número del volumen 10 de la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* se culmina una etapa del proyecto editorial –concebido en los primeros años de la última década del siglo XX y materializado durante el verano de 1997– emprendido por un equipo latinoamericanista de investigadores en Matemática Educativa, cuyo objetivo fue armonizar los dos sentidos del término *impacto – científico y social*, mediante la publicación científica. Es así como Relime recibió recientemente la grata noticia de haber sido incluida de nueva cuenta, en el Padrón de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt). Hecho que sin duda queremos compartir con nuestros lectores y todas aquellas personas que hacen posible la aparición regular de *Relime*. El propósito fundamental del Conacyt es mantener un índice de revistas científicas y tecnológicas como reconocimiento a su calidad y excelencia editorial. De esta manera, Relime conserva por dos periodos consecutivos su inclusión en el *padrón* y profundiza con ello su compromiso de mantener una línea editorial que impulse la investigación de frontera con estándares internacionales, sin detrimento de la clara vocación social que caracteriza a una comunidad ávida de mejoras en el ámbito de la enseñanza y aprendizaje de la matemática y la ciencia.

Tal como se anunció en la editorial anterior, *Relime* recibe artículos en varias lenguas: español, portugués, inglés y francés con el fin de lograr una mayor internacionalización entre comunidades geográficamente distantes, aunque cercanas por su preocupación y vocación científica. En este sentido, en la base de datos que mantiene la Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal (RedALyC), en el rubro correspondiente al índice de internacionalización de consultas a artículos de las revistas se observa que entre aquellas del campo educativo, *Relime* alcanza el mayor de los porcentajes, lo que significa que la cantidad de lectores de la revista provienen de diversos de países del mundo. Ello no es casual, pues el proyecto editorial de *Relime* nace como una iniciativa latinoamericanista desde su concepción, con una clara trascendencia internacional. Y como parte del proceso de consolidación de la revista, una meta es ubicarla en más bases de datos regionales y fortalecer su impacto social entre profesores, investigadores, estudiantes de posgrado y directivos.

ANGEL ALSINA I PASTELLS

¿POR QUÉ ALGUNOS NIÑOS TIENEN DIFICULTADES PARA CALCULAR? UNA APROXIMACIÓN DESDE EL ESTUDIO DE LA MEMORIA HUMANA

WHY DO SOME CHILDREN HAVE DIFFICULTY CALCULATING? AN APPROACH FROM THE STUDY OF HUMAN MEMORY

RESUMEN. En este trabajo se ha estudiado la relación entre la memoria humana (ejecutivo central) y el rendimiento en cálculo, tomando como muestra a 94 niños españoles con edades entre 7 y 8 años. Nuestros resultados indican que la relación entre la habilidad del ejecutivo central y el rendimiento aritmético es importante y consistente, de modo que los niños que tienen menos disponibilidad de recursos de memoria tienen también un menor rendimiento en tareas de cálculo. Estos datos permiten concluir que la reeducación de los niños con dificultades de cálculo no debe fomentarse ni en la repetición ni en la práctica sin sentido, sino en la activación de los procesos psicológicos implicados en el aprendizaje y, más concretamente, en la memoria.

PALABRAS CLAVE: Educación matemática, cálculo aritmético, rendimiento matemático, memoria de trabajo, ejecutivo central.

ABSTRACT. This work has studied the relation between human memory (central executive) and calculus performance, taking 94 Spanish students aged 7 and 8. Our results show that the relation between the central executive and arithmetic performance is important and consistent, so that children with less memory capacity will also have lower performance in areas of calculus. This data leads to the conclusion that the reeducation of children with calculus difficulties should neither rest on repetition, nor on meaningless practice, but in the activation of those psychological processes implicated in learning and, more concretely, in memory.

KEY WORDS: Mathematics education, arithmetic calculus, mathematical performance, working memory, central executive.

RESUMO. Neste trabalho estudamos a relação entre a memória humana (executivo central) e o rendimento em cálculo, tomando como mostra a 94 crianças espanholas com idades entre 7 e 8 anos. Nossos resultados indicam que a relação entre a habilidade do executivo central e o rendimento aritmético é importante e consistente, de modo que as crianças que têm menos disponibilidade de recursos de memória têm também um menor rendimento nas tarefas de cálculo. Estes dados permitem concluir que a reeducação das crianças com dificuldades de cálculo no deve fundamentar nem a repetição nem na prática sem sentido, mas na ativação dos processos psicológicos implicados na aprendizagem e, mais concretamente, na memória.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2007) 10(3): 315-333
Recepción: Julio 6, 2006/Aceptación: Agosto 27, 2007

PALAVRAS CHAVE: Educação matemática, cálculo aritmético, rendimento matemático, memória de trabalho, executivo central.

RÉSUMÉ. Dans ce travail s’étude le rapport entre la mémoire humaine (exécutif central) et l’efficacité en calcul, en prenant un échantillon de 94 enfants espagnols d’âge entre 7 et 8 ans. Nos résultats montrent que le rapport entre la compétence de l’exécutif central et l’efficacité arithmétique est important et consistante, de manière que les enfants qui disposent de moins ressources de mémoire ont aussi une mineur efficacité dans les tâches du calcul. Ces donnés permettent conclure que la rééducation des enfants faibles en calcul ne doit reposer ni dans la répétition ni dans la pratique sans sens, mais dans l’activation des processus phycologiques impliqués dans l’apprentissage et, plus précisément dans la mémoire.

MOTS CLÉS: Didactique des mathématiques, calcul arithmétique, efficacité mathématique, mémoire du travail, exécutif central.

1. INTRODUCCIÓN

Los resultados de diversas pruebas –tanto nacionales como internacionales– que evalúan el rendimiento matemático en general, y el aritmético en particular, ponen de relieve que muchos alumnos no alcanzan un nivel satisfactorio en tareas de cálculo (Informe PISA de la OCDE, 2003; Proves de Competències Bàsiques del Departament d’Educació de la Generalitat de Catalunya, 2004).

Durante varias décadas, y como consecuencia sobre todo de aplicar los postulados asociacionistas en el aprendizaje del cálculo (Thorndike, 1922), todos los alumnos que presentaban dificultades en el aprendizaje y la ejecución de tareas de cálculo eran sometidos a enormes listados de operaciones aritméticas, al considerar que la repetición era la base para aprender y dominar el cálculo. Sin embargo, el aprendizaje del cálculo bajo los auspicios asociacionistas ha fallado estrepitosamente. Muchos estudios han demostrado que la repetición sin sentido, más que un beneficio, puede ser perjudicial para el rendimiento matemático, ya que influye negativamente en aspectos fundamentales para el aprendizaje, como la motivación (Gómez-Chacón, 1999; Skemp, 1980). Además, desde el punto de vista del aprendizaje cognitivo, la repetición genera un conocimiento poco estable, y difícilmente relacionado con el saber previo o de la vida real que permita hacerlo significativo. Por ello, la información aprendida por tales métodos se pierde fácilmente.

Pero si la clave no está en la repetición, ¿por qué sigue imperando este método en la escuela? ¿Hacia dónde debemos mirar? ¿Qué es lo que necesitan los niños que les cuesta calcular? ¿Qué pueden hacer los maestros para potenciar al máximo las capacidades aritméticas de sus alumnos?

2. La incidencia de la memoria humana

Hoy sabemos que muchos aspectos inciden en el proceso de enseñanza-aprendizaje de cualquier contenido matemático. El cálculo no es ninguna excepción (Alsina, 2001), ya que en él influyen factores externos como el contexto sociocultural (Bishop, 1999), aspectos socio-afectivos como la motivación (Gómez-Chacón, 1999; Skemp, 1980), las creencias (Vila y Callejo, 2004; Planas y Alsina, 2006), las representaciones sociales (Gorgorió y Planas, 2005; Planas y Gorgorió, 2004), o bien factores internos de tipo cognitivo.

Desde este ámbito, existe un importante volumen de investigación aplicada que ha intentado determinar la incidencia de diversos procesos psicológicos básicos en el aprendizaje del cálculo, aunque sin lugar a dudas el más estudiado ha sido la memoria humana (Alsina, 2001 y 2002; Alsina y Sáiz, 2003, 2004a y 2004b). La investigación en este campo ha permitido encontrar respuestas a los interrogantes planteados, al identificar diversas evidencias que explicarían porqué algunos niños con inteligencia normal tienen serias dificultades para aprender a calcular. Los avances más significativos apuntan que los problemas de estos niños para calcular se deben a un bajo rendimiento de la memoria de trabajo, ya que tienen problemas de recuerdo y manejo de recursos sobre este tipo de materiales, lo cual es perfectamente lógico porque, si no son capaces de recordar números que acaban de escuchar, difícilmente pueden operar adecuadamente con ellos (Alsina y Sáiz, 2003).

Este ha sido el punto de partida para proponer nuevas formas de actuación en la escuela que no se basen en la repetición. Nuestra propuesta se basa en entrenar la memoria de trabajo a través de un programa de activación de la memoria de trabajo, formado por tareas que impliquen procesar y recordar material numérico: recuerdo de cantidades, *memorys* de cantidades, recuerdo serial de dígitos directo e inverso, etc. (Alsina y Sáiz, 2004b). Sin embargo, en este artículo nos centramos en la incidencia de la memoria de trabajo en el aprendizaje del cálculo, y dejamos para otro trabajo el análisis profundo de la manera como se debería trabajar en la escuela, conociendo dicha relación.

Los estudios recientes acerca del papel de la memoria en el aprendizaje del cálculo se han efectuado sobre todo a partir del Modelo de Memoria de Trabajo

(Baddeley y Hitch, 1974), cuyos antecedentes se localizan en los trabajos sobre la memoria a corto plazo hechos por Atkinson y Shiffrin (1971a, 1971b). El cambio de concepción desde una visión puramente estructural y temporal de la memoria a corto plazo (Atkinsin y Shiffrin, 1971a y 1971b) hacia una visión procesual y funcional (Baddeley y Hitch, 1974) supuso una revolución en el estudio de la memoria humana.

Con los resultados de sus trabajos, Baddeley y Hitch plantearon que la memoria a corto plazo era un sistema operativo que procesaba y almacenaba temporalmente la información necesaria para ejecutar tareas cognitivas como la comprensión, el razonamiento y el aprendizaje. En su planteamiento inicial, consideraron a un sistema de atención controlador que supervisaba y coordinaba varios subsistemas subordinados. El controlador atencional se denominó *ejecutivo central*, mientras que los subsistemas subordinados más estudiados han sido el *bucle fonológico*, el cual se supone que manipula información de tipo verbal (palabras, números, etc), y la *agenda viso-espacial*, que se cree que se encarga de la creación y manipulación de imágenes. De forma sintética, algunos resultados más representativos de estos dos subsistemas son los siguientes:

Bucle fonológico	Agenda viso-espacial
- La supresión articulatoria durante el conteo o la similitud fonológica entre los dígitos producen un descenso substancial del rendimiento - Las palabras que tardan más en ser pronunciadas tardan también más en ser subvocalizadas y, por lo tanto, imponen más carga al mecanismo de repetición subvocal - Los sujetos con lentitud de conteo podrían tener un acceso más lento a la representación de los números en la memoria a largo plazo, debido a representaciones fonológicas débiles o a la pérdida de información antes que el cálculo haya finalizado	- Los resultados son contradictorios y no existe un consenso sobre su incidencia en el aprendizaje del cálculo. Sin embargo, aunque no está demostrado empíricamente, sugerimos que su influencia puede ser importante en tareas matemáticas con una importante carga de información visual como, por ejemplo, la geometría

En este trabajo nos centramos en el ejecutivo central, ya que estudios preliminares han constatado que ejerce un rol esencial en la realización de actividades cognitivas complejas (Engle, Kane y Tuholski, 1999). Gathercole y Pickering (2000a) ampliaron algunas funciones adscritas al ejecutivo central, como el desarrollo de estrategias flexibles para el almacenaje y la recuperación de la información; el control del flujo de información a través de la memoria de trabajo; la recuperación del conocimiento desde la memoria a largo plazo, o el control de la acción, la planificación y la programación de múltiples actividades concurrentes.

Al lo largo de más de un cuarto de siglo, desde que se hizo hincapié por primera vez en el papel desempeñado por el ejecutivo central, además de los estudios sobre bases conceptuales y metodológicas han ido surgiendo diversas líneas de investigación aplicada. En este contexto, un sector de investigadores se abocó a revelar las implicaciones del ejecutivo central en las tareas matemáticas en general, y las aritméticas en particular. Logie, Gilhooly y Wynn (1994), a partir de una muestra de sujetos adultos, establecieron que las características del ejecutivo central sugerían que tenía un papel de primer orden en la cognición numérica, especialmente en los cálculos aritméticos más complejos, a pesar de la falta de evidencia empírica. En su trabajo identificaron que la actuación en el cálculo se interrumpe cuando el ejecutivo central se sobrecarga y, por extensión, cuando el bucle fonológico es también sobrecargado, lo cual les hizo suponer que el papel del ejecutivo central consiste en valorar los totales correctos y seleccionar implícitamente las estrategias apropiadas cuando la solución de un cálculo no está disponible directamente mediante la recuperación.

Dos años después, Lemaire, Abbi y Fayol (1996) estudiaron una posible repercusión de las conclusiones apuntadas por Logie y su equipo, al centrarse en el distinto nivel de implicación del ejecutivo central –así como del resto de subsistemas de la memoria de trabajo– en la verificación de cálculos de respuesta falsa con un resultado próximo al verdadero $(8+4=13)$, comparándolos con los de respuesta falsa que daban un resultado alejado al verdadero $(8+4=17)$. Tal efecto, denominado el *efecto división* (Ashcraft y Battaglia, 1978; Dehaene y Cohen, 1991; Zbrodoff y Logan, 1990) es interesante porque hace pensar que los sujetos utilizan dos tipos de estrategias: una de recuperación, para verificar los cálculos de resultados próximos, y una de probabilidad, para comprobar cálculos alejados. A partir de los resultados obtenidos, Lemaire y su equipo afirmaron:

> Cuando se utiliza la estrategia de recuperación, los sujetos primero recobran la solución correcta, comparan esta respuesta y la emiten. Usando la estrategia de probabilidad, el proceso de verificación no es tan rápido de completar, pero se toma una

rápida decisión, que consiste en determinar que la respuesta propuesta está demasiado alejada para que sea probable (pp. 97).

Además, señalaron que cuando los sujetos verifican los cálculos aritméticos de respuesta verdadera, que es el caso de nuestro trabajo, el efecto *dificultad del cálculo* se incrementa si radica en el bucle fonológico o en el ejecutivo central. Esto les hizo concluir que para verificar cálculos de respuesta verdadera, los recursos atencionales tanto del ejecutivo central como del bucle fonológico están estrechamente implicados.

En un trabajo de revisión, Hitch y Towse (1995) implicaron también al ejecutivo central en la destreza para realizar cálculos aritméticos, y apuntaron que la habilidad aritmética depende de los recursos para hacer operaciones mentales y de la información almacenada en un espacio de trabajo central. Más adelante, Towse y Hitch (1997), en un estudio hecho con 46 niños con una media de edad de 7 años y 5 meses, sugirieron que el ejecutivo central está también implicado en tareas específicamente numéricas, al encontrar una relación entre la capacidad de contar objetos y un sistema central de capacidad limitada, además del procesamiento visual y verbal. Sus resultados están de acuerdo con el trabajo de McLean y Hitch (1999), en el que relacionaron a los niños con baja habilidad aritmética y déficits con el componente espacial de la memoria de trabajo y con algunos aspectos del ejecutivo central. Por otro lado, las correlaciones obtenidas por Gathercole y Pickering (2000a) indicaron también un vínculo estrecho entre el ejecutivo central y el cálculo aritmético. También Gathercole y Pickering (2000b), a partir de un estudio con 83 niños ingleses de 6 y 7 años con un nivel bajo en tests de las áreas de inglés y matemáticas, establecieron una relación con las puntuaciones débiles en medidas del ejecutivo central. Asimismo, Fürst y Hitch (2000), tomando una muestra de 24 estudiantes universitarios, concluyeron que la interrupción que los procesos dependientes del ejecutivo central en una tarea aritmética conlleva el descenso del rendimiento.

Como punto de partida para nuestro estudio tomamos al conjunto de resultados anteriores, ya que su objetivo fue corroborar que la habilidad del ejecutivo central de la memoria de trabajo tiene una notable influencia en la ejecución de tareas de cálculo. Y lo que es más importante: los resultados de nuestro trabajo y otros precedentes permiten apuntar en la línea que la reeducación de los niños con dificultades para aprender a calcular no se encuentra en la repetición, tal como señalaron a principios del siglo XX los psicólogos asociacionistas (Thorndike, 1922), sino en la activación de los procesos psicológicos implicados en este aprendizaje, tal como ya apuntamos en otro artículo (Alsina y Sáiz, 2004b), y que será objeto de estudio más minucioso en futuros trabajos.

3. MÉTODO

3.1. *Participantes*

La muestra para este estudio fue de 94 alumnos –53 niños y 41 niñas– de segundo año de educación primaria, con edades de 7-8 años (la media de edad al iniciar las pruebas era de 7,5 años). Ellos estaban escolarizados en cinco centros ubicados en poblaciones semiurbanas del entorno geográfico de la Cataluña (España). Los cinco centros partían de una metodología de enseñanza-aprendizaje del cálculo parecida, y su Proyecto Curricular de Centro en el área de matemáticas era también muy similar. Las familias eran de origen socioeconómico cultural medio y mayoritariamente catalanohablantes.

3.2. *Instrumentos*

Las pruebas utilizadas, tanto para la medida del cálculo aritmético como del ejecutivo central, fueron las siguientes:

Pruebas aritméticas. Se diseñaron dos pruebas para esta investigación, una de numeración y otra de cálculo, debido a la dificultad para localizar pruebas estandarizadas que contemplasen los contenidos aritméticos del currículum actual, de acuerdo con Shriner y Salvia (1988). Para ambas pruebas, los aciertos sumaban un punto y los errores restaban también un punto.

La prueba de numeración estaba formada por un dictado oral de 10 números y diversas tareas escritas: relacionar mediante flechas el nombre de 12 números con su correspondiente símbolo matemático; comparar 20 pares de cantidades mediante los símbolos >, < ó =; escribir el número natural anterior y posterior al dado, y 4 series numéricas. El tiempo de administración total fue de 6 minutos, y podían obtenerse 104 puntos como máximo.

La prueba de cálculo incluía 40 operaciones simples, de un dígito (20 de suma y 20 de resta; por ejemplo, $4+3$ ó $9-5$), que se presentaron equitativamente en disposición vertical y horizontal, y 40 operaciones complejas mostradas en forma horizontal, de dos dígitos (15 de suma, 15 de resta y 10 combinadas; por ejemplo, $12+11, 14-13$ ó $13+12-10$). De cada tipo de operación, había 10 en forma inversa y 5 directa. El tiempo de administración total fue de 8 minutos, y la puntuación máxima que podía obtenerse era 80.

Al no tratarse de exámenes estandarizados, correlacionamos las pruebas aritméticas con las Proves Psicopedagògiques d'Aprenentatges Instrumentals (PPAI), de Canals (1988), ampliamente aceptadas en el marco catalán para la medida de capacidades escolares, y obtuvimos un índice de correlación estadísticamente significativo $(r=0,46)$.

Tests del ejecutivo central. Usamos tres pruebas de la *Bateria de test de memòria de Treball*, de Pickering, Baqués y Gathercole (1999), que es una adaptación y ampliación de *The working memory battery*, de Pickering y Gathercole (1997). Se trata de medidas directas de la memoria de trabajo que emplean como procedimiento el recuerdo serial, y siguen el planteamiento del modelo de Baddeley y Hitch (1974) de situaciones de tareas duales:

1. *Recuerdo serial de dígitos* (*inverso*): Este test es muy parecido a la prueba de dígitos inversos de las Escalas de inteligencia de Wechsler (1974). Dispone de cuatro secuencias de dígitos para cada nivel, y se suspende la administración cuando el sujeto falla en dos series consecutivas de una misma amplitud. La puntuación directa oscila entre 0 y 36 puntos, y la amplitud entre 2 y 9, respectivamente. Está considerado como un test que mide la habilidad del ejecutivo central, debido a sus requerimientos de mantener una lista de dígitos mediante recuerdo serial e invertirlo mentalmente. Ello indica que se realiza a la vez almacenamiento (debe recordar) y procesamiento (debe invertir la serie).

2. *Amplitud de escuchar*: Este test es una versión adaptada del Reading Span Task, de Daneman y Carpenter (1980 y 1983) en su modalidad de escuchar (Listening Span Task). Se basa en la lectura de unas series de frases por parte del investigador que el niño debe decir si son verdaderas o falsas. Una vez que se le han mostrado las series se le pide que repita la última palabra de cada frase, mediante recuerdo serial. Se inicia la tarea con series de dos frases, lo cual indica que una vez finalizada la serie el sujeto tiene que recordar dos palabras (la final de cada frase). Se prosigue con una serie de tres frases y así sucesivamente, hasta que el niño es incapaz de recordar correctamente y en el mismo orden las últimas palabras de dos

series. Se obtienen dos tipos de puntuaciones distintas: número de series recordadas, que puede variar entre 0 y 20, y amplitud, de 2 a 6. La tarea involucra de forma simultánea el mantenimiento y el procesamiento de la información.

3. *Amplitud de contar*: Es una prueba diseñada originalmente por Case, Kurland y Goldberg (1982) de base similar a la anterior, aunque en lugar de frases se utilizan tarjetas con puntos que deben ser contados y retener los resultados. Se utiliza un cuadernillo de estímulos, donde se presentan por orden de dificultad creciente las tarjetas con puntos. En total hay cuatro series de tarjetas de cada amplitud (de 2 hasta 6). La prueba se inicia presentando una serie de dos tarjetas: el sujeto cuenta los puntos de cada tarjeta y a continuación debe repetir, mediante recuerdo serial, la cantidad de cada una. Si realiza correctamente la serie, pasa a la siguiente, hasta agotar las cuatro series de la misma amplitud. A continuación, se usa el mismo procedimiento con las series de tres tarjetas (el sujeto debe recordar cada vez tres números) y así sucesivamente, hasta que es incapaz de recordar en orden serial los números de una misma amplitud. Se obtienen dos tipos de puntuación: series realizadas correctamente, que puede oscilar entre 0 y 20, y amplitud, entre 2 y 6.

3.3. *Diseño*

Para analizar la incidencia del bucle fonológico en el aprendizaje del cálculo se hizo un estudio de tipo correlacional, que permite establecer relaciones entre ambos aspectos, pero queremos aclarar que no logra ver el aprendizaje ni los cambios estables.

Se usó un diseño intragrupo ex post facto para determinar el nivel de incidencia del ejecutivo central de la memoria de trabajo en tareas de cálculo. Se ocupó este diseño, ya que no se manipularon directamente las variables dependientes, sino se generaron a partir de las características de los sujetos con base en los siguientes aspectos:

Rendimiento aritmético: Para determinar si la habilidad aritmética mantiene alguna relación con alguno de los dos subsistemas de la memoria de trabajo, establecimos una categoría de los sujetos en tres niveles (bajo, medio y alto) con base en sus puntuaciones de las pruebas aritméticas administradas.

Habilidad del ejecutivo central de la memoria de trabajo: Aquí también hicimos una categoría de los sujetos también en tres niveles (bajo, medio y alto), basándonos en sus puntuaciones de las pruebas de ejecutivo central.

Se tuvieron en cuenta también diversos aspectos que podían incidir y/o distorsionar los resultados: el sexo, la edad, las necesidades educativas especiales, la repetición de curso, la ausencia en las sesiones experimentales y otras variables ambientales, como el espacio, el ruido o la hora de administración de las pruebas.

3.4. *Procedimiento*

La recolección de datos para nuestra investigación empírica se efectuó en los respectivos centros escolares. Los niños seleccionados hicieron las diversas pruebas individualmente o colectivamente, contando con la presencia del investigador o del profesor respectivo. En el diagrama 1 se resume el procedimiento general utilizado.

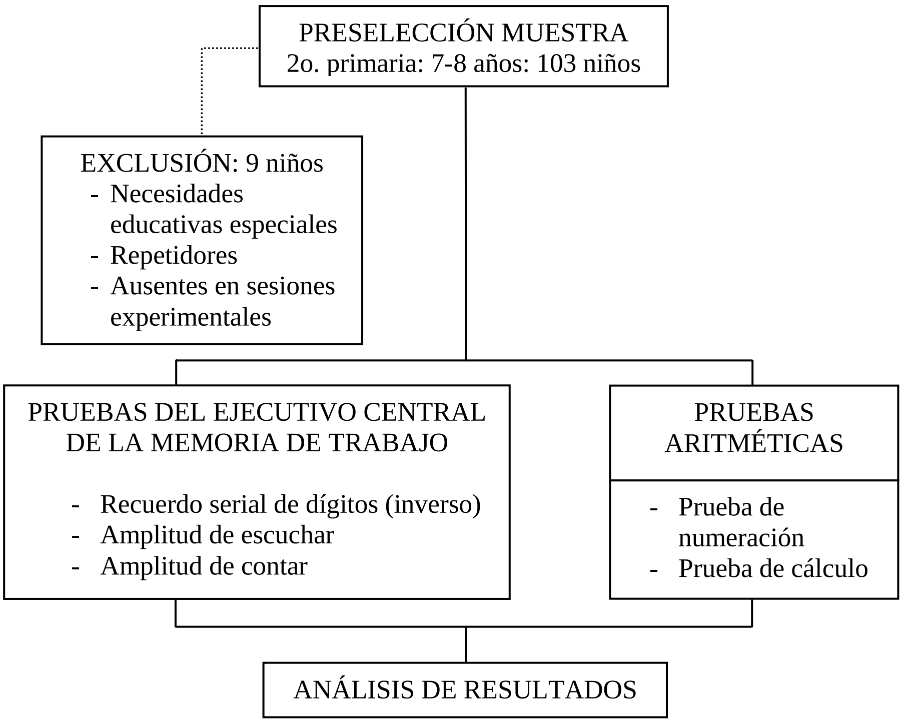


Diagrama 1. Proceso general empleado para el desarrollo de la investigación empírica.

Antes de llevar a cabo el estudio, se sensibilizó a los niños para evitar posibles interferencias posteriores, como problemas de conducta. En relación con la administración de las pruebas, se repartieron en primer lugar las pruebas aritméticas de forma colectiva, y luego las distintas pruebas de ejecutivo central de forma individual: *Recuerdo serial de dígitos (inverso)*, *amplitud de escuchar* y *amplitud de contar*.

Se usó siempre el mismo espacio en cada centro escolar, lo cual permitió que aspectos como la temperatura ambiental o el ruido estuvieran más o menos constantes durante el estudio. Por otro lado, dada la posibilidad que la hora del día afectase al rendimiento, como se indica en diversos estudios cronopsicológicos (Estaún, 1993, entre otros), tomamos en cuenta tal factor, de manera que todas las pruebas se aplicaron en las últimas sesiones de la mañana, donde se ubican los mayores niveles de rendimiento en la mayor parte de estudios.

La distribución de los niños y niñas de cada grupo-clase en la investigación estuvo sujeta a la arquitectura de cada centro escolar, aunque el criterio general consistió en distribuirlos en filas paralelas, con una breve separación entre mesa y mesa. En todas las pruebas la lengua usada fue el catalán, que es la lengua vehicular de aprendizaje de los distintos centros escolares.

En cuanto a los criterios para la puntuación, fueron los siguientes: en las pruebas de numeración y de cálculo se restaron los aciertos menos los errores, y en las de ejecutivo central se usaron las normas de corrección propuestas para cada evaluación.

4. RESULTADOS

Antes de proceder a exponer los resultados, queremos precisar que analizamos las condiciones de normalidad de las pruebas aritméticas usadas y podemos indicar que todas las puntuaciones no contradicen a un modelo normal, según el *Test de normalidad*, de Kolmogorov-Smirnov: *K-S para una muestra de SPSS*. También queremos advertir que para efectuar los distintos análisis empleamos puntuaciones directas en las medidas individuales y normalizadas en las compuestas, con el objeto de tener rangos homogéneos en dichas pruebas. Todas las puntuaciones normalizadas se caracterizan por tener una distribución normal, con media 0 y desviación típica 1 (Zaiats, Calle y Presas, 1998).

Como ya hemos indicado, analizamos la posible incidencia del sexo y de la edad. En las tareas administradas no hallamos diferencias estadísticamente significativas en función del sexo ($p = 0,56$ en las pruebas aritméticas, y 0,9 en las de ejecutivo central de la memoria de trabajo) ni de la edad ($p = 0,76$ en las pruebas aritméticas, y 0,83 en las de ejecutivo central de la memoria de trabajo).

En el caso de las pruebas aritméticas (numeración y cálculo), estudiamos los resultados a partir de una puntuación compuesta –sumatorio de numeración y cálculo–, puesto que al realizar de forma previa un estudio más detallado, donde analizamos por separado las puntuaciones de las pruebas de numeración y las de cálculo, observamos que la tendencia era la misma (Alsina, 2001). Por ello, mostramos únicamente los resultados globales con el objeto de simplificar la exposición.

Para determinar una posible relación entre el rendimiento aritmético y la habilidad del ejecutivo central, correlacionamos en primer lugar las puntuaciones de las pruebas aritméticas con las del ejecutivo central; el índice de correlación de Pearson obtenido $(r = 0,52)$ indicó que ambas tareas mantenían una relación importante.

En segundo lugar, a fin de acotar en forma más precisa estos datos iniciales, correlacionamos la puntuación de las pruebas aritméticas con la de cada una de las pruebas del ejecutivo central de memoria de trabajo administradas.

El índice de correlación resultó significativo en todas las pruebas del ejecutivo central, y la correlación más alta se dio con la prueba de *amplitud de contar* (aciertos). La Tabla I ilustra los resultados obtenidos.

TABLA I
Índice de correlación de Pearson
entre las pruebas aritméticas y las pruebas de ejecutivo central

	Recuerdo serial de dígitos inverso: *aciertos*	Recuerdo serial de dígitos inverso: *amplitud*	Amplitud de escuchar: *aciertos*	Amplitud de escuchar: *amplitud*	Amplitud de contar: *aciertos*	Amplitud de contar: *amplitud*
Pruebas aritméticas	0,29**	0,3**	0,37**	0,34**	0,39**	0,28**

** La correlación es significativa al nivel 0.01 (bilateral).

En tercer lugar, nos interesaba determinar si la capacidad del ejecutivo central incidía en las tareas aritméticas de todos los sujetos por igual, o si varía según su nivel (bajo, medio o alto). Para dividir la muestra en tres grupos –bajo, medio y alto– usamos el procedimiento *RANKS* de SPSS sobre la puntuación de las pruebas aritméticas, mientras que para comparar las medias ocupamos la prueba de contraste (post-hoc) de Scheffé de SPSS. Los resultados se exponen en la Tabla II.

TABLA II
Comparación de medias en las pruebas
del ejecutivo central en función del nivel aritmético.

	Nivel aritmético	N	Media	Desviación típica	Sig.	Contraste
Recuerdo serial de dígitos inverso: *aciertos*	Bajo	31	5,65	1,89	0,121	N. S.
	Medio	32	6,31	1,53		
	Alto	31	6,65	2,3		
Recuerdo serial de dígitos inverso: *amplitud*	Bajo	31	2,61	0,72	0,091	N. S.
	Medio	32	2,84	0,63		
	Alto	31	3,03	0,87		
Amplitud de escuchar: *aciertos*	Bajo	31	3,32	1,92	<0,001	bajo, medio< Alto
	Medio	32	3,94	1,58		
	Alto	31	5,29	2,27		
Amplitud de escuchar: *amplitud*	Bajo	31	2,26	0,44	0,004	bajo<alto
	Medio	32	2,47	0,51		
	Alto	31	2,71	0,59		
Amplitud de contar: *aciertos*	Bajo	31	6,13	2,46	0,015	bajo<alto
	Medio	32	7,06	2,24		
	Alto	31	7,9	2,37		
Amplitud de contar: *amplitud*	Bajo	31	3,16	0,82	0,105	N. S.
	Medio	32	3,16	0,81		
	Alto	31	3,55	0,85		

La Tabla II muestra que se produjeron diferencias estadísticamente significativas entre los distintos subgrupos de nivel aritmético en dos de las pruebas de ejecutivo central: la *amplitud de escuchar* (tanto aciertos como amplitud) y la *amplitud de contar* (aciertos). En todos los casos, las diferencias apuntan en el sentido esperado; es decir, los sujetos de nivel inferior en capacidad aritmética obtuvieron las puntuaciones más bajas en las tareas del ejecutivo central de la memoria de trabajo. En la Figura 1 se aprecian dichos resultados:

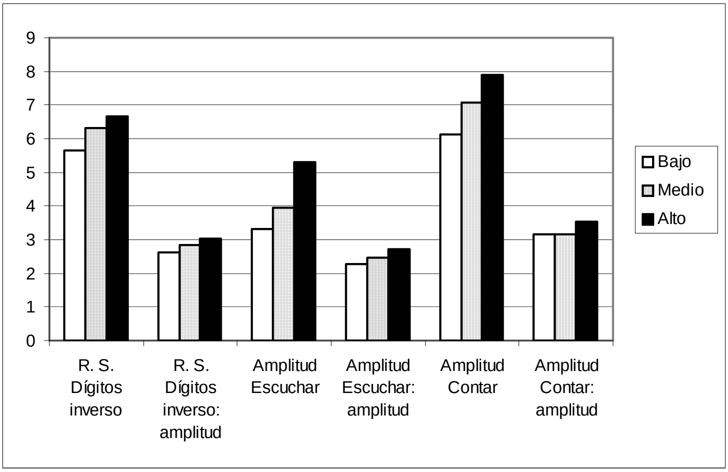


Figura 1. Rendimiento en las pruebas de ejecutivo central en función del nivel aritmético.

Para reafirmar los vínculos encontrados hasta el momento, realizamos también un análisis inverso donde comparamos el rendimiento en tareas aritméticas, en función del nivel de habilidad del ejecutivo central. Observamos que de nuevo se produjeron diferencias estadísticamente significativas entre los sujetos de nivel bajo y alto ($p<0,001$); es decir, los niños con un nivel de habilidad inferior en tareas de ejecutivo central son los que presentaron mayores dificultades para efectuar las tareas aritméticas.

5. DISCUSIÓN

Al analizar nuestros resultados, debemos reparar de entrada en algunas limitaciones. Por un lado, hay un reducido cuerpo de investigaciones sobre el papel que desempeña el ejecutivo central de la memoria de trabajo en tareas de cálculo, pues tradicionalmente los trabajos se han ceñido a otros subsistemas de la memoria de trabajo, como el bucle fonológico (Alsina y Sáiz, 2003; Alsina y Sáiz, 2004a), o en otros aprendizajes instrumentales, como la lectura (Ato y Navalón, 1983; Baqués y Sáiz, 1996, 1999; Cantor, Engle y Hamilton, 1991; Gathercole y Baddeley, 1993; Navalón, Ato y Rabadán, 1989). Por otro lado, los estudios que se han aproximado a la activación de la memoria humana como base para ayudar a algunos niños a superar sus dificultades en el aprendizaje del cálculo son prácticamente inexistentes (Alsina, 2001; Alsina y Sáiz, 2004b).

Con respecto al papel que desempeña el ejecutivo central de la memoria de trabajo en el aprendizaje del cálculo, los resultados de nuestro estudio muestran que existe una correlación lineal estadísticamente significativa entre las pruebas de ejecutivo central y las tareas aritméticas, siendo las de *amplitud de contar* y *amplitud de escuchar* las que más correlacionan. Esto confirma un vínculo muy importante entre el ejecutivo central y la actividad cognitiva que conlleva el cálculo aritmético, un aspecto en el que coinciden de manera unánime los investigadores del tema.

Como ya mencionamos en la introducción, Logie, Gilhooly y Wynn (1994) demostraron que la actuación en el cálculo se interrumpe cuando el ejecutivo central se sobrecarga; Hitch y Towse (1995) y Towse y Hitch (1997), señalaron que el ejecutivo central está implicado en tareas aritméticas, al precisar que estas actividades cognitivas dependen de un sistema central de capacidad limitada. Lemaire, Abdi y Fayol (1996) llegaron a la conclusión de que, para verificar cálculos de respuesta verdadera, están implicados los recursos atencionales tanto del ejecutivo central como del bucle fonológico. Y más recientemente, Engle, Kane y Tuholski (1999), Fürst y Hitch (2000), Gathercole y Pickering (2000a, 2000b) y McLean y Hitch (1999), entre otros, también han enfatizado en el relevante papel que cumple este subsistema.

Sin embargo, a pesar de la notable influencia que parece ejercer la memoria de trabajo en diversos aprendizajes escolares, como la lectura o el cálculo, existen muy pocos estudios donde se hayan elaborado programas específicos de entrenamiento sobre la memoria de trabajo, o que hayan analizado las repercusiones que tendrían al aplicarlo en los niños. La mayor parte de trabajos en los que se diseña un programa de entrenamiento de la memoria, o que analizan su efecto en el rendimiento, se centran en poblaciones adultas que sufren algún trastorno de la memoria, como demencias tipo Alzheimer (Broman, 2001), síndromes asociados al abuso de alcohol, como el de Korsakoff (Hochhalter y Beth, 2001), trastornos mentales como la esquizofrenia (Kurtz, Moberg, Mozley, Swanson, Gur y Gur, 2001), o pérdida de memoria asociada a la vejez (Acuña y Risiga, 1997; Schmidt, Berg y Deelman, 2001; Troyer, 2001). Incluso, las escasas investigaciones que han tratado la posibilidad de entrenar y activar la memoria de trabajo en niños se centran básicamente en sujetos que tienen algún trastorno importante de la memoria; por ejemplo, el déficit de atención con hiperactividad (Klingberg, Forssberg y Westerberg, 2002).

En nuestro estudio se concluyó que la ejecución de tareas que requieren la memoria de trabajo puede mejorarse notablemente si se entrena dicha habilidad cognitiva. A partir de las evidencias empíricas anteriores, Alsina (2001) diseñó un Programa de Activación de la Memoria de Trabajo con el fin de activar la memoria de trabajo en niños. Recientemente, Alsina y Sáiz (2004b) han publicado un estudio con 50 niños –con edades entre 7 y 8 años– para determinar si es posible entrenar su memoria de trabajo. Con tal propósito, se dividió la muestra en dos subgrupos de 25 niños: el grupo experimental ha recibido el programa de entrenamiento de la memoria de trabajo, y el resto ha formado el grupo control. Los resultados indican que los niños del grupo experimental presentan incrementos estadísticamente significativos en la memoria de trabajo respecto al grupo control. Nuestros resultados más recientes confirman que este grupo de niños aumenta de forma considerable su nivel de rendimiento en tareas aritméticas, un dato ya apuntado en el estudio de Alsina (2001).

Este programa de activación, como hemos dicho en la introducción, está formado por diez tareas que implican el procesamiento y la memorización de material verbal, sobre todo de tipo numérico: recuerdo serial de palabras –directo e inverso–; recuerdo serial de dígitos –directo e inverso–; asociaciones numéricas (un dibujo con un número asociado, y al presentar nuevamente el dibujo hay que recordar el número); recuerdo de historial; *memory* de cantidades; amplitud de contar (grupos de dibujos que deben ser contados y recordados en el mismo orden); recuerdo de cantidades (por ejemplo, un grupo de dibujos alusivos a distintos animales, y se debe recordar cuántos animales iguales había), y amplitud de lectura de palabras.

Todo ello permite concluir que las páginas y páginas de operaciones aritméticas que muchos niños con dificultades de cálculo deben realizar en clase o en sus hogares –lo que es todavía peor–, como castigo por un *mal rendimiento escolar* no tienen ningún sentido. La solución radica en activar los procesos mentales implicados en el aprendizaje del cálculo, como la memoria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acuña, M. M. y Risiga, M. (1997). *Talleres de entrenamiento cerebral y entrenamiento de la memoria*. Barcelona, España: Paidós.

Alsina, À. (2001). *La intervención de la memoria de trabajo en el aprendizaje del cálculo aritmético*. Tesis de doctorado, Universitat Autònoma de Barcelona (disponible en el sitio web del Servei de Publicacions UAB, Bellaterra, http://www.tdcat.cesca.es/TDCat-0613101-113720).

Alsina, À. (2002). La intervención de la memoria de trabajo en el aprendizaje del cálculo aritmético. *Enseñanza de las Ciencias 20* (1), 176-177.

Alsina, À . y Sáiz, D. (2003). Un análisis comparativo del papel del bucle fonológico versus la agenda viso-espacial en el cálculo en niños de 7-8 años. *Psichotema 15* (2), 241-246.

Alsina, À. y Sáiz, D. (2004a). El papel de la memoria de trabajo en el cálculo mental un cuarto de siglo después de Hitch. *Infancia y Aprendizaje 27* (1), 15-25.

Alsina, À. y Sáiz, D. (2004b). ¿Es posible entrenar la memoria de trabajo?: un programa para niños de 7-8 años. *Infancia y Aprendizaje 27* (3), 275-287.

Ashcraft, M. H. & Battaglia, J. (1978). Cognitive arithmetic: evidence for retrieval and decision processes in mental addition. *Journal of Experimental Psychology: Human, Learning and Memory 4* (5), 527-538.

Atkinson, R. C. y Shiffrin, R. M. (1968). Memoria humana: una propuesta sobre el sistema y sus procesos de control. En M. V. Sebastián (Ed.), *Lecturas de psicología de la memoria* (pp. 23-56). Madrid, España: Alianza Editorial, 1991.

Atkinson, R. C. & Shiffrin, R. M. (1971a). Control processes in short-term memory. *Scientific American 224*, 82-90.

Atkinson, R. C. & Shiffrin, R. M. (1971b). The control of short-term memory. *Scientific American 225*, 82-90.

Ato, M. y Navalón, C. (1983). Memoria a corto plazo y habilidad lectora. *Revista de Psicología General y Aplicada 38* (6), 1117-1134.

Baddeley, A. D. y Hitch, G. (1974). Memoria en funcionamiento. En M. V. Sebastián (Ed.), *Lecturas de psicología de la memoria* (pp. 471-485). Madrid, España: Alianza Editorial, 1991.

Baddeley, A. D. (1996). Exploring the central executive. *Quarterly Journal of Experimental Psychology 49 A* (1), 5-28.

Baddeley, A. D. (1998). *Memoria humana. Teoría y práctica*. Madrid, España : McGraw-Hill.

Baqués, J. y Sáiz, D. (1996). Memoria y lectura. En D. Sáiz, M. Sáiz y J. Baqués (Eds.), *Psicología de la memoria. Manual de prácticas* (pp. 327-338). Barcelona, España: Avesta.

Baqués, J. y Sáiz, D. (1999). Medidas simples y medidas compuestas de memoria de trabajo y su relación con el aprendizaje de la lectura. *Psicothema 11* (4), 737-745.

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona, España: Paidós.

Broman, M. (2001). Spaced retrieval: A behavioral approach to memory improvement in Alzheimer's and related dementias. *NYS-Psychologist 13* (1), 31-34.

Canals, R. (1988). *Proves psicopedagògiques d'aprenentatges instrumentals*. Barcelona: Teide.

Cantor, J.; Engle, R.W. & Hamilton, G. (1991). Short-term memory, working memory and verbal abilities: How do they relate? *Intelligence 15*, 229-246.

Case, R.; Kurland, M. & Goldberg, J. (1982). Operational efficiency and the growth of short-term memory span. *Journal of Experimental Child Psychology 33*, 386-404.

Daneman, M. y Carpenter, P. A. (1980). Individual differences in working memory and reading. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior 19* (4), 450-466.

Daneman, M. y Carpenter, P. A. (1983). Individual differences in integrating information between and within sentences. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition 9* (4), 561-584.

Dehaene, S. y Cohen, L. (1991). Two mental calculation systems: a case study of severe acalculia with preserved approximation. *Neuropsychologia 29*, 1045-1074.

Departament d'Educació (2004). *Competències bàsiques. Educació secundària obligatòria. Primer cicle. Prova C (Matemàtiques)*. Barcelona: Servei de Difusió i Publicacions.

Engle, R. W.; Kane, M. J. y Tuholski, S. W. (1999). Individual differences in working memory capacity and what they tell us about controlled attention, general fluid intelligence and functions of the prefrontal cortex. En A. Miyake y P. Shah (Eds.), *Models of working memory* (pp. 102-134). Cambridge, USA: Cambridge University Press.

Estaún, S. (1993). Cronopsicología y educación. En J. M. Asensio, S. Estaún, P. Fermoso, J. Gairín, J. C. Mèlich y P. M. Pérez (Eds.), *El tiempo en educación* (pp. 153-217). Barcelona, España: PPU.

Fürst, A. J. y Hitch, G. J. (2000). Different roles for executive and phonological components of working memory and mental arithmetic. *Memory and Cognition 28* (5), 774-782.

Gathercole, S. E. y Baddeley, A. D. (1993). *Working memory and language*. Hove, UK: Lawrence Erlbaum Associates.

Gathercole, S. E. y Pickering, S. J. (2000a). Assessment of working memory in six- and seven-year-old children. *Journal of Educational Psychology 92* (2), 377-390.

Gathercole, S. E. y Pickering, S. J. (2000b). Working memory deficits in children with low achievements in the national curriculum at 7 years of age. *British Journal of Educational Psychology 70* (2), 177-194.

Gómez-Chacón, I. (1999). Toma de conciencia de la actividad emocional en el aprendizaje de la matemática. *Uno 21*, 29-45.

Gorgorió, N. y Planas, N. (2005). Social representations as mediators of mathematics learning in multiethnic classrooms. *European Journal of Psychology of Education XX* (1), 91-104.

Hitch, G. J. y Towse, J. N. (1995). Is there a relationship between task demand and storage space in tests of working memory capacity? *The Quarterly Journal of Experimental Psychology 48 A*, 108-124.

Hochhalter, A. y Beth, J. (2001). Differential outcomes training facilitates memory in people with Korsakoff and Prader-Willi syndromes. *Integrative Physiological and Behavioral Science 36* (3), 196-204.

Klingberg, T.; Forssberg, H. y Westerberg, H. (2002). Training of working memory in children with ADHD. *Journal o Clinical and Experimental Neuropsycology 24* (6), 781-791.

Kurtz, M.; Moberg, P.; Mozley, L.; Swanson, C.; Our C., R. y Our C., R. (2001). *Neurorehabilitation and Neural Repair 15* (1), 75-80.

Lemaire, P.; Abdi, H. y Fayol, M. (1996). The role of working memory resources in simple cognitive arithmetic. *European Journal of Cognitive Psychology 8* (1), 73-103.

Logie, R. H.; Gilhooly, K. J. y Wynn, V. (1994). Counting on working memory in arithmetic problem solving. *Memory and Cognition 22* (4), 395-410.

McLean, J. F. y Hitch, G. J. (1999). Working memory impairments in children with specific arithmetic learning difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology 74* (3), 240-260.

Navalón, C.; Ato, M. y Rabadán, R. (1989). El papel de la memoria de trabajo en la adquisición lectora en niños de habla castellana. *Infancia y Aprendizaje 45*, 85-105.

OCDE (2003). *Cadre d'evaluation de PISA 2003. Connaissances et competentes en matematiques, lectura, science et résolution de problèmes*. Obtenido de http://www.pisa.oecd.org.

Pickering, S. J. y Gathercole, S.E. (1997). *The working memory battery*. Bristol, England: University of Bristol.

Pickering, S. J.; Baqués, J. y Gathercole, S. E. (1999). *Bateria de tests de memòria de Treball*. Barcelona, España: Laboratori de Memòria de la Universitat Autònoma de Barcelona [versión catalana no comercializada de S. Pickering y S. Gathercole (1997), *The working memory battery*. Bristol, England: University of Bristol].

Planas, N. y Alsina, A. (2006). Argumentos para los futuros maestros en torno al conocimiento matemático. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas 42*, 51-63.

Planas, N. y Gorgorió, N. (2004). Are different students expected to learn norms differently in the mathematics classroom? *Mathematics Education Research Journal 16* (1), 19-40.

Schmidt, I. W.; Berg, I. J. y Deelman, B. G. (2001). Relations between subjective evaluations of memory and objective memory performance. *Perceptual and Motor Skills 93* (3), 761-776.

Shriner, J. y Salvia, J. (1988). Chronic noncorrespondence between elementary math curricula and arithmetic tests. *Excepcional Children, 55* (3), 240-248.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas.* Madrid, España: Morata.

Thorndike, E. L. (1922). *The psychology of arithmetic.* New York, USA: The Mcmillan Co.

Towse, J. N. y Hitch, G. J. (1997). Integrating information in object counting: a role for central coordination process? *Cognitive Development 12*, 393-422.

Troyer, A. K. (2001). Improving memory knowledge, satisfaction and functioning via an education and intervention program for older adults. *Aging, Neuropsychology and Cognition 8* (4), 256-268.

Vila, A. y Callejo, M. L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas.* Madrid, España: Narcea.

Wechsler, D. (1974). *WISC-R. Escala de inteligencia de Wechsler para niños*. Madrid, España: TEA [edición revisada, 1994].

Zaiats, V.; Calle, M. L. y Presas, R. (1998). *Probabilitat i Estadística. Exercicis I.* Vic: Eumo Editorial.

Zbrodoff, N. J. y Logan, G. D. (1990). On the relation between production and verification tasks in the psychology of simple arithmetic. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition 16* (1), 8397.

Autor

Àngel Alsina i Pastells . Facultat d’Educació i Psicología. Universitat de Girona, Girona, España; angel.alsina@udg.edu

JUAN JOSÉ DÍAZ y VICENTE BERMEJO

NIVEL DE ABSTRACCIÓN DE LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS EN ALUMNOS URBANOS Y RURALES

LEVEL OF ABSTRACTION OF ARITHMETIC PROBLEMS IN URBAN AND RURAL STUDENTS

RESUMEN. En este estudio se analiza la incidencia que tiene el grado de abstracción en la resolución de problemas de adición y sustracción en alumnos urbanos y rurales. La muestra se formó con 192 alumnos de primero a cuarto año de educación primaria; el 50% pertenecía a un contexto rural y el 50% restante a un contexto urbano de México. Las tareas empíricas consistieron en resolver problemas aritméticos con objetos, dibujos, algoritmos y verbales. Los resultados muestran que la presencia de objetos o dibujos mejora el rendimiento de los alumnos de primero y segundo año, y baja en los de tercero. Igualmente, conviene destacar que los alumnos rurales obtienen sus mejores resultados en los problemas verbales. Las estrategias de modelado se emplean de modo parecido en todos los cursos del contexto rural, mientras que en el urbano se ocupan especialmente en primero y segundo. Los alumnos rurales utilizan más las estrategias de conteo, y en los urbanos son más comunes las estrategias de hechos numéricos. Finalmente, se señalan algunas aplicaciones educativas a partir de los resultados de este estudio.

PALABRAS CLAVE: Contexto, estrategias, niveles de abstracción, problemas matemáticos.

ABSTRACT. This study analyzes the incidence of the level of abstraction in the resolution of problems of addition and subtraction in urban and rural students. The sample was made up of 192 students from first to fourth grade of primary education; 50% came from a Mexican rural environment and the remaining 50% from a Mexican urban environment. Empirical tasks consisted in resolving arithmetical problems with objects, drawings, algorithms and verbally. The results show that the presence of objects or drawings improves performance in first and second grade students, and lowers performance in third grade students. It should also be pointed out that rural students obtained their best results in verbal problems. Modeling strategies are used in similar ways in all the courses in the rural environment, while in an urban setting they are primarily used in first and second grades. Rural students make use of counting strategies, and urban students lean more toward using numerical facts. Finally, some educative applications will be suggested from the results of the study.

KEY WORDS: Context, strategies, levels of abstraction, mathematical problems.

RESUMO. Neste estudo se analisa a incidência que tem o grau de abstração na resolução de problemas de adição e subtração em alunos urbanos e rurais. A mostra foi coletada de 192 alunos

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2007) 10(3): 335-364
Recepción: Octubre 23, 2006/Aceptación: Agosto 13, 2007

de primeiro ao quarto ano do ensino fundamental; 50 % pertence a um contexto rural e 50 % restante a um contexto urbano do México. As tarefas empíricas consistiram em resolver problemas aritméticos com objetos, desenhos, algoritmos y verbais. Os resultados mostram que a presencia de objetos ou desenhos melhoram o rendimento dos alunos de primeiro e segundo ano, e baixa nos de terceiro. Igualmente, convém destacar que os alunos rurais obtém seus melhores resultados nos problemas verbais. As estratégias de modelagem se empregam de modo parecido em todos os cursos do contexto rural, enquanto que no urbano se ocupam especialmente em primeiro e segundo. Os alunos rurais utilizam mais as estratégias de cálculo, e nos urbanos são mais comuns as estratégias de fatos numéricos. Finalmente, se registram algumas aplicações educativas a partir dos resultados deste estudo.

PALAVRAS CHAVE: Contexto, estratégias, níveis de abstração, problemas matemáticos.

RÉSUMÉ. Cette étude analyse l'incidence du niveau d'abstraction dans la résolution des problèmes d'addition et de soustraction chez les élèves urbains et ruraux. L'échantillon est composé de 192 élèves de la première à la quatrième année de l'école élémentaire, 50 % appartenant à un contexte rural et les 50 % restant appartenant à un contexte urbain à México. Les tâches empiriques ont consisté en la résolution de problèmes arithmétiques qui portent sur les objets, dessins, algorithmes et d'autres en langage naturel. Les résultats montrent que la présence d'objets ou de dessins améliore l'efficacité des élèves de la première et la deuxième année mais qu'elle l'affaibli en troisième. De même, il est convenable de signaler que les élèves ruraux obtiennent leurs meilleurs résultats dans les problèmes en langage naturel. Les stratégies de modélisation sont employées de manière similaire dans tous les cours (1ère au 4ème) du contexte rural, tandis que dans le contexte urbain elles sont employées principalement dans le premier et deuxième cours. Les élèves ruraux utilisent plus les stratégies d'estimation mais les élèves urbains sont plus habitués aux stratégies des faits numériques. Finalement, sont signalés quelques applications éducatives à partir des résultats de cette étude.

MOTS CLÉS: Contexte, stratégies, niveaux d'abstraction, problèmes mathématiques

1. INTRODUCCIÓN

Los resultados que arrojó la evaluación internacional de la OCDE (2002, 2005) sobre el rendimiento en matemáticas ubicaron a México en el último lugar. Ello debería suponer al menos una llamada para profesores, investigadores y demás personas responsables de la educación en este país, a fin de incrementar esfuerzos que vayan encaminados a mejorar la formación matemática de nuestros escolares. Las acciones de esta índole conviene iniciarlas desde los primeros años del currículo escolar, es decir, desde preescolar o al menos desde el primer año de educación primaria (Alanís, Cantoral, Cordero, Farfán, Garza y Rodríguez, 2000).

El constructivismo sostiene que los niños construyen el conocimiento matemático de una manera activa a lo largo de su desarrollo (Rico, 1997); de ahí que los problemas aritméticos de adición y sustracción se hayan investigado ampliamente según su dificultad, comprensión, procedimientos de resolución y respuestas incorrectas de los alumnos. Sin embargo, existe una carencia de estudios que traten el grado de abstracción en los problemas verbales y su relación con el contexto sociocultural. Dicho conocimiento implicaría analizar un proceso de abstracción que partiría del nivel concreto hasta alcanzar el nivel abstracto, lo cual ocurre en un contexto sociocultural donde un conjunto de interacciones y situaciones sociales modelan el desarrollo cognitivo individual.

Bajo esta idea, la presente investigación tiene como intención estudiar la incidencia del grado de abstracción en los problemas de adición y sustracción, tomando a dos contextos educativos significativos de México, el rural y el urbano. Lo sujetos de investigación serán alumnos de primero a cuarto año de educación primaria.

2. ANTECEDENTES DEL PROBLEMA

Para contar con una perspectiva sobre los planteamientos importantes respecto al problema de investigación, se exponen a continuación la definición de problema de cambio y su nivel de dificultad; las estrategias de solución; el grado de abstracción como proceso de conocimiento; la noción de contexto y su relación con la cognición matemática, así como las características cognitivas de los niños urbanos y rurales.

Los problemas de cambio se precisan debido a su estructura semántica, considerando la presencia de una acción implícita o explícita que produce un cambio en la cantidad inicial. Un ejemplo de adición es: “Jorge tiene ocho caramelos. Lupita le da cuatro caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene ahora Jorge?”, mientras que un ejemplo de sustracción sería: “María tiene ocho lápices. Le da cuatro lápices a Sonia. ¿Cuántos lápices tiene ahora María?”. Ahora bien, la dificultad de estos problemas es diferente, según el lugar que ocupa la incógnita. Los niños manifiestan un mayor rendimiento en los problemas cuando la incógnita es la cantidad final; sin embargo, este nivel desciende cuando la incógnita se sitúa en uno de los subconjuntos, especialmente en el primero (Bermejo, 1990; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; De Corte y Verschaffel, 1987). Por un lado, Bermejo, Lago y Rodríguez (1998) jerarquizan los problemas verbales de adición y sustracción en función de la dificultad que presentan para los niños de preescolar, primero y segundo de educación primaria. Por otro, Bermejo, Dopico, Lago, Lozano y Rodríguez (2002) afirman que los niños tienen una dificultad creciente en los tipos de problemas, de acuerdo con la secuencia siguiente: algoritmo, cambio, combinación, igualación, comparación y relacional.

Con relación a los procedimientos de solución, Carpenter y Moser (1982) encuentran tres tipos de estrategias infantiles en los problemas verbales tanto de adición como de sustracción: *modelado directo*, *conteo* y *hechos numéricos*. La de modelado directo consiste en representar con dedos u objetos los conjuntos de la operación para encontrar después el resultado. Se manifiesta en la adición $(3+4=?)$ mediante el procedimiento *contar todo con modelos* (el niño extiende en una mano un dedo, luego el segundo dedo, después un tercer dedo…luego en la otra mano extiende un dedo, después el segundo, el tercero y el cuarto… Ahora los cuenta en el mismo orden: “uno, dos, tres”, “uno, dos, tres, cuatro” y dice: “uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, son siete”), mientras que en la sustracción $(8-5=?)$ ocurre a través de los procedimientos *separar de* (el niño construye el conjunto mayor, 8 objetos, y entonces separa un número de objetos igual al número menor, 5 objetos. Al contar el conjunto de objetos restantes, 3 objetos, ocurre la respuesta para el problema: “tres”), *separar a* (el niño separa 3 objetos del conjunto mayor, dejando sólo 5 objetos y cuenta los objetos separados; la respuesta es “tres”), *añadir a* (el niño coloca un conjunto de 8 objetos y enseguida realiza un conjunto de 5 objetos. Posteriormente agrega 3 objetos a este último conjunto para tener 8 objetos. La respuesta es el número de objetos agregados: “tres”), y *emparejamiento* (el niño coloca un conjunto de 8 objetos y otro conjunto de 5 objetos; el número de objetos sin emparejar es la respuesta: “tres”), como los describen Baroody (1987), y Bermejo y Rodríguez (1993).

La estrategia de conteo implica el uso de secuencias de conteo para obtener la solución del problema, sin necesidad de representar los términos de la operación. En el caso de la adición, se recurre a los procedimientos *contar todo sin modelos* (uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete), *contar a partir del primer sumando* (“tres; cuatro, cinco, seis, siete”), y *contar a partir del sumando mayor* (“cinco, seis, siete”), referidos por Baroody (1987), y Bermejo y Rodríguez (1993). En cuanto a la sustracción, se encuentran los procedimientos *contar hacia atrás a partir de* (el niño cuenta hacia atrás a partir del minuendo tantos pasos como marca la cantidad menor; el último número pronunciado es la respuesta: “siete, seis, cinco, cuatro, tres”), *contar hacia atrás* (el niño cuenta hacia atrás desde el número mayor hasta alcanzar el menor; el número de elementos contados es la respuesta: “ocho, siete, seis”), y *contar a partir de lo dado* (el niño cuenta a partir del número menor hasta alcanzar el mayor; la respuesta se obtiene contando los numerales emitidos para equiparar ambos conjuntos: “seis, siete, ocho”), indicados por Baroody (1987), y Bermejo y Rodríguez (1993).

La estrategia de hechos numéricos puede ser de dos tipos: conocidos y derivados. La primera ocurre cuando el niño recuerda el resultado de la adición o sustracción de dos números (“$3+4=7$ porque tres más cuatro son siete”, y “$11-5=6$ porque once menos cinco es igual a seis”), mientras que la segunda alude a la obtención del resultado mediante los procedimientos de composición y descomposición (6 + 7 = ? “Yo sé que 6 más 6 es igual a 12; 6 más 7 es 13 porque 7 es uno más que 6, y 13 es uno más que 12”, y 9 – 5 = ? “Yo sé que 10 menos 5 es igual a 5; 9 es 1 menos que 10; así, separo 1 de la respuesta 5 y tengo 4”), como se detalla en Baroody (1987), Bermejo y Rodríguez (1993), y Putnam, De Bettencourt y Leinhardt (1990).

Bermejo et al. (1998) resaltan dos cuestiones sobre las estrategias. La primera dice que el tipo de estrategia se relaciona más con la ubicación de la incógnita y el tipo de operación que con la estructura semántica del problema. La segunda plantea que las estrategias de los niños cambian en relación con el nivel escolar. En tal sentido, los niños de preescolar recurren con más frecuencia a las estrategias de modelado directo, los alumnos de primero de primaria las de conteo y los de segundo mencionan principalmente a las de hechos numéricos. Por tanto, se considera que la secuencia como se desarrollan las estrategias parte de lo material (uso de objetos) hacia lo verbal (contar) y luego lo mental (hechos numéricos conocidos) (Bermejo, 1990, 2004; Bermejo y Rodríguez, 1993; Carpenter y Moser, 1982; De Corte y Verschaffel, 1987).

La perspectiva constructivista señala que el proceso cognitivo de lo concreto hacia lo abstracto ocurre a través de niveles de desarrollo (Kamii, Kirkland y Lewis, 2001; Kato, Kamii, Ozaki y Nagahiro, 2002). Ahora bien, los niveles de abstracción que se consideran en esta investigación son concreto, pictórico, numérico y verbal, que siguen un orden progresivo en la comprensión de lo concreto hacia lo abstracto. En cuanto al nivel concreto, se afirma que el uso de objetos en la instrucción de las matemáticas puede ser efectivo, aunque no su concretividad; es decir, los alumnos no se centran en los objetos en sí mismos, sino como instrumentos que facilitan el aprendizaje y la comprensión de un concepto nuevo o símbolo escrito (NCTM, 2000). En este nivel, Kamii, Kirkland y Lewis (2001) apuntan que es útil la manipulación de material concreto para adquirir el conocimiento lógico-matemático. Estos autores consideran que el uso de dicho material sirve para solucionar el problema mediante la construcción de relaciones mentales por medio de la abstracción reflexionante.

Tocante al nivel pictórico, se precisa que los dibujos sirven para establecer una conexión de lo concreto con lo abstracto. Se ha propuesto que este nivel abarque la enseñanza de la estructura semántica de los problemas de adición y sustracción dentro de un diagrama parte-todo (Wolters, 1983), a través de dibujos esquemáticos –como un diagrama de flechas– o mediante la construcción de dibujos libres que representen el problema (De Corte y Verschaffel, 1987; Fuson y Willis, 1988). De cualquier forma, los alumnos construyen una representación pictórica adaptada a sus propias ideas o nivel evolutivo. Además, Fuson y Willis (1988) reportaron que los niños de segundo año de primaria son capaces de identificar la estructura semántica del problema dibujado, escribir los números del problema en el lugar apropiado del dibujo y determinar si se suman o restan los dos números conocidos.

Referente al nivel numérico, se ha analizado la representación simbólica convencional. Kamii et al. (2001) plantean que los niños de primero de primaria se familiarizan con los algoritmos al escribir expresiones convencionales (3 + 2 = 5 y 3 + 2), aunque otros sólo escribían dos números o uno, incluso omitían los signos + ó =. Estos autores explican que las relaciones entre 3, 2 y 5 implican una relación jerárquica difícil de comprender para los niños pequeños, debido que, al sumar dos números, se combinan dos enteros (3 y 2); para hacer un número de orden superior (5), se requiere que los números anteriores sean las partes, mientras que las relaciones entre tales partes (3 + 2) no involucran una relación jerárquica. Además, el uso del signo = es poco frecuente y la relación entre los tres números (3, 2 y 5) se considera como una dificultad en los niños de primer curso para hacer relaciones parte-todo jerárquicas. Lo anterior significa que el niño no puede representar (externar) una relación parte-todo que no existe en su mente.

Por último, en el nivel verbal se representa el grado más elevado de abstracción, cuando existe la comprensión sobre la estructura semántica de los problemas de adición y sustracción. La competencia cognitiva abstracta se centra en dominar las relaciones semánticas o el significado entre las cantidades por encima de las relaciones simbólicas convencionales establecidas en el algoritmo. En este nivel, además, se incorporan los planteamientos anteriores sobre los problemas verbales.

A continuación, expondremos los planteamientos sobre la posible influencia del ámbito sociocultural de los alumnos en la resolución de tareas matemáticas. Es esperable que, si existen diferencias transculturales en el rendimiento matemático entre dos o varios países (Resnick, 1989), podemos suponer que hay diferencias relevantes entre distintas culturas o contextos socioculturales al interior de un país. En dicho sentido se requiere abordar la noción del contexto y la cognición matemática, así como las características del conocimiento matemático de niños urbanos y rurales.

Los estudios en torno a la cognición a través del contexto (Carraher, Carraher y Schliemann, 1985; Saxe, 1991, 2002) indican que los niños de contextos diferentes desarrollan de distinta manera las mismas tareas de pensamiento, de modo que los contextos socioculturales constituyen un componente en el desarrollo cognitivo (Brown, Collins y Duguid, 1989; Rogoff, 1990). De acuerdo con Abreu (1998), la noción de contexto incluye dos puntos de vista: como una característica física o un instrumento producido por un grupo cultural particular que se presenta en el momento de la acción, y como una característica social producto de la historia de un grupo dentro de un orden social concreto, el cual sanciona las formas legítimas de conocimiento matemático. Estas formas se conocen simbólicamente por los actores sociales, lo cual les permite participar en determinadas posiciones en la estructura social y crear una identidad social (Abreu, 1995). De tal modo, el conocimiento empieza dentro de ciertas comunidades que se localizan en estructuras sociales particulares.

Por tanto, podemos definir al contexto como un entorno cultural que facilita un conjunto de instrumentos empleados por lo niños en la construcción del conocimiento, mediante un proceso activo que se manifiesta en una interacción social, donde se legitiman las formas y procedimientos para construir significados dentro de una estructura social en un tiempo y situación específicos. Si se toma como base a lo anterior, podemos destacar que la influencia del contexto sociocultural en el conocimiento matemático está mediada por la práctica social con la que se construye el significado contextualizado en el aprendizaje de las matemáticas (Saxe, 1991). Los trabajos sobre el contexto informal han mostrado diferencias entre los niños de diferentes contextos en cuanto a su comprensión de diversos problemas de matemáticas (Carraher et al., 1985; Carraher, Carraher y Schliemann, 1987; Nunes, Schliemann y Carraher, 1993; Schliemann y Carraher, 2002). En términos generales, la construcción del conocimiento matemático en contextos específicos se fundamenta con el uso de reglas y procedimientos matemáticos como herramientas para realizar metas particulares. Entonces, las estrategias tienen un significado sociocultural (Nunes et al., 1993; Resnick, 1987; Schliemann, 1995).

Finalmente, con respecto a las características del conocimiento matemático de los niños urbanos y rurales, Saxe y Gearhart (1990) encuentran que los niños rurales tienen una habilidad espacial mayor que los urbanos. No obstante, los niños urbanos desarrollan formas cognitivas de acuerdo con su práctica económica de ventas, mientras que los rurales generan un conocimiento específico mayor en los problemas espaciales que se presentan durante su práctica de tejer. Además, Saxe (1991) contrasta la existencia de diferencias entre las estrategias de los niños vendedores de la calle con los no vendedores, tanto en el contexto urbano como en el rural, atendiendo a la práctica específica y la evolución de su conocimiento informal. Este autor identifica un mayor rendimiento en los alumnos urbanos, al compararlo con los rurales.

2.1. *Objetivos*

El objetivo general del presente estudio consiste en investigar el patrón evolutivo que tienen los niños de distinto contexto sociocultural en la solución de problemas de *cambio aumento* y *cambio disminución*, según el nivel de abstracción. De aquí se desprenden dos objetivos particulares: el primero implica determinar si existen diferencias de rendimiento entre los alumnos de los contextos urbano y rural en la resolución de problemas de cambio; el segundo es analizar las estrategias empleadas por los niños de cada contexto durante la solución del problema.

2.2. *Planteamiento*

La investigación tiene como propósito analizar el rendimiento y las estrategias que, según su nivel de abstracción, ocupan los escolares de primero hasta cuarto año de primaria en ambos contextos socioculturales, con respecto a los problemas de cambio aumento y cambio disminución.

El diseño experimental incluye problemas de cambio aumento y cambio disminución. Las variables intrasujetos son el nivel de abstracción (concreto, dibujos, numérico y verbal) y el lugar de la incógnita (cantidad final, cantidad inicial), las cuales atañen al curso escolar, que comprende desde primero hasta cuarto año de educación primaria, así como el contexto sociocultural rural y urbano al cual pertenecen los participantes.

Para el primer objetivo se formula la siguiente pregunta de investigación: ¿cuáles son las diferencias de rendimiento en las distintas tareas según el curso escolar, nivel de abstracción, estructura de cambio aumento y cambio disminución, y la incógnita en la cantidad final o inicial entre los alumnos de escuelas urbanas y rurales? El segundo objetivo implica la pregunta: ¿los alumnos de cada contexto sociocultural emplean las estrategias de manera distinta según el nivel de abstracción, cambio aumento y cambio disminución, y la incógnita cantidad final o inicial en el problema?

3. MÉTODO

En esta sección describiremos la metodología de la investigación a partir de las características de los participantes, los materiales empleados y el procedimiento basado en el uso de entrevistas como protocolos verbales.

3.1. *Participantes*

Un total de 192 niños seleccionados al azar tomaron parte en la investigación: 96 eran alumnos rurales y 96 urbanos, quienes cursaban de primero a cuarto año de primaria en varias escuelas públicas del estado de Zacatecas, México.

TABLA I

Puntuación media
de edad en los alumnos participantes

Curso escolar	Alumnos urbanos	Alumnos rurales
Primero	6.8	6.6
Segundo	7.7	7.5
Tercero	8.4	8.5
Cuarto	9.8	9.7

La Tabla I presenta los datos sobre la edad de los participantes. La muestra rural se integró por 24 alumnos de cada curso escolar, de los cuales el 50% eran niñas y 50% niños; lo mismo ocurrió con la muestra de alumnos urbanos, que se formó con 50 niños y 46 niñas. El contexto rural es el municipio de Luis Moya, ubicado en el centro-norte de México, a 60 kilómetros de la capital del estado de Zacatecas, mientras que el urbano es el área metropolitana de la ciudad de Zacatecas. Todos los participantes en el estudio pertenecen a familias con nivel socioeconómico bajo.

En estas escuelas el programa de matemáticas presenta la operación de suma en la segunda mitad del primer curso, mientras que la resta empieza en la segunda mitad del segundo curso. Para aplicar la tarea se solicitó el permiso de los padres y directores de los centros educativos.

3.2. *Material*

El material consistió en 16 problemas de cambio aumento y cambio disminución con dos posiciones de la incógnita –cantidad inicial y cantidad final–, bajo cuatro niveles de abstracción: objetos, dibujos, algoritmos y problemas verbales.

TABLA II

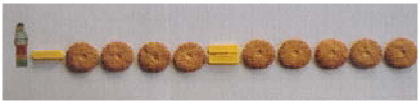
Materiales empleados en los problemas, según el nivel de abstracción

Nivel concreto	Nivel dibujos	Nivel numérico	Nivel verbal
Canicas	Dibujos de canicas	3 + 4 = ?	Juan tenía tres canicas. Lupita le da cuatro canicas. ¿Cuántas canicas tiene ahora Juan?
Lápices	Dibujos de lápices	? + 3 = 8	Juan tenía algunos lápices. Lupita le da tres lápices. Ahora tiene ocho lápices. ¿Cuántos lápices tenía Juan al principio?
Caramelos	Dibujos de caramelos	8 – 2 = ?	Pepe tenía ocho caramelos. Le dio dos caramelos a María. ¿Cuántos caramelos tiene Pepe ahora?
Galletas	Dibujos de galletas	? – 4 = 5	Pepe tenía algunas galletas. Le dio cuatro galletas a María. Ahora tiene cinco. ¿Cuántas galletas tenía Pepe al principio?

En la Tabla II se indican los materiales empleados en los problemas, según el nivel de abstracción. Cabe mencionar que los objetos concretos fueron familiares para los alumnos, y que el cambio aumento y cambio disminución resultaron similares a través de los niveles de abstracción. La Figura 1 muestra algunos problemas que se presentaron a los participantes.

Nivel concreto de cambio disminución con incógnita cantidad final

Nivel dibujos de cambio aumento con incógnita cantidad inicial



Nivel concreto de cambio disminución con incógnita cantidad inicial

Nivel dibujos de cambio aumento con incógnita cantidad final

Figura 1. Ejemplos de los niveles de abstracción presentados a los alumnos.

3.3. *Procedimiento*

Los problemas de cambio aumento y cambio disminución se mostraron a los participantes durante dos sesiones. En la primera se presentaron ocho problemas y los ocho restantes en la segunda. El orden en que se dieron a conocer las tareas de adición y sustracción estuvo contrabalanceado al azar de igual manera para todos los participantes.

Además, cada alumno fue entrevistado bajo el siguiente procedimiento. En los problemas concretos se presentaban los objetos sobre la mesa al alumno y el entrevistador formulaba el problema. Por ejemplo: Juanito tiene tres canicas (se señalan). Lupita le regala cuatro canicas (se indican). ¿Cuántas canicas tiene Juanito ahora? (se señala el espacio de la incógnita). En este nivel de concreción se mostraron los símbolos concretos de la operación y el signo igual para que los alumnos mantuvieran visible, y no en la memoria o en el nivel lingüístico, las relaciones semánticas entre las cantidades de manera consistente con los demás niveles de abstracción. En los problemas con dibujos se presentaban las tarjetas al alumno y también el investigador enunciaba el problema, señalando sus dibujos correspondientes.

En los problemas numéricos se mostraba el algoritmo y el experimentador planteaba el problema, indicando sus términos en relación con la ecuación, lo cual implicaba que la expresión numérica no fuera un simple ejercicio, sino que mostrara la estructura semántica de cambio, al igual que en los demás niveles. En los problemas verbales se daba la tarjeta con el problema escrito para que la leyera cada participante, al mismo tiempo, el investigador leía pausadamente el problema. Tras la resolución, se preguntaba a los participantes cómo lo habían hecho, a fin de conocer con precisión la estrategia utilizada. Veamos el caso de una alumna de cuarto año en la solución del problema sobre dibujos de cambio disminución con la incógnita la cantidad inicial.

Experimentador: Juan tenía algunas galletas (se señala el espacio de la incógnita). Le dio 4 galletas a María (se indican). Ahora tiene 5 (se señalan). ¿Cuántas galletas tenía al principio, Juan?
J.María: Nueve.
Experimentador: ¿Cómo le has hecho para saber que son nueve?
J. María: Contando las galletas y después restándole.
Experimentador: ¿Cómo las contaste y cómo le restas?
J. María: Cinco más cuatro, nueve. Y le quitamos las que están aquí, cuatro, y quedan cinco.

Cada entrevista tuvo una duración aproximada de 20 minutos. Las sesiones se grabaron en video, los problemas se aplicaron en las escuelas durante el horario escolar, mientras que las respuestas infantiles se consideraron verdaderas o erróneas. Las estrategias de adición y sustracción se categorizaron de acuerdo con Carpenter y Moser (1982): modelado directo, conteo y hechos numéricos. Un ejemplo de la estrategia modelado en el problema verbal de cambio aumento con la incógnita la cantidad final fue explicado por un alumno de primer año:

J. Pablo: Uno, dos, tres (muestra 3 dedos extendidos), uno, dos, tres, cuatro (muestra 4 dedos extendidos).
Experimentador. ¿Cuál es la respuesta?
J. Pablo: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete (cuenta 7 dedos)... siete.

4. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En este apartado nos ocuparemos primero del rendimiento de los alumnos y después analizaremos las estrategias utilizadas en la resolución de los problemas planteados.

4.1. *Rendimiento*

Las respuestas de los participantes presentan un índice de Cronbach (alpha) de fiabilidad de 0.90. Dichos resultados se han estudiado mediante el análisis de varianza (ANOVA) mixto 2 (contexto: rural vs. urbano), X 4 (curso escolar: primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto), X 4 (nivel de abstracción: concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal), X 2 (operación: cambio aumento vs. cambio disminución), X 2 (lugar de la incógnita: cantidad final vs. cantidad inicial), con medidas repetidas en los tres últimos factores mediante el programa SPSS 11.0. El rendimiento de los alumnos en las distintas tareas se considera como variable dependiente.

Ahora bien, los resultados indican que son significativos los efectos principales de los factores curso $F (3, 184) = 57.24$, $p < .01$, nivel de abstracción $F (3, 552) = 3.13$, $p < .05$, operación $F (1, 184) = 4.00$, $p < .05$ y lugar de la incógnita $F (1, 184) = 155.16$, $p < .01$. No hubo efecto del factor contexto $F (1, 184) = 3.09$, $p = .08$ aunque, como veremos después, las diferencias se hacen notorias en algunos cursos o situaciones. Por tanto, el curso escolar, el nivel de abstracción, la operación y la incógnita afectan significativamente el rendimiento de los participantes.

TABLA III
Materiales empleados en los problemas de cambio aumento

Contexto	Curso	Cambio disminución							
		Incógnita cantidad inicial				Incógnita cantidad final			
		C	D	N	V	C	D	N	V
Rural	Primero	.33	.25	.20	.20	.41	.33	.33	.54
	Segundo	.50	.37	.33	.29	.37	.29	.37	.75
	Tercero	.50	.50	.54	.75	.66	.66	.79	.87
	Cuarto	.87	.83	.83	.91	1.0	1.0	1.0	1.0
Urbano	Primero	.33	.37	.33	.08	.37	.37	.45	.50
	Segundo	.70	.70	.54	.41	.62	.54	.58	.83
	Tercero	.62	.58	.62	.66	.41	.62	.83	.91
	Cuarto	.79	.79	.75	.79	.95	.91	.95	1.0

Nota: *C* = nivel concreto, *D* = nivel dibujos, *N* = nivel numérico, *V* = nivel verbal

La Tabla III contiene las puntuaciones medias sobre el nivel de abstracción de los alumnos rurales y urbanos en la solución de los problemas de cambio aumento, según el contexto, grado escolar, nivel de abstracción, operación y lugar de la incógnita. La Tabla IV contiene las puntuaciones medias sobre el nivel de abstracción de los alumnos rurales y urbanos en la solución de los problemas de cambio disminución, según el contexto, grado escolar, nivel de abstracción, operación y lugar de la incógnita.

TABLA IV

Materiales empleados en los problemas de cambio disminución

Contexto	Curso	Cambio aumento							
		Incógnita cantidad inicial				Incógnita cantidad final			
		C	D	N	V	C	D	N	V
Rural	Primero	.20	.25	.16	.12	.54	.45	.50	.66
	Segundo	.12	.20	.29	.29	.91	.75	.37	.87
	Tercero	.37	.45	.45	.54	.70	.70	.91	.83
	Cuarto	.87	.91	.87	.87	1.0	1.0	1.0	1.0
Urbano	Primero	.08	.04	.08	.16	.70	.70	.58	.70
	Segundo	.41	.33	.37	.20	.87	.91	.70	.83
	Tercero	.54	.58	.79	.54	.95	.95	1.0	.95
	Cuarto	.83	.87	.91	.83	1.0	.95	.95	1.0

Nota: *C* = nivel concreto, *D* = nivel dibujos, *N* = nivel numérico, *V* = nivel verbal

En el primer año, los alumnos rurales obtienen un mayor rendimiento en el nivel verbal de cambio aumento con la incógnita cantidad final (.66), mientras que los urbanos destacan más en los niveles concreto, con dibujos y verbal (.70). En el segundo año, los niños rurales muestran mayores destrezas en el nivel concreto de cambio aumento con la incógnita cantidad final (.91), mientras que los urbanos ofrecen mejores habilidades en el nivel dibujos de cambio aumento con la incógnita cantidad final (.91).

En el tercer año, los escolares rurales y urbanos manifiestan mayor competencia en el nivel numérico de cambio aumento con la incógnita cantidad final (.91 y 1.0, respectivamente). Con respecto al cuarto año, los estudiantes rurales logran el más alto rendimiento en todos los niveles de abstracción, tanto en cambio aumento como en cambio disminución con la incógnita cantidad final (1.0), mientras que los urbanos consiguen el mejor rendimiento en los niveles concreto y verbal de cambio aumento con la incógnita cantidad final, así como en el nivel verbal de cambio disminución con la incógnita cantidad final (1.0).

En la Tabla V se muestran los resultados del estudio de comparaciones múltiples de Tuckey. Dentro del factor curso se hallan diferencias significativas entre los escolares de cuarto con relación a los demás cursos, los alumnos de tercero difieren respecto a los de segundo y primero; asimismo, hay diferencias significativas entre segundo y primero. Dichos resultados son consistentes con los de otros estudios (Carpenter y Moser, 1982; Riley, Greeno y Heller, 1983) que plantean un patrón evolutivo del rendimiento en las tareas de cambio aumento y cambio disminución.

TABLA V
Datos de las comparaciones de la prueba de Tukey

Pares	Diferencias entre medias	Error típico	Significación
Curso 4o.-curso 3o.	.23	.04	.00
Curso 4o.-curso 2o.	.39	.04	.00
Curso 4o-curso 1ero.	.55	.04	.00
Curso 3o.-curso 2o.	.16	.04	.00
Curso 3o-curso 1ero.	.32	.04	.00
Curso 2o-curso 1ero.	.16	.04	.00
Nivel verbal-nivel numérico	.04	.02	.03
Pares	Diferencias entre medias	Error típico	Significación
Nivel verbal-nivel dibujos	.05	.02	.01
Cambio aumento-cambio disminución	.03	.01	.04
Incógnita cantidad final–incógnita cantidad inicial	.24	.01	.00

Nota: La diferencia de medias es significativa al nivel .05

La comparación por pares con la prueba de Tuckey en el factor nivel de abstracción encuentra diferencias del nivel verbal con respecto al numérico y al de dibujos; estos datos concuerdan con los identificados por (Riley et al. 1983), en el aspecto de que en el nivel verbal se obtiene un rendimiento mayor que en el algoritmo y la presentación de dibujos. Por otra parte, en el factor operación aparecen diferencias de cambio aumento con respecto a cambio disminución.

Asimismo, se confirman los resultados de (Riley et al., 1983) en cuanto a que la adición es más fácil que la sustracción, si bien otros estudios (Bermejo et al. 1998, 2002) no han encontrado diferencias significativas en la resolución de ambas operaciones. En el factor incógnita, las diferencias son notorias entre su ubicación en la cantidad final, lo que concuerda con los datos reportados en otros estudios (Bermejo y Rodríguez, 1987; De Corte y Verschaffel, 1987) donde se indica que la incógnita cantidad final es más fácil que la incógnita cantidad inicial.

En la Tabla VI aparecen las interacciones significativas. Si nos centramos en la interacción Contexto X Curso X Nivel de abstracción X Operación X Incógnita, encontramos que el análisis sobre los efectos simples del factor nivel de abstracción en los niveles de los demás factores señala que se contrasta el nivel concreto de cambio aumento con la incógnita cantidad final respecto a los niveles numérico y dibujos. Igualmente, los niveles dibujos y verbal difieren con relación al nivel numérico en los alumnos rurales de segundo curso: $F(3, 182) = 16.08$, $p < .01$. Además, en estos alumnos se muestran diferencias significativas del nivel verbal de cambio disminución con la incógnita cantidad final respecto a los niveles concreto, dibujos y numérico $F(3, 182) = 6.03$, $p < .01$.

TABLA VI

Interacciones significativas en el rendimiento de los alumnos

Interacciones	Valor F	Significancia
Curso X Nivel de abstracción	$F(9, 552) = 3.41$	$p < .01$
Curso X Incógnita	$F(3, 184) = 3.93$	$p < .01$
Nivel de abstracción X Incógnita	$F(3, 552) = 11.24$	$p < .01$
Operación X Incógnita	$F(1, 184) = 42.29$	$p < .01$
Contexto X Curso X Operación	$F(3, 184) = 3.11$	$p < .05$
Curso X Nivel de abstracción X Incógnita	$F(9, 552) =3.56$	$p < .01$
Curso X Operación X Incógnita	$F(3, 184) = 8.08$	$p < .01$
Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	$F(3, 552) = 10.27$	$p < .01$
Curso X Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	$F(9, 552) = 2.69$	$p < .01$
Contexto X Curso X Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	$F(9, 552) = 2.14$	$p < .05$

Los niños urbanos de segundo año contrastan en el nivel verbal de cambio disminución con incógnita cantidad final respecto a los niveles numérico y dibujos $F(3, 182) = 2.65$, $p = .05$. Estos escolares también tienen diferencias significativas en los niveles concreto y dibujos en cambio disminución con la incógnita cantidad inicial, en relación con los niveles numérico y verbal $F(3, 182) = 3.73$, $p < .05$. Asimismo, desarrollan más los niveles superiores de abstracción en los problemas fáciles de cambio disminución, mientras que expresan más los niveles inferiores de abstracción en los problemas difíciles con la misma operación.

Por su parte, los niños urbanos de tercer año contrastan en el nivel numérico de cambio aumento con la incógnita cantidad inicial sobre los niveles concreto, dibujos y verbal $F(3, 182) = 3.30$, $p < .05$. Además, muestran diferencias significativas en el nivel dibujos de cambio disminución con la incógnita cantidad final respecto al nivel concreto, así como en los niveles numérico y verbal de cambio disminución con la incógnita cantidad final en relación con los niveles concreto y dibujos $F(3, 182) = 11.88$, $p < .01$. En este curso se emplean más los niveles superiores de abstracción tanto en los problemas fáciles como difíciles de cambio disminución.

Analicemos con más detalle los efectos simples del factor contexto en los niveles de los demás factores. El análisis revela diferencias significativas en el rendimiento de los escolares urbanos de primer año con respecto a los rurales en el nivel dibujos de cambio aumento con la incógnita cantidad final $F(3, 184) = 5.72$, $p < .05$. Los alumnos urbanos son más pictóricos que los rurales en los problemas fáciles de cambio aumento.

También hay diferencias significativas en el rendimiento de los alumnos urbanos de segundo año y los rurales en el nivel concreto de cambio aumento con la incógnita cantidad inicial, en el nivel concreto de cambio disminución con la incógnita cantidad final, en el nivel dibujos de cambio disminución con la incógnita cantidad final, en el nivel dibujos de cambio disminución con la incógnita cantidad inicial y en el nivel numérico de cambio aumento con la incógnita cantidad final [$F(1, 184) = 5.90$, $p < .05$; $F(1, 184) = 3.96$, $p < .05$; $F(1, 184) = 3.98$, $p < .05$; $F(1, 184) = 6.15$, $p < .05$; $F(1, 184) = 9.73$, $p < .01$, respectivamente]. Los niños urbanos de segundo año son más concretos que los rurales en los problemas difíciles de cambio aumento y en los fáciles de cambio disminución. Además, los escolares urbanos son más pictóricos que los rurales en los problemas difíciles de cambio disminución y más numéricos en los fáciles de cambio aumento.

Igualmente, los alumnos urbanos de tercer año difieren con respecto a los rurales en los niveles concreto y dibujos de cambio aumento con la incógnita cantidad final, y en el nivel numérico de cambio aumento con la incógnita cantidad inicial [$F (1, 184) = 5.90$, $p < .05$; $F (1, 184) = 5.90$, $p < .05$; $F (1, 184) = 5.90$, $p < .05$; $F (1, 184) = 5.90$, $p < .05$; $F (1, 184) = 5.90$, $p < .01$, respectivamente]. Los alumnos urbanos emplean más que los rurales los niveles inferiores de abstracción en los problemas fáciles de cambio aumento, mientras que los rurales difieren significativamente de los urbanos en el nivel concreto de cambio disminución con la incógnita cantidad final $F (1, 184) = 3.96$, $p < .05$.

La Figura 2 ilustra la puntuación media en los niveles de abstracción de los alumnos de primaria, tanto en el contexto rural como en el urbano.

Existe un patrón evolutivo en ambos grupos, aunque los niños de primero y segundo año tienden a limitar su proceso de abstracción. También se aprecia un mejor desarrollo a partir de tercero hasta cuarto año. Las diferencias de rendimiento entre los alumnos de ambos contextos indican un predominio de los alumnos urbanos hasta tercer año, pues en cuarto destacan más los rurales.

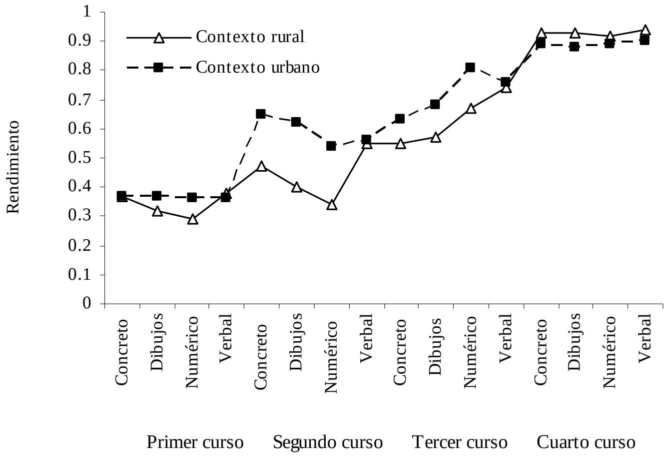


Figura 2. Niveles de abstracción de los alumnos de primaria de los contextos rural y urbano.

En conformidad con el primer objetivo de esta investigación, conviene resaltar que según las puntuaciones medias los niños urbanos rinden mejor que los rurales durante los tres primeros años, especialmente en segundo y tercero. También es pertinente subrayar que ambos contextos muestran un patrón evolutivo en el rendimiento, que se incrementa de acuerdo con los problemas más abstractos en los dos últimos cursos y con la incógnita cantidad final. En cambio, los alumnos de primero y segundo año –sobre todo este curso, particularmente los niños rurales– obtienen mejores rendimientos en las tareas más concretas, excepto en los problemas verbales, donde hay mejores rendimientos en el contexto rural. Tal hecho se debe probablemente al efecto significativo del aprendizaje informal de dichos escolares. Por otra parte, las tareas de cambio aumento se resuelven en general mejor que las de cambio disminución, con excepción de las que tratan la incógnita cantidad inicial.

Si bien no hay en general un efecto del factor contexto, se encuentran algunas diferencias significativas entre los contextos. Por ejemplo, los alumnos rurales de segundo año recurren especialmente a los niveles inferiores de abstracción en los problemas fáciles de cambio aumento, mientras que los urbanos emplean dichos niveles en los problemas fáciles de cambio disminución. Por tanto, aunque la evolución del pensamiento matemático infantil no se determina por los factores sociales, éstos influyen en las diferencias individuales de las competencias necesarias para resolver un problema de cambio aumento o cambio disminución. Así, vale la pena resaltar que los alumnos rurales obtienen sus mejores rendimientos en todos los cursos en el nivel verbal.

En cambio, con respecto a los demás niveles de abstracción, en primero y segundo año el rendimiento se incrementa en sentido inverso al nivel de abstracción, de modo que cuanto más concreta es la situación, más fácil les resulta a los niños más pequeños. Sin embargo, esa tendencia cambia en los alumnos de tercer año, en el sentido de que lo concreto puede llegar a ser un distractor al resolver los problemas. Por tanto, el uso de objetos o dibujos en el aprendizaje de las matemáticas parece eficaz en los inicios del aprendizaje, mas dejaría de serlo cuando el aprendizaje está avanzado o conseguido. Además, es necesario precisar que aunque no hay diferencias significativas en el rendimiento entre los alumnos de distinto contexto, se continuará analizando la variable contexto en el empleo de estrategias durante la solución de problemas, en virtud de que se han identificado diferencias relevantes en los procedimientos manifestados por los alumnos de distintos contextos (Saxe, 1991).

4.2. *Análisis de las estrategias*

Para analizar las estrategias de los alumnos en ambos contextos hicimos tres análisis de varianza (ANOVA) mixto 2 (contexto: rural vs. urbano) X 4 (curso: primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) X 4 (nivel de abstracción: concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) X 2 (operación: cambio aumento vs. cambio disminución) X 2 (lugar de la incógnita: cantidad final vs. cantidad inicial), poniendo medidas repetidas en los tres últimos factores con cada tipo de estrategia, mediante el programa SPSS 11.0. Las estrategias de modelado directo, conteo y hechos numéricos se consideraron como variables dependientes.

Respecto a las estrategias de modelado directo, se encuentran efectos principales de los factores curso $F(3, 184) = 5.97$, $p < .05$, nivel de abstracción $F(3, 552) = 28.89$, $p < .01$, operación $F(1, 184) = 28.95$, $p < .01$ y lugar de la incógnita $F(1, 184) = 84.36$, $p < .01$. Por tanto, el curso escolar, nivel de abstracción, operación y lugar de la incógnita afectan a la frecuencia con la que los alumnos utilizan dicha estrategia. En otras palabras, el uso de las estrategias de modelado directo depende del curso al que pertenecen los alumnos; cambia según el nivel de abstracción presentado; se modifica cuando la operación es cambio aumento o cambio disminución, y depende si la incógnita se ubica en la cantidad final o inicial de la operación.

En el estudio de comparaciones múltiples de Tuckey, se hallan diferencias significativas entre los escolares de cuarto año con relación a los demás cursos ($p < .05$), mientras que los alumnos de tercero tienen diferencias respecto a los de segundo y primero ($p < .05$); sin embargo, las diferencias no son significativas entre los de segundo y primer año. Los datos son consistentes con otros estudios (Bermejo et al., 1998; Bermejo y Rodríguez, 1993; Carpenter, 1985, 1986) donde se muestra que las estrategias de modelado directo se emplean más en los primeros cursos que en los superiores. De igual manera, encontramos que el nivel concreto difiere del numérico y el verbal ($p < .01$).

La Tabla VII muestra los datos tocantes a las interacciones significativas en el uso de estrategias de modelado directo por parte de los participantes. En las siguientes figuras se presentan dos interacciones relevantes.

TABLA VII
Interacciones significativas
en el uso de estrategias de modelado directo (parte 1)

Interacciones	Valor F	Significancia
Contexto X Nivel de abstracción	$F(3, 552) = 4.01$	$P < .05$
Curso X Incógnita	$F(3, 184) = 3.63$	$P < .05$
Contexto X Curso	$F(3, 184) = 3.66$	$P < .05$
Contexto X Curso X Nivel de abstracción	$F(9, 552) = 2.22$	$P < .05$

TABLA VII
Interacciones significativas
en el uso de estrategias de modelado directo (parte 2)

Interacciones	Valor F	Significancia
Curso X Operación X Incógnita	F (3,184) = 11.73	P < .01
Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	F (3, 552) = 5.26	P = .01
Curso X Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	F (9, 552) = 5.03	P < .01
Contexto X Curso X Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	F (9, 552) = 2.00	P < .05

En la Figura 3 se aprecia la interacción entre el contexto y el nivel de abstracción, según las estrategias de modelado directo. El uso de tales estrategias cambia en los distintos contextos escolares, de acuerdo con el nivel de abstracción que tiene la tarea propuesta a los participantes. Ahora bien, el patrón evolutivo indica que los niveles concreto y dibujos se resuelven más con las estrategias de modelado directo, especialmente en el contexto urbano, mientras que los niños rurales las usan más que los urbanos en los niveles numérico y verbal. Los niveles inferiores de abstracción (concreto, dibujo) favorecen el uso de estrategias de modelado directo por todos los alumnos, mientras que en los superiores (numérico, verbal) se recurre menos a ellas, de manera especial en los alumnos urbanos, ya que los rurales siguen empleándolas con cierta frecuencia.

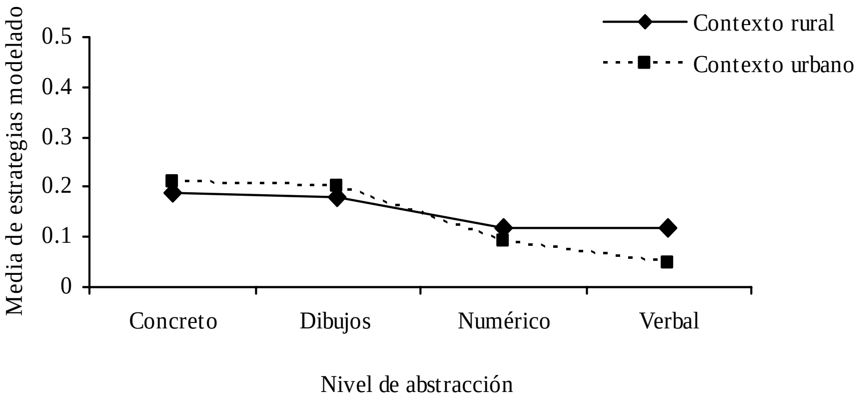


Figura 3. Interacción nivel de abstracción por contexto
en las estrategias de modelado directo.

Por tanto, en la construcción del conocimiento matemático los niños rurales usan más que los urbanos la manipulación de objetos cuando las tareas son más abstractas; en cambio, ante situaciones menos abstractas (objetos, dibujos) ambos grupos de escolares utilizan con más frecuencia las estrategias de modelado directo, especialmente los urbanos. Ello se debe probablemente a que la presentación de la tarea (situación más concreta) favorece su uso. Los resultados son consistentes con los planteamientos de otros autores (Saxe, 1991; Saxe y Gearhart, 1990) en el sentido de que el aprendizaje de las matemáticas implica una práctica especializada en los niños del contexto rural, quienes desarrollan habilidades espaciales superiores a las destrezas manifestadas por los del contexto urbano. Además, confirman los datos encontrados en otros estudios (Schliemann y Carraher, 2002) respecto a que las situaciones de aprendizaje contextuales son variables. En este caso, las situaciones de mayor o menor abstracción implican un aprendizaje distinto de estas estrategias, según el contexto escolar.

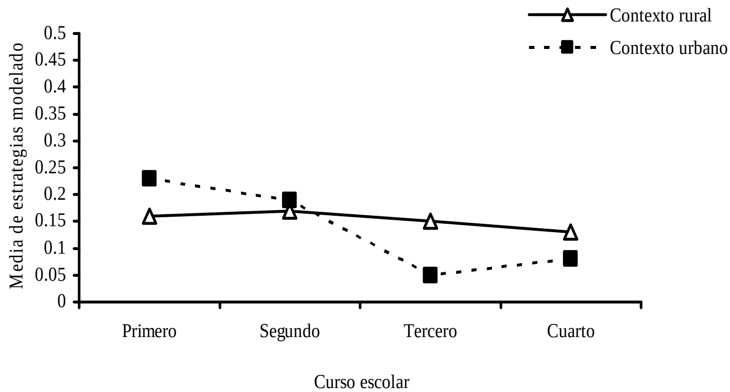


Figura 4. Interacción curso por contexto en las estrategias de modelado directo.

En la Figura 4 aparece la interacción curso por contexto en las estrategias de modelado directo. El análisis sobre los efectos simples del factor contexto en los niveles del factor curso indica diferencias significativas entre los alumnos de tercer año en el contexto rural y los del urbano: $F (1, 184) = 2.96$, $p < .05$, lo que confirma las diferencias mencionadas en torno a la evolución de los cursos superiores. Mientras los niños urbanos de tercero y cuarto año utilizan menos las estrategias de modelado directo, los rurales siguen empleándolas a lo largo de los cuatro años casi con la misma frecuencia. También se nota que la mayor frecuencia en el uso de dicha estrategia ocurre en los dos primeros años, como puede constatarse especialmente en el grupo urbano. Así, el análisis de los efectos simples del factor contexto en los niveles del factor curso señala que las diferencias son significativas entre primero y segundo con relación a tercero y cuarto año en el contexto urbano. Es decir, las estrategias de modelado directo se emplean más por los alumnos de los primeros cursos y menos en los cursos superiores. Tal patrón evolutivo es consistente con los planteamientos sobre el desarrollo de las estrategias básicas en los cursos inferiores (Carpenter y Moser, 1982; Bermejo et al., 1998), y confirma que la manipulación de objetos favorece la adquisición de conocimientos matemáticos, sobre todo al inicio de su aprendizaje.

Referente a las estrategias de conteo, el análisis detecta efectos principales en los factores contexto F (1, 184) = 8.53, $p < .05$, operación F (1, 184) = 75.17, $p < .01$ y lugar de la incógnita F (1, 184) = 30.33, $p < .01$. No hubo efecto del factor curso F (3, 184) = 1.91, $p = .12$ ni del factor nivel de abstracción F (3, 552) = 2.34, $p = .07$. Es decir, el contexto, tipo de operación y lugar de la incógnita afectan al uso de las estrategias de conteo.

Ahora bien, el estudio de comparaciones por pares con la prueba Tuckey revela que hay diferencias significativas al ocupar las estrategias de conteo en el factor contexto, ya que los alumnos rurales tienden a usarlas más que los urbanos ($p < .01$). En cuanto al factor operación, tales estrategias se usan más en cambio aumento que en cambio disminución ($p < .01$), mientras que en el factor incógnita se recurre más a ellas en los problemas con la incógnita cantidad final que con la incógnita cantidad inicial ($p < .05$).

TABLA VIII
Interacciones significativas
en el uso de estrategias de estrategias de conteo (parte 1)

Interacciones	Valor F	Significancia
Curso X Nivel de abstracción	F (9, 552) = 2.54	$p < .05$
Contexto X Operación	F (1, 184) = 9.34	$p < .05$
Nivel de abstracción X Operación	F (3, 552) = 8.03	$p < .01$
Nivel de abstracción X Incógnita	F (3, 552) = 7.22	$p < .01$
Operación X Incógnita	F (1, 184) = 20.36	$p < .01$
Contexto X Curso X Nivel de abstracción	F (9, 552) = 2.60	$p < .05$

TABLA VIII
Interacciones significativas
en el uso de estrategias de estrategias de conteo (parte 2)

Interacciones	Valor F	Significancia
Contexto X Nivel de abstracción X Operación	$F\ (3, 552) = 3.95$	$p < .05$
Curso X Nivel de abstracción X Operación	$F\ (9, 552) = 3.74$	$p < .01$
Curso X Nivel de abstracción X Incógnita	$F\ (9, 552) = 3.57$	$p < .01$
Curso X Operación X Incógnita	$F\ (3, 184) = 4.05$	$p < .05$
Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	$F\ (3, 552) = 6.54$	$p < .01$
Curso X Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	$F\ (9, 552) = 2.06$	$p < .05$

La Tabla VIII contiene las interacciones significativas correspondientes al empleo de estrategias de conteo. Una de ellas aparece en la Figura 5, que muestra la interacción contexto, curso y nivel de abstracción en las estrategias de conteo.

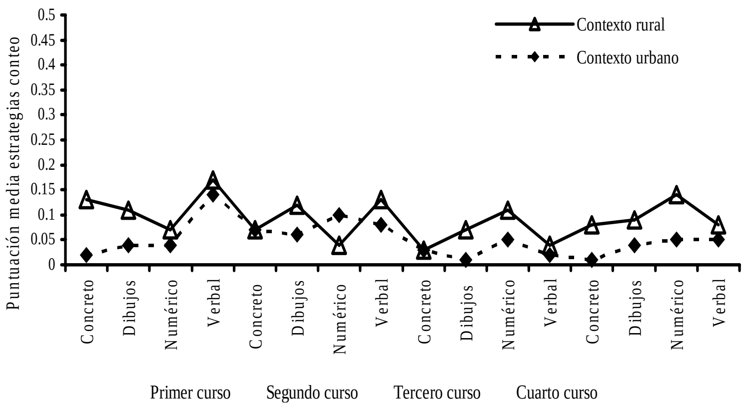


Figura 5. Interacción contexto por curso por nivel de abstracción en las estrategias conteo.

En dicha figura se observa que los alumnos de contexto rural utilizan en general dichos recursos más frecuentemente que los alumnos urbanos, especialmente los de tercero y cuarto año. Ello puede deberse a que en estos años los alumnos urbanos prefieren las estrategias de hechos numéricos.

Además, en el contexto rural en los dos primeros años se usan estas estrategias, sobre todo en el nivel verbal, mientras que en los dos últimos años se hacen en el nivel numérico.

En lo tocante a las estrategias de hechos numéricos, el análisis detecta efectos principales en los factores contexto $F(1, 184) = 13.05$, $p < .01$, curso $F(3, 184) = 88.39$, $p < .01$ y nivel de abstracción $F(3, 552) = 26.95$, $p < .01$. Por ende, el contexto, el curso escolar y el nivel de abstracción afectan al uso de las estrategias de hechos numéricos en los alumnos. Al hacer el estudio de comparaciones múltiples de Tuckey, hay diferencias significativas entre los escolares de cuarto año con relación a los demás cursos ($p < .05$), los alumnos de tercero muestran diferencias significativas respecto a los de segundo y primero ($p < .05$), y finalmente los niños de segundo difieren significativamente de los primero ($p < .05$). Dichos resultados concuerdan con los hallados por otros investigadores (Bermejo et al., 1998; Carpenter y Moser, 1982) en el sentido de que las estrategias de hechos numéricos son ocupadas principalmente por alumnos de cursos superiores. La comparación por pares con la prueba Tuckey en el factor contexto indica diferencias significativas del contexto urbano con respecto al rural ($p < .01$), de modo que los alumnos urbanos emplean con mayor frecuencia dichas estrategias que los rurales. Asimismo, hay diferencias en el factor nivel de abstracción, ya que el nivel verbal contrasta con los demás niveles ($p < .01$), mientras que el numérico difiere con los niveles concreto y dibujos ($p < .01$).

En la Tabla IX se presentan las interacciones significativas entre los alumnos al usar las estrategias de hechos numéricos; los urbanos recurren más a ellas, en comparación con los rurales.

TABLA IX
Interacciones significativas
en el uso de estrategias de hechos numéricos (parte 1)

Interacciones	Valor F	Significancia
Curso X Nivel de abstracción	$F(9, 552) = 2.80$	$p < .05$
Contexto X Operación	$F(1, 184) = 4.74$	$p < .05$
Curso X Incógnita	$F(3, 184) = 2.80$	$p < .05$
Nivel de abstracción X Operación	$F(3, 552) = 10.06$	$p < .01$
Nivel de abstracción X Incógnita	$F(3, 552) = 3.34$	$p < .05$
Operación X Incógnita	$F(1, 184) = 27.18$	$p < .01$

TABLA IX
Interacciones significativas
en el uso de estrategias de hechos numéricos (parte 2)

Contexto X Nivel de abstracción X Incógnita	*F* (3, 552) = 3.16	p < .05
Curso X Operación X Incógnita	F (3, 184) = 7.60	p < .01
Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	*F* (3, 552) = 8.83	p < .01
Contexto X Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	*F* (3, 552) = 2.65	p < .05
Contexto X Curso X Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	*F* (9, 552) = 2.86	p < .05

Con respecto al segundo objetivo, se afirma que los alumnos del contexto rural emplean más que los del urbano las estrategias de modelado directo y conteo en la mayoría de los niveles de abstracción. En cambio, los escolares de las escuelas urbanas superan a los de las rurales en el uso de las estrategias de hechos numéricos en todos los niveles de abstracción presentados en el estudio. Los resultados son consistentes con los de otros trabajos (Carraher et al. 1985; Saxe, 1991) sobre la cuestión necesaria de analizar el contexto social en el aprendizaje de las matemáticas, visto como una práctica específica. Los niños rurales son más concretos que los urbanos en el nivel verbal, lo cual reafirma la idea de la especificidad del conocimiento infantil. Por tanto, el patrón de estrategia se manifiesta a partir de una interacción social basada en el conocimiento informal que se adquiere mediante la manipulación de objetos cotidianos. Dicho patrón de desarrollo ocurre dentro de las características sociales de una cultura rural.

5. CONCLUSIONES

En esta investigación se confirman los siguientes planteamientos. Por una parte, la tendencia evolutiva que marca el rendimiento de los alumnos, pues en general el comportamiento de los participantes mejora sensiblemente a medida que se avanza de primero a cuarto año de educación primaria. También se comprueba la secuencia de abstracción de lo concreto a lo abstracto, aunque con patrones evolutivos diferentes, ya que en general durante los dos primeros años el rendimiento de los alumnos baja a medida que se incrementa el nivel de abstracción de las tareas propuestas, excepto en el nivel verbal, lo cual resulta especialmente notorio en los alumnos rurales. Sin embargo, en tercer año los rendimientos mejoran globalmente a medida que se incrementa el nivel de abstracción de los problemas aritméticos, debido a que en este nivel evolutivo la presencia de objetos o dibujos no sólo no facilitan, sino que probablemente funcionan como distractores a lo largo de la resolución de problemas.

Por otra parte, se confirma que la incógnita afecta significativamente al comportamiento matemático de los escolares, de modo que las tareas resultan más fáciles con la incógnita cantidad final que con la cantidad inicial. No obstante, tal afirmación hay que matizarla en función del tipo de situación matemática planteada, como hemos visto con cierto detalle. Finalmente, resaltamos la importancia del factor contexto socioeconómico, que si bien no ha sido estadísticamente significativo, las diferencias son notorias en algunos cursos y situaciones matemáticas. Así ocurre, por ejemplo, en segundo año de educación primaria, donde los alumnos urbanos puntúan muy por encima de los rurales, sobre todo en los niveles de abstracción concreto-dibujo-numérico. Sin embargo, no hay diferencias en el nivel verbal entre los alumnos urbanos y rurales en ninguno de los cuatro años que se han investigado en este trabajo.

Sobre las estrategias que ocupan los alumnos en la resolución de los problemas planteados, se verifica igualmente el empleo específico y variado de procedimientos. Los alumnos de primero y segundo utilizan el modelado directo más que los de tercero y cuarto de educación primaria. En cambio, no hay diferencias significativas entre los cursos respecto al uso de las estrategias de conteo, pero se observa un desarrollo progresivo entre los cursos en lo tocante al uso de los procedimientos de hechos numéricos.

Con respecto a los contextos rural y urbano, los alumnos rurales suelen utilizar la estrategia de modelado directo de modo parecido a lo largo de los cuatro años, mientras que los urbanos recurren a ella sobre todo durante los dos primeros cursos. En cuanto a las estrategias de conteo, los alumnos rurales las emplean con mayor frecuencia que los urbanos en los cursos más avanzados, mientras que las de hechos numéricos se desarrollan progresivamente a medida que avanzan los cursos escolares, siendo especialmente frecuente su empleo en los niños urbanos, sobre todo en los niveles verbal y numérico.

Desde el punto de vista de la práctica educativa, esta investigación evidencia el desajuste en la planificación de la enseñanza formal y el desarrollo del conocimiento matemático infantil; por ejemplo, los alumnos rurales obtienen mejor rendimiento en los problemas verbales que en el algoritmo. El aprendizaje mecánico de los alumnos quedó de manifiesto en la solución de los problemas, una situación que atañe al diseño de los libros de texto, el cual se orienta fundamentalmente al aprendizaje memorístico.

Ahora bien, esos textos podrían modificarse por una metodología que modele la comprensión de los problemas de cambio aumento y cambio disminución. Resulta pertinente proponer el aprendizaje de estas operaciones en función de la secuencia del nivel de abstracción y la estructura semántica de los problemas en el aula de matemáticas. Por tanto, huelga recomendar la implantación del marco teórico-metodológico constructivista en el proceso de instrucción de las matemáticas en el aula.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bagni, G. (2000). “Simple” rules and general rules in some high school students’ mistakes. *Journal für Mathematik Didaktik 21*(2), 124-138.

Abreu, G. de (1995). Understanding how children experience the relationship between home and school mathematics. *Mind, Culture and Activity 2*(2), 119-142.

Abreu, G. de (1998). The mathematics learning in sociocultural contexts: the mediating role of social valorisation. *Learning and Instruction 8*(6), 567-572.

Alanís, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., Garza, A. y Rodríguez, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Baroody, A. J. (1987). The development of counting strategy for single-digit addition. *Journal for Research in Mathematics Education 18*(2), 141-157.

Bermejo, V. (1990). *El niño y la aritmética*. Madrid, España: Paidós.

Bermejo, V. (2004). *Como enseñar matemáticas para aprender mejor*. Madrid, España: CCS.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y Aprendizaje*, 39-40, 71-81.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1993). La operación de sumar: competencia conceptual vs. competencia de procedimiento. En J. A. Beltrán, L. Pérez, E. González, R. González y D. Vence. (Eds.), *Líneas actuales en la intervención psicopedagógica I: Aprendizaje y contenidos del currículum* (pp. 711-726). Madrid, España: Universidad Complutense.

Bermejo, V., Lago, M. O. y Rodríguez, P. (1998). Aprendizaje de la adición y sustracción. Secuenciación de los problemas verbales según su dificultad. *Revista de Psicología General y Aplicada 51*(3-4), 533-552.

Bermejo, V., Lago, M. O., Rodríguez, P., Dopico, C. y Lozano, J. M. (2002*) PEI. Un programa de intervención para la mejora del rendimiento matemático*. Madrid, España: Editorial Complutense.

Brown, J. S., Collins, A. y Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher 18,* 32-42.

Carpenter, T. P. (1985). Learning to add and subtract: An exercise in problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 17-40). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge: implications from research on the initial learning of arithmetic. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 113-132). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P., Hiebert, J. y Moser, J. M. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education 12*, 27-29.

Carraher, T. N., Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Development Psychology 3*, 21-29.

Carraher, T. N., Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (1987). Written and oral mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education 18*(2), 83-97.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first grader's strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education 18*(5), 363-381.

Fuson, K. C. y Willis, G. B. (1989). Second grader's use of shematic drawings in solving addition and subtracion word problems. *Journal of Educational Psychology 81*, 514-520.

Kamii, C., Kirkland, L. y Lewis, B. A. (2001). Representation and abstraction in young children's numerical reasoning. In NCTM (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp.24-34). Reston, VA: NCTM.

Kamii, C., Lewis, B. A. y Kirkland, L. D. (2001). Manipulatives: when are they useful? *Journal of Mathematical Behavior 20*(1), 21-31.

Kato, Y., Kamii, C., Ozaki, K. y Nagahiro, M. (2002). Young children's representations of groups of objects: The relationship between abstraction and representation. *Journal for Research in Mathematics Education 33*(1), 30-45.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Nunes, T. N., Schliemann, A. D. y Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. New Cork, USA:Cambridge University Press.

OCDE (2002). Conocimientos y aptitudes para la vida. Resultados de Pisa 2000. México: Santillana Aula XXI

OCDE (2005). Informe Pisa 2003. Aprender para el mundo del mañana. Madrid, España: OCDE-Santillana.

Putnam, R. T., deBettencourt, L. U. y Leinhardt, G. (1990). Understanding of derived-fact strategies in addition and subtraction. *Cognition and Instruction 7*, 245-285.

Resnick, L. (1987). Learning in school and out. *Educational Researcher*, 1*6*, 13-20.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona, España: Horsori.

Riley, M. S., Greeno, J. G. y Heller, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. En H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). New York, USA: Academic Press.

Rogoff, B. (1990). Apprenticeship in thinking. Cognitive development in social context. New York, USA: Oxford University Press.

Saxe, G. B. (1991). Culture and cognitive development: Studies in mathematical understanding. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Saxe, G. B. (2002). Children's developing mathematics in collective practices. A framework for analysis. *Journal of the Learning Science 11*(2-3), 275-300.
Saxe, G. B. y Gearhart, M. (1990). The development of topological concepts in unschooled straw weavers. *British Journal of Developmental Psychology 8*, 251-258.
Schliemann, A. D. (1995). Some concerns about bringing everyday mathematics to mathematics education. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the XIX International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 45-60). Recife, Brazil.
Schliemann, A. D. y Carraher, D. W. (2002). The evolution of mathematical reasoning: Everyday versus idealized understandings. *Development Review 22*(2), 242-266.
Willis, G. B. y Fuson, K. C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology 80*(2), 192-201.
Wolters, M. A. D. (1983). The part-whole schema and arithmetical problems. *Educational Studies in Mathematics 14*(2), 127-138.

Autores

Juan José Díaz. Unidad Académica de Psicología, Universidad Autónoma de Zacatecas, México; jjdddl@mixmail.com

Vicente Bermejo. Facultad de Psicología, Universidad Complutense de Madrid, España.

ULDARICO MALAESPINA

INTUICIÓN, RIGOR Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

INTUITION, RIGOR AND RESOLUTION OF OPTIMIZATION PROBLEMS

RESUMEN. En este artículo analizamos cualitativa y cuantitativamente las soluciones de 38 estudiantes de ingeniería a dos problemas de optimización. Ocupamos un protocolo ad hoc y las herramientas teóricas configuración epistémica y configuración cognitiva, propuestas por el enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático. Los resultados indican que hay deficiencias en el uso de lenguaje formalizado, procedimientos, proposiciones y argumentos, así como una inadecuada interacción entre intuición, formalización y rigor.

PALABRAS CLAVE: Problemas de optimización, rigor, intuición, formalización, configuración epistémica, configuración cognitiva.

ABSTRACT. In this article we make a qualitative and quantitative analysis of the solutions of 38 engineering students to two optimization problems. We use an ad hoc protocol and epistemic configuration and cognitive configuration theoretic tools, proposed by the ontosemiotic approach of mathematical knowledge. The results indicate deficiencies in the use of formalized language, procedures, proposals and arguments, as well as an inadequate interaction between intuition, formalization and rigor.

KEY WORDS: Optimization problems, rigor, intuition, formalization, epistemic configuration, cognitive configuration.

RESUMO. Neste artigo analisamos qualitativa e quantitativamente as soluções de 38 estudantes de engenharia dos problemas de otimização. Utilizamos um protocolo ad hoc e as ferramentas teóricas configuração epistémica e configuração cognitiva, propostas pelo enfoque ontosemiótico do conhecimento matemático. Os resultados indicam que as deficiências no uso de linguagem formalizado, procedimentos, proposições e argumentos, assim como uma inadequada interação entre intuição, formalização e rigor.

PALAVRAS CHAVE: Problemas de otimização, rigor, intuição, formalização, configuração epistémica, configuração cognitiva.

RÉSUMÉ. Dans cet article nous analysons de manière qualitative et quantitativement les solutions de 38 étudiants d'ingénierie à deux problèmes d'optimisation. Nous avons employé un protocole

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2007) 10(3): 365-399
Recepción: Enero 22, 2007/Aceptación: Septiembre 14, 2007

ad hoc et les outils techniques configurations épistémique et configuration cognitive, proposées par l'approche ontosémiotique de la connaissance mathématique. Les résultats montrent que existent déficiences dans l'usage de : langage formel, procédures, propositions et arguments et une interaction inapproprié entre l'intuition, la formalisation et la rigueur.

MOTS CLÉS: problèmes d'optimisation, rigueur, intuition, formalisation, configuration épistémique, configuration cognitive.

1. INTRODUCCIÓN

Con frecuencia, en la vida cotidiana estamos resolviendo muchos problemas de optimización. Por ejemplo, buscamos el mejor camino para ir de un lugar a otro –no necesariamente el más corto–, tratamos de hacer la mejor elección al hacer una compra, buscamos la mejor ubicación cuando vamos a un cine o a un teatro, tratamos de enseñar lo mejor posible, escogemos al mejor candidato (o al menos malo) en una elección. Evidentemente, en ninguno de estos casos usamos matemática formalizada para encontrar lo que nos proponemos, pues afrontamos los problemas con los criterios que nos dan la experiencia y la intuición, aunque no necesariamente hallemos la solución óptima.

Asimismo, en las ciencias naturales y sociales se dan problemas de optimización, ya sea en situaciones prácticas o como parte de un modelo matemático. Por ejemplo, la teoría económica neoclásica tiene como elementos fundamentales la maximización de la función de utilidad del consumidor y la minimización de costos del productor; mientras que en la física se plantean los problemas de maximización de la entropía y minimización de la energía. En tales casos, se deben tratar los problemas con rigor y cuidado.

En la matemática misma hay gran variedad de problemas de optimización. Muchos de ellos han surgido de la realidad y han sido resueltos en forma rigurosa, aportando no sólo la solución misma, sino también métodos y hasta teorías. Ponemos como ejemplos el antiguo problema isoperimétrico, el cual consiste en hallar entre todas las curvas cerradas del plano, de un perímetro dado, la que encierra una región de área máxima; obtener valores extremos de funciones continuas, o determinar una superficie de revolución que encuentre la mínima resistencia al desplazarse en algún medio resistente.

Problemas de tal índole generalmente son estudiados en carreras científicas en las universidades. Así, vemos cómo una actividad mental e intuitiva que se practica permanentemente en la vida diaria –independientemente del grado de éxito que se obtenga– es conocida y tratada de manera formal y rigurosa en los primeros cursos del nivel universitario, o aparece como introducción en cursos de cálculo diferencial para estudiantes de 16 ó 17 años. Consideramos que esto ofrece una muestra de que la enseñanza de las matemáticas no siempre aprovecha las potencialidades que se van generando al resolver problemas concretos de la vida diaria; más aún cuando hay y es posible crear muchísimas situaciones atractivas y lúdicas, donde la dificultad principal radica en obtener un valor máximo o mínimo. Ante ellas, los estudiantes de primaria y secundaria pueden ejercitar su intuición y capacidades de conjeturar, demostrar o rechazar sus conjeturas, y otras vinculadas con el pensamiento matemático que fortalecen el pensamiento científico, tan necesario y útil en la sociedad del conocimiento y la información en que estamos inmersos. En Malaspina (2005) se presentan algunos problemas de optimización adaptables a diversos niveles educativos.

Por otra parte, durante nuestra experiencia didáctica en la universidad hemos observado que jóvenes que ya han estudiado los capítulos de máximos y mínimos en los cursos de cálculo diferencial, al resolver los problemas usan casi mecánicamente los criterios conocidos de la primera y segunda derivada. Sin embargo, no han desarrollado una actitud científica que conjugue la intuición, la conjetura, la formalización y el rigor ante otros problemas de optimización, donde la dificultad no radique en obtener el valor óptimo de una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado. En la Figura 1 ilustramos las relaciones entre la intuición, la habilidad para hacer conjeturas y la formalización y el rigor, que consideramos se deberían estimular al resolver problemas en general, y de manera especial los de optimización.

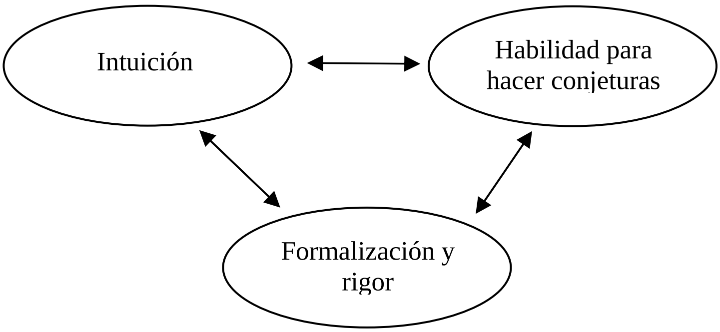


Figura 1. Relaciones que se deberían estimular al resolver problemas, especialmente los de optimización.

En el presente trabajo ponemos especial atención a las relaciones entre la intuición y la formalización y el rigor, que han sido motivo de estudios y debates en diversos campos de la matemática y diferentes ámbitos académicos. Tenemos, por ejemplo, el libro *Conflicts between generalization, rigor and intuition. Number concepts underlying the development of analysis in 17th-19th century France and Germany* (Schubring, 2005); la conferencia plenaria *Intuition and rigor in mathematics education*, anunciada para el Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI, que se celebrará en Roma en marzo del 2008, y los artículos de Cohn (1995), Roldán y Crobeiro (2001). En el último artículo, las autoras afirman que “hacer matemática significa entonces intuir y formalizar. De modo que intuición y formalización son conceptos indisolublemente unidos, siendo así que entrenar la intuición en matemáticas significa a la vez entrenar la capacidad de concientizar dicha capacidad, para poder formalizar los resultados” (p. 135).

Consideramos que un problema importante en la didáctica de la matemática es lograr que los aprendizajes que van acumulando los estudiantes potencien su intuición y capacidad de resolver problemas. En ese marco, nos planteamos la siguiente pregunta: *¿En qué medida la formalización y el rigor que se inducen en las clases de matemáticas en los primeros ciclos universitarios, particularmente en un curso de cálculo diferencial, potencian la intuición de los estudiantes al resolver problemas de optimización?*

A fin de aportar elementos para dar algunas respuestas a esta pregunta, profundizar investigaciones y hacer propuestas, en este artículo indagamos acerca del uso de la intuición, de la formalización y el rigor en la resolución de problemas de optimización. Usamos las configuraciones epistémicas y cognitivas del Enfoque Ontosemiótico –EOS– del Conocimiento Matemático (Godino, Batanero y Font, 2007) para examinar cualitativamente las soluciones de 38 estudiantes de ingeniería a dos problemas, y registramos la información con un protocolo ad hoc.

De manera específica, proponemos analizar:

- La presencia o ausencia de conceptos, proposiciones y procedimientos, así como sus vínculos con la obtención de respuestas correctas al resolver los problemas de optimización planteados.

- Las argumentaciones y los nexos de ellas con el uso de lenguaje formalizado y la obtención de respuestas correctas a los problemas planteados.

- Si los alumnos consideran la justificación del carácter de óptimo de la respuesta que alcanzan en cada problema.

- En qué medida el uso del lenguaje formal contribuye a una argumentación adecuada.

- En qué medida quienes obtuvieron una respuesta correcta usaron un lenguaje formal y justificaron que tal respuesta tiene el carácter de óptimo.

El presente trabajo forma parte de una investigación más amplia, que plantea como algunas de sus hipótesis a ser trabajadas a las siguientes:

- Las formalizaciones y el rigor que se usan en las clases de matemáticas en los primeros ciclos universitarios, particularmente en cursos de cálculo diferencial, no hacen un aporte fuerte al desarrollo de la intuición para resolver problemas no rutinarios de optimización.

- Una deficiencia en la formación científica de los estudiantes de segundo o tercer ciclo universitario radica en que no usan adecuadamente lenguaje formalizado, proposiciones, procedimientos y argumentos cuando resuelven problemas de optimización.

En el segundo apartado de este trabajo expondremos el marco conceptual, precisando lo que entendemos por problema, problema de optimización y formalización, así como el rigor y la intuición al resolver un problema. Presentaremos también, de manera muy resumida, lo que son las configuraciones epistémica y cognitiva en el EOS. En la tercera parte daremos los enunciados de los problemas que propusimos a los estudiantes, y explicitaremos las configuraciones epistémicas de los problemas propuestos con base en las *soluciones expertas* de un destacado alumno que cursa el tercer ciclo universitario. En la cuarta sección describiremos la metodología, en la quinta mostraremos los resultados, y en la sexta enunciaremos algunas conclusiones, haremos algunas propuestas y daremos algunas pistas para profundizar en el análisis de los resultados.

2. MARCO CONCEPTUAL

Estamos asumiendo un sentido amplio de lo que significa *problema*, al concebirlo como toda situación que requiera analizar la información, establecer relaciones lógicas y obtener conclusiones. Además, vemos al *problema de optimización* como aquel cuyo objetivo fundamental es la obtención de un valor máximo o mínimo de una determinada variable, teniendo en cuenta las restricciones del caso; la obtención de una estrategia o conjunto de pasos que constituyen la mejor elección para obtener determinado fin, o que el valor óptimo o la mejor estrategia no existen. Esta manera de considerar los problemas de optimización incluye los casos de *variaciones continuas* (los valores que pueden tomar las variables son todos los elementos de un intervalo de números reales) y *variaciones discretas* (los valores que pueden tomar las variables son todos los de un subconjunto de los números enteros). Otra forma de enunciar los problemas consiste en pedir la demostración de que determinado valor (o estrategia) es el óptimo (o la óptima) para una determinada situación.

Ahora bien, los problemas de máximo y mínimo que usualmente se plantean en el cálculo diferencial atañen a la optimización, pues definen funciones de variables continuas, aunque no todos requieren de manera indispensable el uso del cálculo diferencial. También quedan incluidos problemas como el que aparece en el conocido juego de las Torres de Hanoi, al determinar el menor número de movimientos con los que se pueden trasladar, por ejemplo, los cuatro discos de una varilla a otra.

Sobre la intuición en matemáticas, recordamos que algunas maneras de entenderla han sido las siguientes: 1) la intuición es algo opuesto a lo riguroso; 2) lo intuitivo es visual; 3) la intuición nos permite conocer la verdad de algo, sin necesitar demostración alguna; 4) la intuición nos da una perspectiva holística o integradora (entendido como contrario a detallado o analítico). Un punto de vista sobre la intuición que puede alcanzar un alto grado de consenso es el siguiente: *idea que posee dos propiedades fundamentales, a) inmediatez (evidencia intrínseca) y b) certeza (sin necesidad de demostración)*. La intuición nos hace sentir seguros de la verdad de lo que afirmamos y hace que consideremos innecesaria su demostración rigurosa. Con base en este último enfoque, siguiendo a Fischbein (1994), entederemos por intuición:

> A special type of cognition characterized by self-evidence and immediacy: an intuitive cognition appears subjectively to the individual as directly acceptable, without the need for an extrinsic justification– a formal proof or empirical support (p. 200).

En este sentido, si un participante da una respuesta correcta a un problema, sin dar explicaciones a los pasos, consideramos que su solución es intuitiva; sin embargo, las intuiciones no se revelan únicamente en las respuestas correctas, ya que también se encuentran en afirmaciones consistentes y encaminadas a una respuesta correcta. Ahora bien, hay una formalización en la resolución de un problema de optimización si el participante ocupa ecuaciones, define funciones y aplica teoremas o resultados matemáticos; usa gráficos, diagramas o cuadros, o bien establece una notación para un manejo sistemático de la información o de las operaciones que considera necesario hacer. Es pertinente recordar lo que Dubinsky (2000) dice acerca del formalismo en matemáticas: "By formalism, I am referring to sets of symbols, put together according to certain rules of syntax or organization, intended to represent mathematical objects and operations" (p. 224).

Acerca del rigor, en forma usual se ha vinculado su estudio a la prueba o demostración. En tal sentido, al examinar el rigor en la solución de un problema consideramos a ésta como la *prueba* o demostración de los resultados (parciales y final) que se obtienen. Una solución rigurosa de un problema de optimización deberá mostrar buen uso de argumentos, con secuencias lógicas en sus afirmaciones y, en particular, con una justificación que *el resultado es óptimo*.

Estas ideas de *problema*, *intuición*, *formalización* y *rigor* se pueden tratar de manera integrada mediante ciertos constructos que propone el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Font y Godino, 2006; D'Amore y Godino, 2007; Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006; Godino, Batanero y Font, 2007; Ramos y Font, 2006; Godino, Font y Wilhelmí, 2006), en especial los de *configuración epistémica* y *configuración cognitiva*.

El EOS considera que es necesario contemplar una ontología formada por los siguientes elementos:

1. Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual).
2. Situaciones-problemas (aplicaciones intra o extramatemáticas, ejercicios).
3. Conceptos-definición (introducidos mediante definiciones o descripciones), como recta, punto, número, media, función.
4. Proposiciones (enunciados sobre conceptos).
5. Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
6. Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo).

Estos seis tipos de objetos se articulan formando configuraciones *epistémicas* (Figura 2), si adoptamos un punto de vista institucional, o *cognitivas* si adoptamos un punto de vista personal. El análisis de dichas configuraciones nos informa sobre la *anatomía de la actividad matemática*.

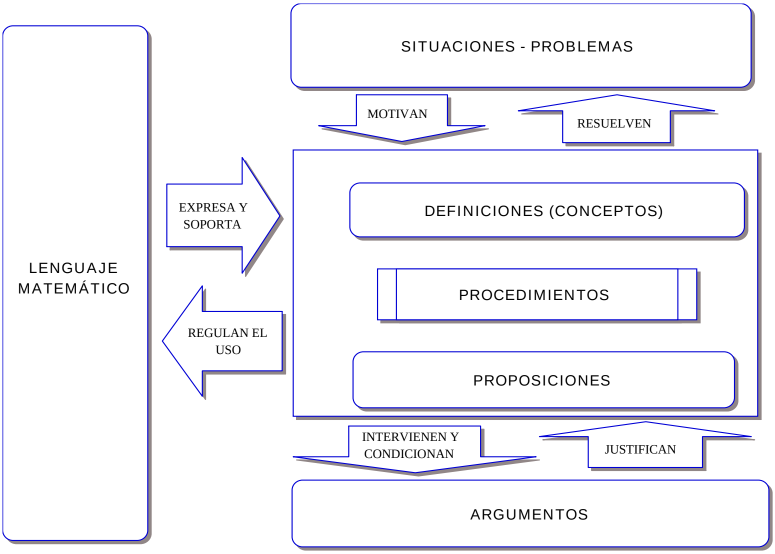


Figura 2. Componentes y relaciones en una configuración epistémica.

Estas herramientas teóricas ya se han empezado a utilizar para el análisis de la resolución de problemas, como muestra la tesis doctoral de Gusmao (2006).

Si además de la *estructura* se buscara analizar el *funcionamiento* (cómo interactúan los objetos) en una perspectiva temporal y dinámica, sería necesario recurrir a otra herramienta teórica del EOS –aún en elaboración–: la de los *procesos*, que exponen Font, Contreras y Rubio (2007). Dichos autores señalan que en el EOS no se intenta dar, de entrada, una definición de *proceso* debido a que hay muchas clases diferentes de procesos. Se puede hablar de proceso como secuencia de prácticas, o bien de procesos cognitivos, metacognitivos, de instrucción, de cambio, sociales, etc. Son procesos muy diferentes en los que, quizás, la única característica común a muchos de ellos sea el factor *tiempo* y, en menor medida, el de *secuencia en la que cada miembro toma parte en la determinación del siguiente*. Por tanto, el EOS, en lugar de ofrecer una definición general de proceso, ha optado por seleccionar una lista de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática, sin pretender incluir en ella a todos”. Los procesos son: algoritmización, argumentación, enunciación, definición, comunicación, problematización, particularización, generalización, materialización, idealización, reificación, descomposición, significación, representación, institucionalización y personalización. En relación con la resolución de problemas, aclaran:

La resolución de problemas, y de manera más general la modelización, debe ser considerada más bien como hiperprocesos matemáticos, al implicar configuraciones complejas de los procesos matemáticos primarios (establecimiento de conexiones entre los objetos y generalización de técnicas, reglas y justificaciones). La realización efectiva de los procesos de estudio requiere, además, la de las secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación (supervisión) que conllevan procesos metacognitivos (Godino, Batanero y Font, 2006, p. 9)[1]

El artículo citado hace una síntesis sobre el estado de desarrollo actual del EOS, donde se refiere la incorporación de determinados *procesos matemáticos* al marco teórico. Por ello, transcribimos el esquema con el que muestran una parte de las diferentes nociones teóricas propuestas por el EOS (Figura 3). Los autores dicen que:

En este enfoque la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos, que están relacionados entre sí formando configuraciones epistémicas (hexágono). Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales (decágono). Tanto las dualidades como los objetos se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a los procesos que se recogen en la figura (Font, Contreras y Rubio, 2007, pp. 2-3).

La respuesta dominante en las instituciones universitarias, ante la crisis de fundamentos en los finales del siglo XIX, consistió en sustentar toda la matemática en los números naturales y éstos en la teoría de conjuntos axiomatizada por Zermelo –con axiomas ad hoc que impidan la aparición de las contradicciones conocidas, mas conservando en lo posible la riqueza y agilidad de la teoría intuitiva de conjuntos. Tal solución, llamada normalmente *formalismo contemporáneo* o *conjuntismo*, es descendiente del formalismo hilbertiano, pero no se apega de manera exacta.

Este tipo de formalismo (Mosterín, 1980) plantea que en la evolución y desarrollo de las teorías matemáticas hay que considerar como mínimo tres estadios sucesivos, que corresponden a tres diferentes niveles de precisión y rigor en el concepto de prueba. En el primer estadio, llamado *informal* o *ingenuo*, se prueban los enunciados de la teoría, pero no se dice ni de dónde

[1] Godino, J. D.; Batanero, C. y Font, V. (2006). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España*. [Una versión resumida de este trabajo es el artículo Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education 39* (1-2), 127-135].

parte la prueba ni cuáles son los procedimientos admisibles para probar. El segundo estadio, denominado *axiomático*, determina el punto de partida de la prueba, elige ciertos enunciados de la teoría como axiomas y exige que todos los demás sean probados a partir de ellos, aunque sigue sin explicitarse cuáles son los procedimientos, reglas o medios de prueba admisibles. En el tercer y último estadio, llamado *formalizado*, el concepto de prueba está completamente precisado y explicitado, tanto en lo que respecta al punto de partida de la prueba como a los medios de prueba permitidos. El tercer estadio es más propio de los lógicos que de los matemáticos, mientras que los dos primeros son los propiamente matemáticos.

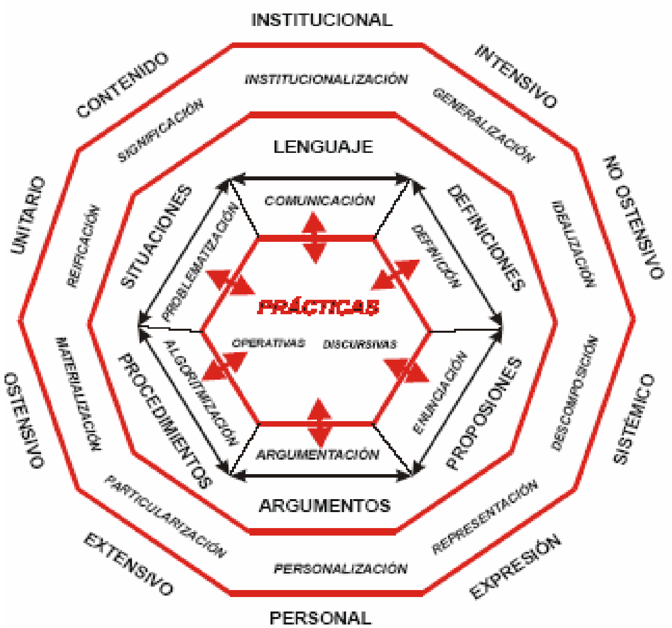


Figura 3. Modelo ontosemiótico de los conocimientos matemáticos.

En esta investigación nos hemos situado en el primer estadio (informal o ingenuo). Por tanto, consideramos que un alumno muestra rigor cuando hace algún tipo de prueba, lo cual se puede ver como un intento de dar una justificación correspondiente al primero de los tres niveles que se han comentado en el desarrollo de las teorías matemáticas. Si la investigación se hubiera realizado con universitarios que estudian matemáticas puras, el rigor exigido podría ser el segundo nivel. Desde el primer nivel de rigor se puede hacer una gradación, según el tipo de prueba que haya efectuado el alumno (por ejemplo, ausencia de prueba, un razonamiento mediante un ejemplo, un ejemplo cuidadosamente seleccionado o un ejemplo genérico, o bien un razonamiento lógico a partir de proposiciones conocidas, inducción completa, etc.).

Si realizamos las configuraciones cognitivas de las soluciones de los estudiantes, las examinamos y comparamos con la configuración epistémica de referencia que adoptamos para cada problema, encontraremos información valiosa que responde a los objetivos específicos planteados y da elementos para hacer conjeturas sobre las relaciones entre rigor, formalización e intuición. Así, los resultados correctos sin explicitar procedimientos, proposiciones ni dar argumentos revelarían una presencia fuerte de lo intuitivo, mientras que usar proposiciones y procedimientos formales sin llegar a una respuesta correcta o constituir una secuencia argumentativa correcta –que culmine en la justificación del carácter de óptimo para el resultado– daría poco aporte a lo intuitivo, formal y riguroso que normalmente debería tener un curso de cálculo diferencial para estudiantes de ingeniería.

3. PROBLEMAS PROPUESTOS Y CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS

Para el estudio empírico propusimos a los alumnos los problemas que incluye el Cuadro I. En el primero hay que considerar variaciones continuas y podría resolverse recurriendo al cálculo diferencial –aunque no necesariamente–, y en el segundo a variaciones discretas.

CUADRO I
Problemas de optimización considerados en el estudio

Problema 1	Problema con variaciones continuas
Hallar en el plano cartesiano cuatro puntos de coordenadas enteras, de modo que sean los vértices de un paralelogramo cuyo perímetro sea 28 y cuya área sea máxima.	
Problema 2	Problema con variaciones discretas
Llamamos *paso* aplicado a un número, cuando se le multiplica por 2 ó cuando se le disminuye en 3 unidades. Hallar el menor número de pasos que se deben aplicar para obtener el número 25, partiendo del número 11.	

Como cada problema puede tener más de una configuración epistémica de referencia, dependiendo entre otros aspectos del nivel y del contexto en que se aplique, en esta investigación tuvimos en cuenta las soluciones de un destacado alumno universitario de tercer ciclo, ganador de medallas en olimpiadas matemáticas de ámbito internacional. Por ello, en lugar de partir de las soluciones de un profesor preferimos examinar, entre varios expertos, los modos en que enfoca los problemas un estudiante con habilidades matemáticas reconocidas, de edad y nivel académico similares a los que tienen los alumnos contemplados en el estudio. Sus primeras soluciones a los problemas fueron correctas, pero se juzgaron como muy originales o singulares al analizarlas con los otros expertos. Estuvimos de acuerdo en que muy pocos o ninguno de los alumnos los resolvería de esa manera, por lo cual se le pidió al sobresaliente estudiante que desarrollara otras soluciones, que fueron aceptadas como válidas por los otros expertos y adoptadas como referentes para hacer las correspondientes configuraciones epistémicas.

3.1. *Análisis epistémico del problema 1, con variaciones continuas*

CUADRO II

Configuración epistémica del problema de optimización de variación continua (Parte 1)

Objetos matemáticos	Especificaciones
Lenguaje	- *Términos y expresiones*: Área, longitud, expresiones algebraicas, desigualdades e igualdades. - *Representaciones*: Dibuja un paralelogramo con lados no perpendiculares, asignando variables a las longitudes de sus lados y a un ángulo interior.
Situación-problema	Problema intramatemático, de contexto geométrico, isoperimétrico, con variaciones continuas.
Conceptos	Perímetro, área, vértices, números enteros, seno de un ángulo, cuadrado de una diferencia.
Proposiciones	- El área de un paralelogramo es el producto de las longitudes de dos lados y del seno del ángulo que forman. - En una diferencia de cuadrados, si el minuendo es constante y el sustraendo variable, el minuendo consiste en el valor máximo que puede tener tal diferencia. - El máximo valor de la función seno, si el ángulo está entre 0º y 180º, es cuando el ángulo mide 90º.

CUADRO II

Configuración epistémica del problema de optimización de variación continua (Parte 2)

Objetos matemáticos	Especificaciones
Procedimientos	- Observar que, manteniendo el perímetro, se obtienen distintas áreas del paralelogramo, ya sea variando las longitudes de los lados, los ángulos entre los lados o longitudes y ángulos. - Usando las proposiciones, obtener dos desigualdades para concluir que el área de un paralelogramo de perímetro 28 no puede ser mayor que 49. - Concluir que el paralelogramo es un cuadrado de lado 7.Escoger las coordenadas de los vértices. - Escoger las coordenadas de los vértices.
Argumentos	- Razonamiento deductivo. - Si todo elemento de un conjunto de números es menor o igual que un cierto número y existe un elemento particular que satisface la igualdad, entonces tal elemento es el máximo del conjunto.

Cabe precisar que las variables en este problema son: un ángulo entre los lados del paralelogramo y las longitudes de estos lados, con sus restricciones correspondientes.

3.2. *Análisis epistémico del problema 2, con variaciones discretas*

CUADRO III

Configuración epistémica
del problema de optimización de variación discreta (parte 1)

Objetos matemáticos	Especificaciones
Lenguaje	*Paso*: multiplicar, disminuir, dividir, sumar. *Representaciones*: Diagrama de árbol.
Situación-problema	Problema intramatemático, de contexto aritmético, con variaciones discretas.
Conceptos	Multiplicación, sustracción, número par, número impar, orden en los números naturales. *Implícitos*: Funciones inversas correspondientes a *multiplicar por 2* y a *disminuir 3 unidades*

CUADRO III

Configuración epistémica
del problema de optimización de variación discreta (parte 2)

Objetos matemáticos	Especificaciones
Proposiciones	- Con sólo multiplicaciones por 2 ó con sólo sustracciones de 3 unidades no se puede llegar a 25, partiendo de 11. - Para llegar a un número impar, el último paso no puede ser una multiplicación por 2. - Para llegar a 25, en el penúltimo paso se debe llegar a 28 y en consecuencia el último paso es disminuir 3.
Procedimientos	-Tanteo (aplicar algunos pasos). -Analizar todas las posibilidades empezando por el final. -Usar un diagrama de árbol, dando *pasos inversos* a los definidos *dividir entre 2* y *añadir 3*, eliminando ramas que se repiten. Observar que de los números impares saldrá solo una rama. -Descartar algunas ramas del árbol observando las repeticiones. -Contar el número de pasos seguidos al obtener *por primera vez* el número deseado. Las otras posibilidades, con mayor número de pasos, quedan eliminadas al ir quitando ramas que se repiten.
Argumentos	-Razonamiento inductivo-deductivo. -Tanteo inteligente. -Examinando todos los posibles *caminos* de 28 a 11, se puede escoger el *camino* más corto de 11 a 25, usando los pasos definidos.

Cabe precisar que en este problema la variable es el número de pasos para llegar a 25, partiendo de 11. Además, en el EOS las proposiciones consideradas no necesariamente tienen que ser conocimientos previos; también se consideran a las proposiciones que resultan en el proceso de resolución del problema y podrían estar explícitas o implícitas en las soluciones desarrolladas.

4. METODOLOGÍA

La metodología empleada tomó en cuenta cuatro ejes o dimensiones que, en el enfoque ontosemiótico, se designan como el *foco,* el *fin*, la *generalizabilidad y* el *nivel de la investigación*. El *foco* fue *epistémico* (configuraciones epistémicas institucionales) y, sobre todo, *cognitivo* (configuraciones cognitivas de los alumnos). El *fin* concernió, sobre todo, a la *descripción* de significados personales de los alumnos, mediante el estudio de sus configuraciones cognitivas. El nivel de *generalizabilidad* tuvo carácter e*xploratorio* ya que no se pretende generalizar los resultados a otros contextos o poblaciones, mientras que el *nivel* de análisis fue *puntual*, debido a que se pretendió investigar hechos y fenómenos ligados al estudio de una cuestión matemática específica en un contexto determinado.

Propusimos dos problemas de optimización, uno con variables continuas y otro con variable discreta, a 38 alumnos que cursaban el segundo o tercer ciclo universitario en sus estudios de diversas especialidades de ingeniería. Todos estaban matriculados en el curso electivo Matemática Recreativa y habían aprobado un curso de Matemática Básica y otro de Cálculo 1. Algunos estaban estudiando Cálculo 2 y otros ya estaban en Cálculo 3. Se les pidió que resolvieran los problemas individualmente y escribieran en la hoja que se les entregó todos sus cálculos, diagramas o dibujos, tanto los preliminares como los definitivos.

Las soluciones individuales fueron examinadas una a una, teniendo como referencia la configuración epistémica elaborada para cada problema. Se usó un protocolo ad hoc para registrar la información (ver Anexos I y II), prestando atención fundamentalmente a los procedimientos y argumentaciones; entre éstas, a la argumentación sobre el carácter de óptimo del resultado obtenido, propia de las soluciones rigurosas de problemas de optimización.

El análisis de nuestros datos está enmarcado por un proceso de triangulación de *opinión de expertos,* lo cual permite un estudio más cuidadoso y fino de los datos, al no dejar que prevalezcan sólo las primeras impresiones del investigador. Después de elaborada una primera versión del análisis, ésta fue sometida a la apreciación de expertos tanto en el EOS como en la resolución de problemas, tratando de refinarla.

Para procesar las soluciones de los alumnos, nos planteamos las siguientes preguntas: *¿Halla lo pedido? ¿Qué procedimiento sigue? ¿Argumenta por qué el valor obtenido es óptimo?* Y usamos el siguiente protocolo:

CUADRO IV
Protocolo ad hoc para el análisis
de la resolución de problemas de optimización.

Halla lo pedido	Sí No
Procedimiento que sigue	Tantea Considera todos los casos Formaliza Muestra sólo resultados
Argumenta porqué el valor obtenido es óptimo	No Incorrectamente Correctamente

5. RESULTADOS

Si bien hay muchas maneras de interrelacionar la información que se consigue al ocupar el protocolo, para esta investigación consideramos importante destacar cuatro casos con ítems de observación comunes a los problemas. Tengamos en cuenta que el Problema 1 es de variables continuas (VC) y el Problema 2 es de variable discreta (VD):

I. *Casos en los que mostraron sólo sus resultados (ausencia de argumentos y de procedimientos)*. Examinamos los subcasos de respuestas correctas y presentamos los porcentajes correspondientes (Figura 4).

II. Casos en los que presentaron formalizaciones (uso de lenguaje formalizado). Examinamos los subcasos de respuestas correctas (IIa) y también –independientemente de la corrección de sus respuestas– los subcasos en que justificaron si el resultado obtenido es óptimo (IIb), con el uso de argumentos. Mostramos los porcentajes correspondientes (Figuras 5 y 6).

III. *Casos en los que hallaron lo pedido en el problema*. Examinamos los subcasos de formalización (IIIa), con uso de lenguaje formalizado, y también –independientemente de que hayan formalizado o no– los subcasos de justificación de que el resultado obtenido es óptimo (IIIb), con el manejo de argumentos. (Figuras 7 y 8).

IV. *Casos en los que intentaron justificar que los resultados obtenidos son óptimos (uso de argumentos)*. Examinamos los subcasos de explicación correcta y presentamos los porcentajes correspondientes (Figura 9).

Con base en las configuraciones epistémicas que dimos a conocer en los Cuadros 2 y 3, elaboramos configuraciones cognitivas de las soluciones de los estudiantes, correspondientes a cada caso. Mostramos algunas de ellas como representativas de sus similares.

I. Mostraron sólo sus resultados

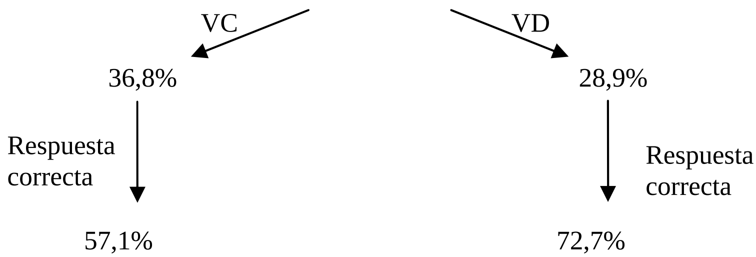


Figura 4. Análisis de ausencia de argumentos y procedimientos.

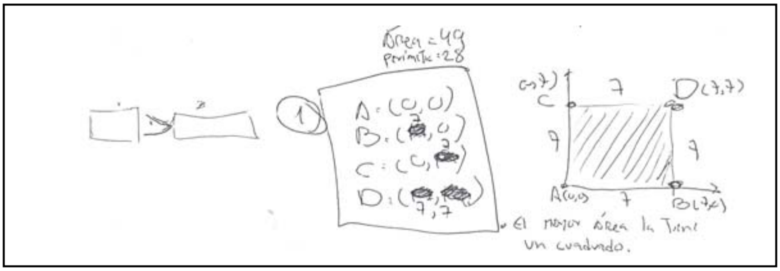
Estos casos llaman nuestra atención porque los alumnos simplemente escribieron una respuesta. No hay procedimientos ni argumentos; tampoco se puede percibir qué proposiciones han usado. Esto revela que, ante la tarea de resolver el problema, se quedan en una conjetura o una aproximación intuitiva. Y al ser alumnos que han aprobado un curso de cálculo diferencial, podemos afirmar que existe una débil influencia de su enseñanza y aprendizaje para ir más allá de una solución intuitiva. Es oportuno recordar lo que nos dice Fischbein: "The educational problem is to develop new, adequate, intuitive interpretations as far as possible, together with developing the formal structures of logical reasoning" (1994, p. 211).

La Figura 4 presenta en qué proporción las respuestas son correctas, con el propósito de tener una información sobre la calidad de la conjetura y la aproximación intuitiva a los problemas. Vemos que en el problema de variable discreta el porcentaje de los que muestran sólo su resultado es menor que en el problema de variable continua; sin embargo, el porcentaje de los que dan una respuesta correcta (72,7 %) es mayor que en el problema de variable continua (57,1 %). Por ello, podríamos decir que para el problema de variable discreta hay una aproximación intuitiva mejor que para el de variable continua, o que el grado de efectividad de la intuición fue mayor al tratar de resolver el problema de variable discreta.

A continuación mostramos una solución del problema de variación continua, ubicada en este caso, y su correspondiente configuración cognitiva:

Alumno 29

Problema con VC (sólo muestra su resultado y la respuesta es correcta).



Configuración cognitiva:

Lenguaje:

Representaciones. Representa un cuadrado y un rectángulo relacionados por el símbolo de mayor. Dibuja un cuadrado en un sistema de coordenadas cartesianas.

Expresiones simbólicas. Especifica las coordenadas de los vértices con letras y pares ordenados, correspondientes a un cuadrado de lado 7 y con un vértice en el origen.

Situación-problema:

Problema isoperimétrico de rectángulos.

Conceptos:

Paralelogramo, perímetro, área de rectángulos, vértice, números enteros.

Proposiciones:

Implícitas. Un cuadrado es un paralelogramo.

Un cuadrado de igual perímetro que un rectángulo tiene mayor área que el rectángulo.

Procedimientos:

Ninguno.

Argumentos:

Ninguno.

La ausencia de procedimientos, proposiciones y argumentos explícitos resulta clara, y la diferencia con la configuración epistémica de referencia es muy grande.

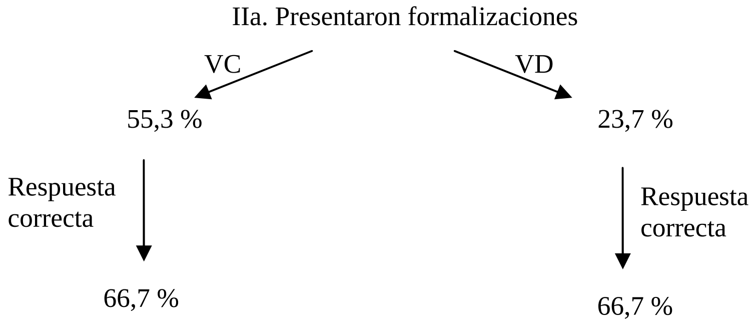


Figura 5. Análisis del uso de lenguaje formalizado.

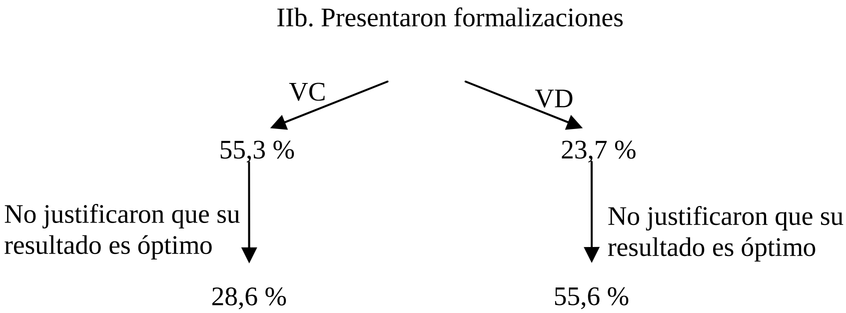


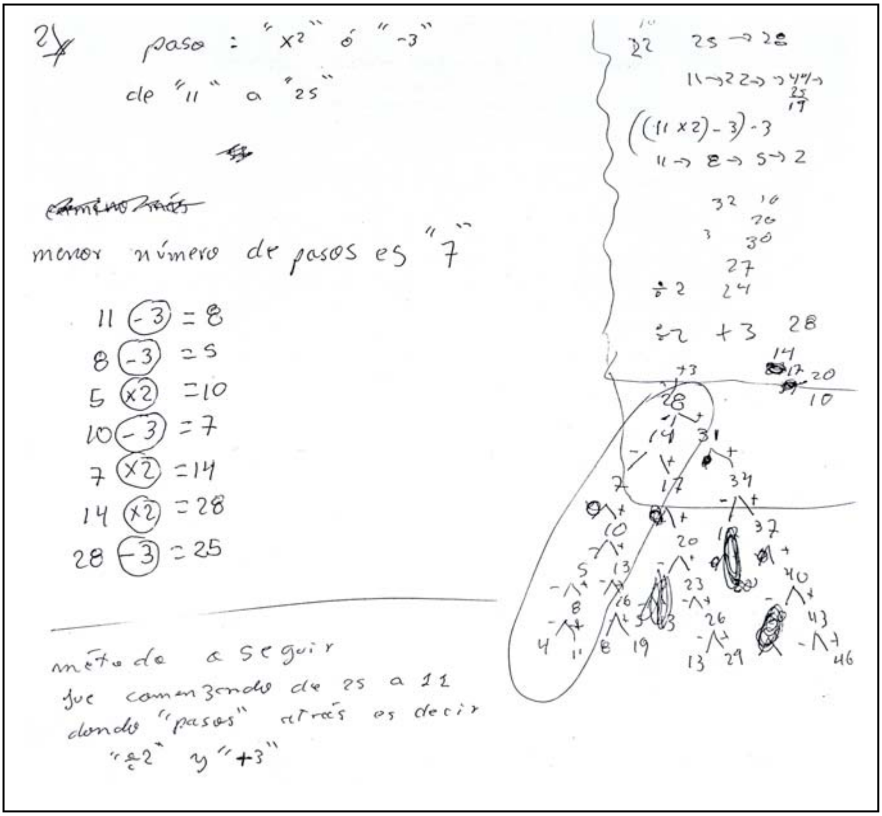
Figura 6. Análisis del uso de argumentos.

Como ya dijimos, el criterio de formalización es bastante amplio, y tratándose de jóvenes del segundo o tercer ciclo universitario –entre 17 y 18 años– no somos especialmente exigentes; sin embargo, distinguimos los que sólo escriben algunos números o dibujan sólo un paralelogramo de aquéllos que usan expresiones algebraicas, ecuaciones, notación funcional, teoremas, diagramas o notaciones propias.

Por los bajos porcentajes de casos en que hay formalizaciones, sobre todo en el problema de variable discreta, podemos señalar que hay deficiencias en el manejo formal de argumentos, procedimientos y proposiciones como las descritas en el análisis epistémico de los problemas; esto se confirma al observar que no es muy alto el porcentaje de los que llegan a una respuesta correcta empleando formalizaciones. Cuantitativamente, podríamos decir que las deficiencias son mas serias al resolver el problema con variación discreta (Figura 5), pero cabe destacar las soluciones de este problema con formalizaciones, respuesta correcta y aproximación a una argumentación sobre el carácter de óptimo de la solución hallada. A continuación mostramos una de estas pocas soluciones del problema discreto y su correspondiente configuración cognitiva, que tiene bastante en común con la configuración epistémica de referencia.

Alumno 6

Problema con VD (formaliza y da respuesta correcta).



Configuración cognitiva:

> *Lenguaje:*
>
> Representaciones. Usa diagrama de árbol. Representa simbólicamente los pasos definidos y los pasos *hacia atrás*.
>
> *Situación-problema:*
>
> Problema de contexto aritmético.
>
> *Conceptos:*
>
> Implícitos. Funciones inversas correspondientes a *multiplicar por 2* y a *disminuir 3 unidades*.
>
> *Proposiciones:*
>
> Implícita. Con las reglas dadas, para llegar a 25, necesariamente hay que llegar antes a 28.
>
> *Procedimientos:*
>
> Analiza empezando por el final y usando *pasos inversos* a los definidos: *dividir entre 2* y *añadir 3*.
>
> *Argumentos:*
>
> Un diagrama de árbol permite examinar todos los posibles *caminos*", usando los pasos definidos o sus respectivos inversos.
>
> Si se examinan todos los posibles *caminos* de 28 a 11, se puede escoger el *camino* más corto de 11 a 25, usando los pasos definidos.

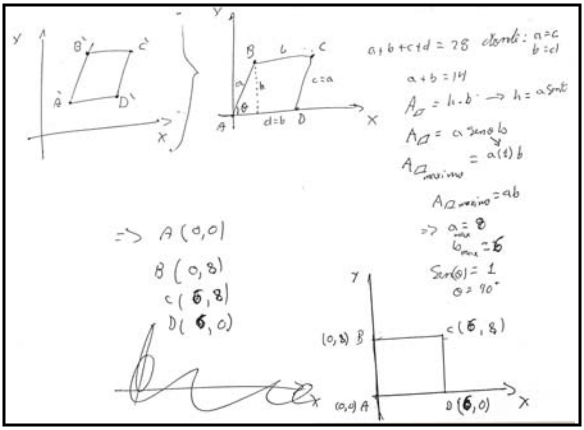
Otra mirada a los casos con formalizaciones es observar si justificaron o no que la solución –independientemente de que sea correcta o no– resulta un máximo o un mínimo, según el problema (Figura 6).

Una de las ventajas de las formalizaciones radica en que contribuyen a una exposición rigurosa de las ideas, la cual se percibe en la interrelación clara y ordenada de conceptos, proposiciones, argumentos y procedimientos. La solución correcta a un problema de optimización debería incluir la justificación de que el resultado obtenido es óptimo, pero vemos que hay un porcentaje considerable de alumnos que no lo hacen, sobre todo en el problema con variable discreta, a pesar de que formalizan. Esto nos lleva a afirmar que se requiere prestar más atención a la formación en el pensamiento riguroso y al uso adecuado de la formalización.

Resulta ilustrativo mostrar una solución del problema de variación continua en la que se usa lenguaje formalizado, pero la respuesta es incorrecta y no hay justificación de que sea óptima (en rigor, no podría haberla por ser incorrecta la respuesta; sin embargo, precisamente por no buscar una justificación la búsqueda formal termina en un caso particular no óptimo).

Alumno 6

Problema de VC (formaliza, pero no concluye correctamente).



Configuración cognitiva (Parte 1):

Lenguaje:

Representaciones. Dibuja un paralelogramo con lados no perpendiculares, en un sistema de coordenadas cartesianas. Uno de los lados sobre el eje de abscisas y un vértice en el origen. Asigna variables a las longitudes de los lados y a un ángulo.

Términos y expresiones. Área, expresiones algebraicas.

Situación-problema:

Problema isoperimétrico de paralelogramos.

Conceptos:

Paralelogramo, área, perímetro, función seno, vértices, números enteros.

Proposiciones:

El área de un paralelogramo es el producto de las longitudes de dos lados y del seno del ángulo que forman.

Implícita. Si un paralelogramo tiene un ángulo interior de 90º, entonces es un rectángulo.

Procedimientos:

Observa que, manteniendo el perímetro, se obtienen distintas áreas del paralelogramo, ya sea variando las longitudes de los lados, los ángulos entre los lados o longitudes y ángulos.

Configuración cognitiva (Parte 2):

> Asume que, para que el área sea máxima, el seno de tal ángulo debe ser 1.
>
> Escoge las coordenadas de los vértices.
>
> *Argumentos:*
>
> Deduce que el paralelogramo de área máxima tiene que ser un rectángulo y asigna valores a las variables que representan a las longitudes de los lados.

El estudiante concluye, de manera equivocada, que el paralelogramo de área máxima buscado es un rectángulo cuyos lados miden 6 y 8 unidades. No obstante, podemos constatar que hay similitudes entre la configuración epistémica de referencia y la configuración cognitiva de su solución, por lo cual el estudiante llega, formalmente, muy cerca de la solución correcta, al igual que otros estudiantes que no formalizaron. Por casos como estos nos preguntamos si el rigor y las formalizaciones que se inducen en los cursos de matemáticas están realmente complementando la intuición.

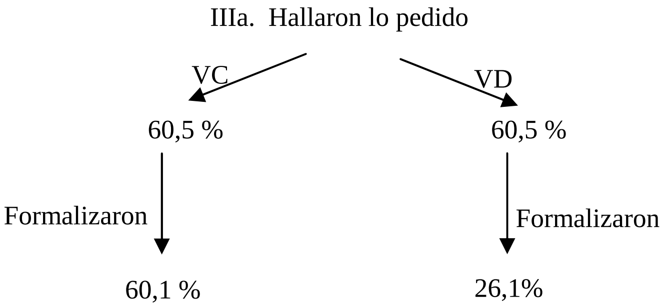


Figura 7. Análisis de respuesta correcta usando lenguaje formalizado.

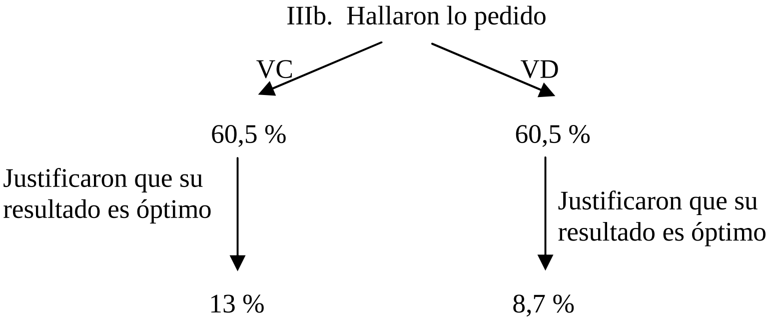
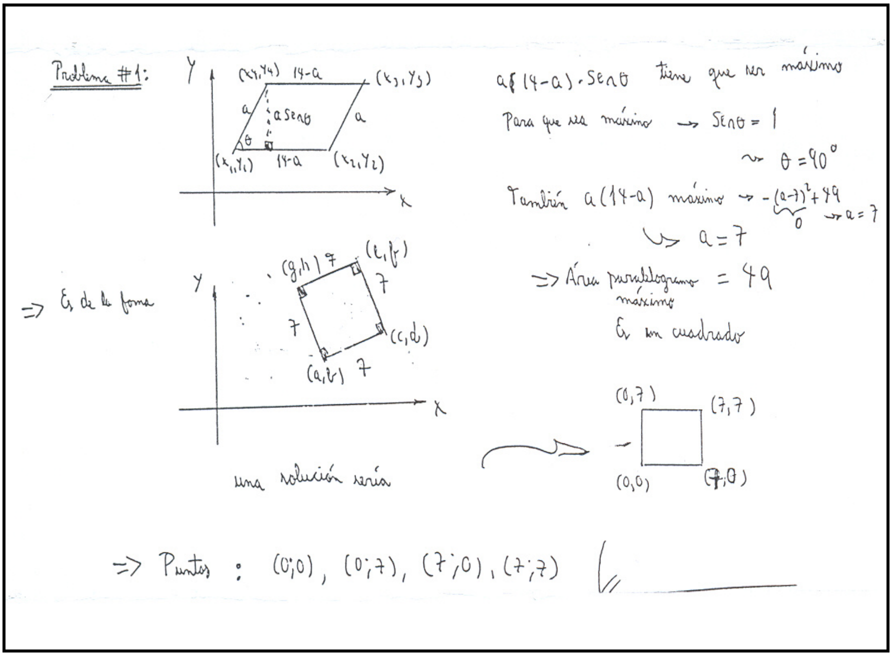


Figura 8. Análisis de respuesta correcta con argumentación de resultado óptimo.

Los resultados que presentamos en las Figuras 7 y 8 indican también que hay deficiencias formativas en la formalización y la actitud científica para canalizar adecuadamente las conjeturas y aproximaciones intuitivas a los problemas. No son muchos los alumnos que hallaron una respuesta correcta usando lenguaje formal, sobre todo en el problema con variable discreta, y pocos los que, al llegar a ella, justificaron –argumentaron correctamente– que cumple con la característica de ser el óptimo. Cabe destacar que muy pocos estudiantes encontraron lo pedido formalizando y justificando que lo obtenido es óptimo: 7,9 % en el problema de variación continua y 5,3 % en el de variación discreta. Sólo un estudiante (2,6 %) aplicó este procedimiento en ambos problemas. A continuación, mostramos sus soluciones, pero no transcribimos sus configuraciones cognitivas debido a su gran similitud con las configuraciones epistémicas de referencia.

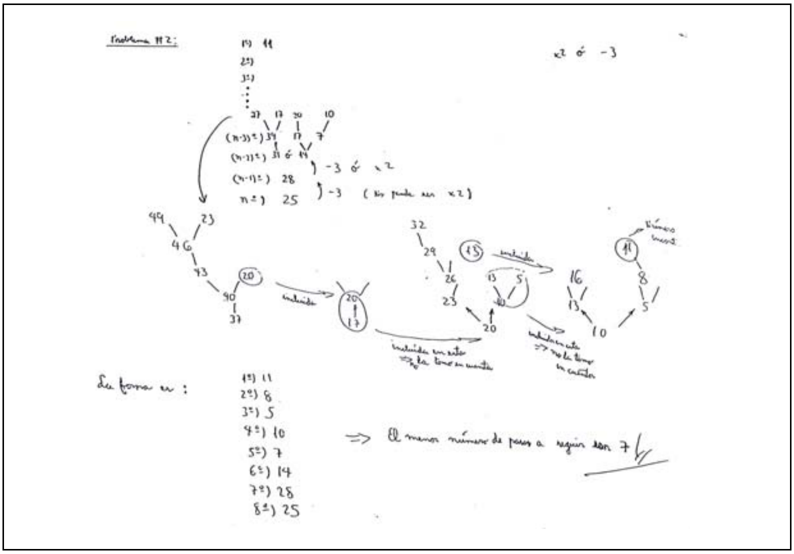
Alumno 3

Problema con VC (halla lo pedido, formaliza y justifica que su resultado es óptimo).



Alumno 3

Problema con VD (halla lo pedido, formaliza y justifica que su resultado es óptimo).



IV. Intentaron justificar que sus resultados son óptimos

VC	VD
42,1 %	10,5 %
Justificaron ↓	Justificaron ↓
18,8 %	50 %

Figura 9. Análisis sobre la argumentación del carácter de óptimo de los resultados.

Pocos alumnos intentaron justificar que sus resultados eran óptimos y, de ellos, una cantidad mínima realmente justificaron (dieron una explicación correcta). En el problema de variación discreta y otros con carácter lúdico, muchos consideraron suficiente llegar a una solución que parecía convincente, lo cual muestra las deficiencias en el pensamiento riguroso y el uso de lenguaje formalizado y de argumentos para demostrar la validez de resultados. Por otra parte, hemos encontrado casos donde parece que el uso de lenguaje algebraico para formalizar y la búsqueda de justificaciones formales los alejan de una mirada más natural de la situación planteada, sobre todo al resolver el problema con variación discreta. A modo de ilustración, transcribimos una solución y su configuración cognitiva.

Alumno 27

Problema con VD (formaliza e intenta justificar que su resultado es óptimo).

2) Se considera ~~los~~ "a" pasos cuando se multiplica x2
y "b" pasos cuando se resta 3, entonces:

$a + b = \text{mínimo} \Rightarrow 11 + 2a - 3b = 25$

$\underbrace{2a}_{7} - \underbrace{3b}_{0} = 14 \Rightarrow$ el menor número de pasos es 7

Configuración cognitiva

Lenguaje:

Asigna variables para el número de veces que se use cada paso.

Situación-problema:

Problema de contexto algebraico.

Conceptos:

Ecuaciones, números enteros no negativos.

Proposiciones:

Implícita. Existen valores que minimizan la suma de dos números enteros no negativos sujetos a una restricción lineal de igualdad.

Procedimientos:

Establece una ecuación usando las variables adoptadas para relacionar 11 y 25.

Busca que la suma de las variables adoptadas sea mínima.

Argumentos:

Razonamiento deductivo.

Se percibe que en este alumno hay un empleo de lenguaje formalizado y una intención de ser riguroso, quizás influenciado por los cursos universitarios de matemática ya aprobados, pero tal actitud no está complementando una reacción natural ante este problema de ubicarlo en un contexto aritmético y tantear algunos pasos. No llega a percibir que su ecuación no está formalizando o modelizando la situación planteada. Si bien es cierto que cuando *a* y *b* son no negativos y cumplen que $2a-3b=14$, entonces el mínimo valor de $a+b$ es 7 (con $a=7$ y $b=0$); al aplicar 7 veces el paso *multiplicar por 2,* partiendo del número 11, no llegará al 25. Recordemos que una de las proposiciones en la configuración epistémica de referencia es que con sólo multiplicaciones por dos no se puede llegar a 25, partiendo de 11. Una proposición casi obvia e intuible por el alumno, mas no la aplica para verificar su respuesta obtenida *formalmente*.

6. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Como resumen sobre los resultados de esta investigación, la primera conclusión a la que llegamos es que se perciben deficiencias en el uso de proposiciones, procedimientos y argumentos al resolver los problemas de optimización propuestos. Hay casos en los que no se muestran explícitamente, como se nota en la Figura 4 y en la configuración cognitiva de la solución que hace el alumno 29; en otros se muestra el uso de lenguaje formalizado, pero no llegan a una respuesta correcta, como puede observarse en la Figura 5, en la configuración cognitiva de la solución del problema de variación continua, que hizo el alumno 6, y en la correspondiente a la solución del problema con variación discreta, realizada por el alumno 27.

La segunda conclusión es que una deficiencia específica de argumentación al resolver los problemas de optimización propuestos radica en la poca presencia de justificación de que el resultado es óptimo, lo cual se vuelve más notorio al resolver el problema de variable discreta (Figuras 6 y 9).

La tercera conclusión es que se perciben capacidades para intuir las respuestas correctas a los problemas propuestos, mas no han sido fortalecidas con experiencias previas en el empleo adecuado de argumentos, procedimientos, proposiciones y lenguaje formalizado, como se observa en las Figuras 4, 7 y 8.

Como conclusión más general, queremos resaltar que el uso de herramientas teóricas propuestas por el EOS, como la *configuración epistémica* y la *configuración cognitiva*, permite un estudio integrado de las nociones de problema, intuición, rigor y formalización.

El trabajo desarrollado y las deficiencias identificadas abren perspectivas para seguir investigando y hacer propuestas que contribuyan a que no continúen presentándose este tipo de deficiencias. Así, consideramos que es muy importante investigar profundamente, por una parte, en la mejor manera de orientar el aprendizaje del cálculo diferencial (muy especialmente el capítulo de máximos y mínimos); por otra, en la forma más adecuada de introducir desde la primaria problemas de optimización, con el propósito de potenciar las capacidades naturales de resolver intuitivamente diversos problemas de optimización que se presentan en la vida diaria.

Más específicamente:

- Debemos prestar más atención a educar en la formalización y el rigor, como una actitud científica que complementa la intuición. Sería conveniente planificar, para las sesiones de resolución de problemas, configuraciones epistémicas en las que el tipo de argumentación considerada como válida fuese cada vez más *exigente*. En particular, resulta necesario hacer una profunda investigación sobre la presencia de este enfoque en la enseñanza y aprendizaje de máximos y mínimos en el cálculo diferencial, así como su influencia en la justificación del carácter de óptimo de la solución encontrada, sobre todo en problemas cuyas variables no son continuas.
- Debemos contribuir a potenciar la *intuición optimizadora* que se genera al buscar situaciones óptimas en la vida diaria, educando en la formalización y el rigor desde la educación primaria, usando problemas adecuados de optimización.

Otra línea de trabajo para profundizar en esta investigación concierne a examinar los procesos considerados en el EOS. La estrecha interrelación entre ellos abre un amplio panorama de estudio, parte del cual podría hacerse siguiendo la técnica que muestra la Figura 3 y ubicar el proceso que se desea estudiar en el centro del hexágono, a fin de relacionarlo con los procesos de comunicación, enunciación, definición, argumentación y algoritmización, y luego colocarlo en el centro del decágono para analizarlo en el marco de las diversas facetas duales (Font, Contreras y Rubio, 2007).

También sería útil continuar el análisis cualitativo y cuantitativo de las soluciones hechas por los alumnos en esta investigación, pues a partir del mismo protocolo se pueden descubrir diversos niveles en la resolución de los problemas trabajados y buscar formas de concretar las propuestas planteadas en los párrafos anteriores. Si examinamos globalmente los cuadros presentados en los Anexos I y II, consideramos que pueden distinguirse hasta nueve niveles, de menor a mayor, siendo el nivel cero el de los que no se involucran en el problema, mientras que los otros ocho los describimos resumidamente en el Cuadro V.

CUADRO V

Niveles en la resolución de los problemas de optimización propuestos.

<table>
<tr><th rowspan="2">NIVEL</th><th colspan="2">Halla lo pedido</th><th colspan="4">Procedimiento</th><th colspan="3">Argumenta por qué el valor obtenido es óptimo</th></tr>
<tr><th>Sí</th><th>No</th><th>Tantea</th><th>Considera todos los casos</th><th>Formaliza</th><th>Muestra sólo su resultado</th><th>No</th><th>Incorrectamente</th><th>Correctamente</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td>X</td><td colspan="3">Algo en estas columnas</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td>X</td><td colspan="3">Algo en estas columnas</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>X</td><td colspan="4">Algo en estas columnas</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>X</td><td></td><td colspan="4">Algo en estas columnas</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>X</td><td></td><td></td><td colspan="3">Algo en estas columnas</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>X</td><td></td><td></td><td colspan="2">Una de estas columnas</td><td></td><td></td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>8</td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td>X</td></tr>
</table>

El Cuadro VI resume el número de alumnos que se encuentra en cada nivel, según cada problema, y da elementos para considerar agrupaciones de niveles:

CUADRO VI

Distribución de participantes, considerando sus niveles de resolución de problemas de optimización (Parte 1)

Nivel	Número de alumnos según el Problema 1 (variaciones continuas)	Número de alumnos según el Problema 2 (variación discreta)
0	1	5
1	1	3
2	6	5
3	5	0
4	2	2

CUADRO VI
Distribución de participantes, considerando
sus niveles de resolución de problemas de optimización (Parte 2)

Nivel	Número de alumnos según el Problema 1 (variaciones continuas)	Número de alumnos según el Problema 2 (variación discreta)
5	9	21
6	11	0
7	0	1
8	3	1

Finalmente, este tipo de estudios también puede ser complementado y profundizado al ahondar en otros problemas matemáticos; comparar soluciones individuales y soluciones hechas en grupo; hacer configuraciones epistémicas, tomando como referencia análisis hechos entre varios expertos y con alumnos ganadores de medallas en olimpiadas matemáticas internacionales, que tienen gran experiencia en resolver problemas, y ocupar configuraciones metacognitivas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cohn, R. (1995). Entrenando la intuición. *Siglo XXI. Perspectivas de la Educación desde América Latina*, 2.

D'Amore, B. y Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10* (2), 191-218.

Dubinsky, E. (2000). Meaning and formalism in mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 5* (3), 211-240.

Fischbein, E. (1994). *Intuition in science and mathematics*. Holland: Reidel Publishing Company.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaço Matematica Pesquisa 8* (1), 67-98.

Font, V.; Contreras, A. y Rubio, N. (2007). Procesos en matemáticas. Una mirada desde un enfoque ontosemiótico. *Conferencia especial en la XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME)*. Maracaibo, Venezuela.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 22* (2-3), 237-284.

Godino, J. D.; Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (Número Especial), 131-155.

Godino, J. D.; Font, V.; Contreras, A. y Wilhelmi, M.R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9* (1), 117-150.

Godino, J. D.; Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education, *ZDM. The International Journal on Mathematics Education 39* (1-2), 127-135.

Gusmao, T. R. S. (2006). *Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica*. Tesis de doctorado, Universidad de Santiago de Compostela.

Malaspina, U. (2005). Motivation and development of mathematical thinking using optimization problems. In A. Gagatsis (Ed.), *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education* (Vol. II, pp 491- 500), Palermo, Italy.

Mosterin, J. (1980). *Teoría axiomática de conjuntos*. Barcelona, España: Ariel.

Ramos, A. B. y Font, V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. *La Matematica e la Sua Sidattica 20* (4), 535-556.

Roldán, R. y Cribeiro, J. (2001) Entrenando la intuición en la matemática superior. *Revista Ciencias Matemáticas 19* (2), 133-141.

Schubring, G. (2005). *Conflicts between generalization, rigor and intuition. Number concepts underlying the development of analysis in 17th-19th century France and Germany*. New York, USA: Springer.

Autor

Uldarico Malaspina Jurado. Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú. E-mail: umalasp@pucp.edu.pe.

ANEXO I

Análisis de las soluciones de los estudiantes en el Problema 1 (Parte 1)

Hallar en el plano cartesiano cuatro puntos de coordenadas enteras, de modo que sean los vértices de un paralelogramo cuyo perímetro sea 28 y cuya área sea máxima.

Alumno	Halla lo pedido	Procedimiento				Argumenta por qué el valor obtenido es óptimo			Nivel
		Tantea	Considera todos los casos	Formaliza	Muestra sólo su resultado	No	Incorrectamente	Correctamente	
1	1	1	1	1			1		6
2		1	1			1			2
3	1		1	1				1	8
4		1	1	1		1			2
5	1	1	1	1		1			5
6			1	1		1			2
7	1				1	1			5
8	1								
9	1								
10	1		1	1				1	8
11				1					0
12			1		1	1			3
13	1		1	1			1		6
14	1		1	1			1		6
15			1	1		1			2
16		1	1			1			2
17			1		1	1			3
18					1	1			1

ANEXO I

Análisis de las soluciones de los estudiantes en el Problema 1 (Parte 2)

Hallar en el plano cartesiano cuatro puntos de coordenadas enteras, de modo que sean los vértices de un paralelogramo cuyo perímetro sea 28 y cuya área sea máxima.

19			1	1		1			3
20	1		1	1			1		6
21	1		1		1	1			5
22			1		1		1		4
23			1	1		1			2
24	1		1	1			1		6
25	1		1	1			1		6
26			1		1	1			3
27	1		1	1			1		6
28	1		1	1			1		6
29	1				1	1			5
30	1			1			1		6
31	1		1		1	1			5
32	1	1				1			5
33	1		1		1	1			5
34	1		1		1		1		6
35			1	1			1		4
36	1				1	1			5
37	1		1	1				1	8
38			1		1	1			3
Totales	23	6	31	21	14	21	13	3	

ANEXO II

Análisis de las soluciones de los estudiantes en el Problema 2 (Parte 1)

Llamamos paso aplicado a un número cuando se le multiplica por 2, ó cuando se le disminuye en 3 unidades. Hallar el menor número de pasos que se deben aplicar para obtener el número 25, partiendo del número 11.

Alumno	Halla lo pedido	Procedimiento				Argumenta por qué el valor obtenido es óptimo			Nivel
		Tantea	Considera todos los casos	Formaliza	Muestra sólo su resultado	No	Incorrectamente	Correctamente	
1	1	1		1		1			5
2	1	1				1			5
3	1			1				1	7
4					1	1			1
5				1		1			2
6	1			1		1			5
7	1				1	1			5
8	1		1	1		1			5
9	1	1				1			5
10		1				1			2
11	1				1	1			5
12	1				1	1			5
13	1			1		1			5
14		1				1			2
15		1				1			2
16	1		1	1				1	8
17		1				1			2

ANEXO II

Análisis de las soluciones de los estudiantes en el Problema 2 (Parte 2)

Llamamos paso aplicado a un número cuando se le multiplica por 2, ó cuando se le disminuye en 3 unidades. Hallar el menor número de pasos que se deben aplicar para obtener el número 25, partiendo del número 11.

18	1	1				1			5
19	1				1	1			5
20									0
21					1	1			1
22				1			1		4
23					1	1			1
24									0
25									0
26	1	1				1			5
27				1			1		4
28	1				1	1			5
29	1	1				1			5
30	1				1	1			5
31	1	1				1			5
32	1	1				1			5
33	1	1				1			5
34	1				1	1			5
35	1				1	1			5
36	1	1				1			5
37									0
38		1							0
Totales	23	15	2	9	11	29	2	2	

CLAUDIA ROSARIO MURO, PATRICIA CAMARENA y ROSA DEL CARMEN FLORES

ALCANCES DE LA TEORÍA DE VERGNAUD EN LA REPRESENTACIÓN DE UN PROBLEMA COMPLEJO DE INGENIERÍA

SCOPE OF VERGNAUD'S THEORY IN THE REPRESENTATION OF A COMPLEX ENGINEERING PROBLEM

RESUMEN. Con el propósito de implementar tareas que apoyen a un grupo de estudiantes a construir el significado de la convergencia de la serie de Fourier, en esta investigación se estudia su vinculación con un problema relativo a situaciones que describen un fenómeno de transferencia de masa hasta alcanzar el estado de equilibrio.

En la realización de las tareas, se lleva a cabo un análisis de las representaciones del grupo sobre cómo entiende y soluciona problemas tocantes a este objeto matemático, retomando aspectos que plantea Vergnaud en estudios de operaciones básicas en la educación primaria. Los resultados destacan concepciones aisladas de ambos contextos y dificultades en el conocimiento de las ecuaciones diferenciales que rigen al fenómeno, así como la implicación de la serie de Fourier.

PALABRAS CLAVE: Convergencia, serie de Fourier, transferencia de masa, representaciones.

ABSTRACT. With the aim of implementing tasks to help a group of students to construct the meaning of the convergence of the Fourier series, this research studies its relationship with a problem concerning situations that describe a mass transfer phenomenon until equilibrium is reached.

As they performed the tasks, an analysis was made of the group's representations on how they understand and solve problems which touch on this mathematical object, recalling aspects mentioned by Vergnaud in studies on basic operations in primary education. The results bring to light isolated conceptions in both contexts and difficulties in knowledge of differential equations which govern the phenomenon, as well as the consequence of the Fourier series.

KEY WORDS: convergence, Fourier series, mass transfer, representations.

RESUMO. Com o propósito de implementar tarefas que aponham um grupo de estudantes a construir o significado da convergência da série de Fourier, a presente pesquisa se estuda sua vinculação com um problema referente a situações que descrevem um fenômeno de transferência de massa até alcançar o estado de equilíbrio.

Na realização das tarefas, é realizada uma análise das representações do grupo sobre como se entende e soluciona problemas relacionados a esse objeto matemático retomando aspectos

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2007) 10(3): 401-419
Recepción: Marzo 06, 2007/Aceptación: Octubre 18, 2007

apresentados por Vergnaud, em estudos em torno de operações básicas no ensino fundamental. Os resultados desatacam concepções isoladas de ambos contextos e dificuldades no conhecimento das equações diferenciais que regem o fenômeno, assim como a implicação da série de Fourier.

PALAVRAS CHAVE: Convergência, série de Fourier, transferência de massa, representação.

RÉSUMÉ. Dans l'objectif d'implémenter des tâches pour soutenir un groupe d'étudiants dans la construction de la signification de la convergence de la série de Fourier, cette recherche étudie le rapport de cette signification avec un problème portant sur des situations qui décrivent un phénomène de transfert de masse jusqu'à arriver à l'état d'équilibre.

Dans la réalisation des tâches, est développée une analyse de représentations du groupe, portant sur : Comment comprendre et résoudre des problèmes abordant cet objet mathématique, en considérant des aspects exposés par Vergnaud en études sur les opérations élémentaires à l'école élémentaire. Les résultats soulignent des conceptions isolées de deux contextes et des difficultés par rapport aux connaissances des équations différentielles qui régissent ce phénomène et l'implication de la série de Fourier.

MOTS CLÉS: Convergence, série de Fourier, transfert de masse, représentations

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de la serie de Fourier en situaciones características de un fenómeno de transferencia de masa puede ser una alternativa para abordar la enseñanza de este concepto en el área de ingeniería química, estableciendo las relaciones entre ambos tipos de contextos. Un bosquejo de la vinculación que guarda la serie con el proceso es la convergencia y equilibrio que alcanza el fenómeno, lo cual justifica la determinación de situaciones en las que ambos conceptos se pueden ver apoyados por el nexo biunívoco que conservan.

Dentro de las matemáticas, la serie de Fourier es un concepto básico en los cursos avanzados en ingeniería, y abarca elementos que caracterizan su complejidad tanto en su enseñanza como en su aprendizaje. Algunos de los más importantes son la suma infinita de las funciones trigonométricas que la constituyen, la periodicidad de sus funciones y su convergencia. Este último concepto concierne a la evaluación de la serie en un punto, que se puede apreciar en el comportamiento gráfico de la suma, cuando las componentes o funciones sinusoidales se aproximan a una función; el límite de la serie corresponde a esa función en todos sus puntos de continuidad.

La transferencia de masa es un fenómeno que se presenta en diversas operaciones unitarias del tipo difusionales, típicas dentro de la ingeniería, y su base teórica común plantea que *se transfiere masa de una fase fluida a otra a través de una interfase*. El fenómeno descrito se encuentra asociado a la emigración de las moléculas de un lugar a otro por la diferencia de concentración; tal contraste provoca la tendencia a salir de una región y establecerse en una zona distinta. El proceso de transferencia de masa visto a través de la emigración de las moléculas tiene un límite para un tiempo que es teóricamente infinito; ahora bien, el equilibrio que alcanza el fenómeno con el tiempo es referido al estado estable del proceso, donde los cambios producidos en una propiedad transferente con respecto al tiempo ya no son significativos. Por tanto, el movimiento de moléculas en el estado estable se debe únicamente al espacio de emigración.

Bajo tales circunstancias, matemáticamente existe la representación de una función que caracteriza el proceso de transferencia en el tiempo y su condición de equilibrio cuando el tiempo es infinito. Dicha función se halla íntimamente ligada con la convergencia de la serie de Fourier precisamente cuando converge a esa función.

El concepto de la convergencia de la serie de Fourier se puede encontrar desde su origen en la teoría analítica del calor, establecida por Fourier (Farfán, 1995). Esta teoría da un aporte importante, tanto para la ingeniería como para el análisis matemático, que consiste en un estudio cualitativo y empírico del fenómeno físico del calor, que conduce al análisis de la convergencia de una serie infinita ligada a la naturaleza del fenómeno de la conducción. Para llegar a dicho análisis, Fourier planteó la ecuación del estado inestable y estable que representaba al sistema estudiado. De esta forma halló que la solución de las ecuaciones para ambos estados era una serie trigonométrica infinita, que ahora se conoce como *serie de Fourier*.

Así, el planteamiento de la teoría analítica del calor rige los fenómenos de transferencia y, por tanto, constituye la base para el análisis de un sistema donde se transfiere masa. Esto permite que se establezcan similitudes entre el mecanismo de estos dos tipos de transporte molecular, con el fin de identificar y fijar los elementos que determinan el concepto en la difusión de masa, así como las relaciones que surgen entre la serie y su convergencia.

Entre las investigaciones en matemática educativa que han retomado la obra de Fourier podemos citar las de Ulín (1984) y Farfán (1995), donde se realiza un análisis histórico-crítico sobre la conducción del calor y la relación entre las temperaturas finales que alcanza un cuerpo en la etapa estable de la difusión; asimismo, señalan la implicación de la convergencia de la serie Fourier en este estado. Ambos trabajos resaltan el estado estacionario del fenómeno ligado al estudio de la convergencia de una serie trigonométrica infinita, y sintetizan tal concepto en la relación que tiene encontrar el estado estacionario a la verificación de la convergencia. En el estudio realizado por Farfán se analiza el ambiente en que surge esta teoría y se diseñan secuencias didácticas acerca de la convergencia de series infinitas, atendiendo a cuestiones del planteamiento de Fourier, con el fin de presentar una visión sobre las percepciones matemáticas del profesor en relación con el fenómeno.

Respecto a los estudios que han dejado al descubierto las carencias del significado de la serie de Fourier en problemas de la ingeniería, están los de Camarena (1993) y Muro (2000). Su propuesta consiste en destacar la importancia de enseñar la serie de Fourier en vinculación con problemas característicos del área de ingeniería para facilitar su aprendizaje, de ahí que sugieran la creación de situaciones en un ambiente adecuado, donde el estudiante pueda construir el significado de la serie de Fourier en temas propios de su actividad (Muro, 2004). Por ejemplo, Muro (2000) presenta el desarrollo de una situación relativa a la transferencia de agua a través de un sólido cuando se hace pasar aire caliente para su secado. El comportamiento de dicho proceso se obtiene mediante una serie de Fourier, y las representaciones formales que lo describen a través de la relación recíproca entre los aspectos matemáticos y los aspectos que confluyen en la situación o situaciones donde ocurre el proceso de transferencia de masa. El producto de la investigación deriva tanto del significado que atañe al problema como del conjunto de conceptos y situaciones que entran en juego para ese contexto (Muro, 2004).

En correspondencia a los estudios sobre las representaciones de problemas matemáticos, Vergnaud ha enmarcado trabajos donde se enfatiza en el papel de las diferentes relaciones en situaciones que contienen estructuras aditivas, multiplicativas y relaciones número-espacio, entre otros, como los de Vergnaud y Durán (1976), Vargas y López (1988), Guerrero (1997), Vergnaud (1997), Nunes y Bryant (1998). Dichas investigaciones han analizado los procedimientos que los niños emplean para resolver problemas y destacan el estudio de los procedimientos informales –no algorítmicos– que ocupan para llegar a soluciones correctas. Asimismo, han brindado información sobre la complejidad de la jerarquía entre problemas de tal índole, así como la diferencia en los procedimientos de su solución, dependiendo del grado escolar y las demandas conceptuales que se estudian.

Las investigaciones de Vergnaud acerca de las estructuras aditivas muestran el conjunto de conceptos y teoremas que permiten ahondar en los problemas como tareas matemáticas, bajo factores establecidos a partir de la actividad del niño en diversos cuestionamientos. Por tanto, el conocimiento que resulta de la actividad del niño es visto como pragmático y se establece mediante la identificación de sus invariantes operatorias. Vergnaud (1990, 1996, 1997 y 2000) apunta que las invariantes operatorias son proposiciones que el sujeto sostiene como verdaderas en un cierto rango de situaciones, y como categorías que posibilitan contar con elementos para obtener información adecuada al problema.

En esta línea, Flores (2003) señala el interés por comprender diversas transformaciones y transiciones en el conocimiento matemático, centrándose en estructuras aditivas que aparecen en el tránsito de una resolución no-canónica hacia una canónica y algorítmica. Por un lado, considera las características de los esquemas y sus componentes –propósitos, reglas de acción, inferencias, teoremas y conceptos en acto– que forman la representación de un problema elaborado por un individuo en el proceso de su resolución. Por otro, las formas de simbolización que también integran las resoluciones que hacen los niños. Ambos aspectos son el eje del planteamiento conceptual de Vergnaud.

Nunes y Bryant (1998), a partir de un análisis a varios trabajos relacionados con lo que expone Vergnaud, afirman que las dificultades que encuentra un niño en la solución de diferentes problemas se deben tanto al problema como a las invariantes que plantea y la familiaridad con el contexto en que se inserta. También dicen que el entendimiento de un problema depende de la vinculación que los niños hacen entre invariantes y simbolizaciones; por ello, estipulan que el desarrollo del conocimiento implica el dominio gradual de un conjunto de conceptos y principios matemáticos que derivan, a su vez, del significado de una diversidad de problemas.

En tal sentido, las investigaciones de Vergnaud y las que toman como referencia su marco para explicar la evolución en el conocimiento del niño corresponden, en su mayoría, a trabajos efectuados dentro del nivel de educación primaria, con la intención de explicar el conocimiento ante situaciones que se generan por las operaciones aritméticas. Bonilla, Block y Waldegg (1993) plantean que en México las investigaciones relacionadas con los planteamientos de Vergnaud son un esfuerzo importante, pero aún incipiente, que intenta no sólo describir, sino también llegar a revelar los procesos involucrados en el aprendizaje de los contenidos matemáticos de la educación básica.

Referente al nivel medio superior y superior, en México se han encontrado trabajos que se rigen por algunos aspectos que marca Vergnaud, como los de Muñoz (1997, 2000) y Muro (2004). La investigación de Muñoz aborda la problemática de separación entre lo conceptual y algorítmico en la enseñanza del cálculo integral, mostrando elementos que propician el enlace de ambos aspectos a través del análisis y clasificación de diversas situaciones problema, con lo cual hace que el concepto de la integración en el cálculo pueda pensarse desde el punto de vista del estudio del movimiento de un cuerpo en el nivel medio superior. Esto es, mediante la perspectiva de la estructura relacional que tiene lugar en esta clase de problemas, tratando de mostrar procedimientos de solución algorítmicos y no algorítmicos. Por su parte, Muro identifica situaciones problema acerca de la serie de Fourier en contexto, a fin de analizar la actividad conceptual del estudiante en términos de las invariantes operatorias que se identifican en su esquema de conocimiento sobre dicha noción, retomando aspectos de la teoría de Vergnaud.

Si se repara en la problemática de la enseñanza en un nivel superior, hay que prestar atención a los resultados de las investigaciones de Muro (2000, 2004) porque revelan un interés de identificar las representaciones formales de un problema complejo como lo es el fenómeno de transferencia de masa, que implica la aplicación de la serie de Fourier y, con base en ello, ahonda en la actividad cognitiva de un grupo de sujetos a través de sus representaciones en la situación problema.

De esta manera, las concepciones que alcanzan los sujetos en situaciones del área de la ingeniería se pueden categorizar de acuerdo con el marco de referencia de Vergnaud sobre las estructuras aditivas dentro de la educación básica.

2. ANÁLISIS CONCEPTUAL DE LA SITUACIÓN PROBLEMA Y DEL PROCESO DE SOLUCIÓN

Dentro de la diversidad de situaciones que acoge la enseñanza de la serie de Fourier en la ingeniería, se establece su representación en un problema sobre el fenómeno de transferencia de masa en el contexto de la ingeniería química. Esto permite identificar las representaciones de un grupo de estudiantes mediante el análisis de los esquemas que tienen lugar en el entendimiento y solución del problema.

La modelación matemática de la transferencia de masa en el proceso de secado de un material toma como referencia una lámina plana con dimensiones y, z, con espesor x. Por las características de la lámina, se supone que el área superficial en las dos caras es mucho más grande que el área a lo largo del espesor; de ahí que la transferencia de masa principalmente se lleve a cabo a lo largo del espesor. Bajo este argumento, la transferencia del agua en el secado del material se describe en una sola dirección (x), según los términos del cambio en una propiedad transferente, como puede ser el cambio en la humedad del material (T), lo cual se refleja cuando las moléculas emigran en tal dirección en función del tiempo t y del recorrido en x .

El cambio se representa por una ecuación diferencial parcial lineal, que llamaremos (1), dada en siguiente expresión:

$$k_g \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Aquí, k_g es el coeficiente de difusividad de masa de la sustancia que se transfiere.

Ahora bien, la solución de esta ecuación debe ser una función en dos variables $\mathrm{T}(x,t)$ que describa el cambio de la propiedad transferente, según las condiciones limitantes del fenómeno. Para determinar la solución de la ecuación diferencial que conduzca a la representar la función $\mathrm{T}(x,t)$ en términos del problema, hay que establecer esas condiciones de frontera.

3. Aspectos a considerar para el análisis de las representaciones de la situación problema

Frente al manejo de la información, en el proceso de hallar la solución de un problema el estudiante se enfrenta a dos tareas: *¿dónde colocar la información?* y *¿qué información colocar en qué lugar?* Su ejecución se percibe en las representaciones que conciernen al proceso de solución del problema (Vergnaud, 1987), por lo que su análisis permite obtener varios esquemas, sobresaliendo *los que dan lugar al entendimiento* y *los que dan lugar a la solución* (Flores, 2003).

El entendimiento del problema tiene como propósito *atribuirle un significado*; mediante reglas de acción e inferencias se identifica de qué problema se trata y cuáles son las variables conocidas y desconocidas; tal esquema da lugar al que conduce a su solución. La descripción de la acción del estudiante en términos de aquellas que dan significado al problema y las que tienen lugar para llegar a una solución constituye el estudio de sus representaciones, las cuales son categorizadas por estas dos clases de esquemas. Ambos estados se caracterizan por invariantes operacionales específicos.

De acuerdo con Flores (2003), se identifican dos tipos de representaciones en los esquemas de entendimiento y solución de un problema:

a) Entendimiento canónico. Integrado por los propósitos, reglas de acción, inferencias e invariantes operacionales que corresponden a una comprensión del problema, la cual pudiera alcanzar un esquema de solución, dirigido a una solución verdadera.
b) Entendimiento no canónico. Son los propósitos, reglas de acción, inferencias e invariantes que conciernen a una comprensión del problema según un significado no canónico, dirigido a una solución falsa.

Los esquemas de solución describen comportamientos, razonamientos, adaptaciones y modificaciones en el planteamiento del problema, por lo que se clasifican en *esquemas algorítmicos*, que implican la simbolización y el procedimiento convencional del mecanismo a seguir para darle solución y los *esquemas no algorítmicos*, que ocupan simbolización espontánea, no algorítmica, para obtener su solución.

Ahora bien, la simbolización alude a los símbolos y signos que sirven como herramientas en el proceso del pensamiento, al igual que en la comunicación de la experiencia y los conocimientos conceptuales. En la simbolización se identifican dos formas: la *espontánea*, donde las invariantes operacionales se representan por símbolos genéricos (dibujos, trazos, objetos materiales) y la *convencional*, donde las invariantes operacionales son simbolizadas mediante notaciones convencionales de un algoritmo.

El marco de análisis esquemático en el entendimiento y solución de un problema que expone Vergnaud, así como las categorizaciones que propone Flores, son aspectos que rigen esta investigación, cuyo propósito es explicar las representaciones de un grupo de estudiantes sobre un problema referente al significado que la serie de Fourier atribuye al fenómeno de la transferencia de masa por el secado de un material.

Independientemente de cuales sean los resultados obtenidos, en el análisis conceptual de los estudiantes sobre la serie de Fourier en un problema de transferencia de masa, el estudio se justifica desde el hecho de proporcionar argumentos para abordar la enseñanza de este concepto matemático. La fortaleza del análisis y los resultados la establece Vergnaud, al mostrar que el proceso de solución de un problema cuyo significado deriva de una situación es un medio y un criterio para la adquisición de contenidos rigurosos. Por ello, las soluciones y los errores que ocurren en el proceso de solución es un aspecto pedagógico esencial para que el investigador determine las relaciones que intervienen en el planteamiento del problema y las que se deben tener presentes para hallar su solución e interpretación, acorde con la situación que se estudia.

4. MÉTODO

El método para establecer las representaciones del estudiante sobre la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa es el siguiente:

1. Mediante la representación formal del problema, el establecimiento de tareas a realizar por el estudiante con el propósito de analizar sus representaciones.
2. Análisis de la variación en las representaciones que genera el estudiante al interactuar con este problema.
3. Identificar las invariantes operatorias en el análisis de la variación de sus representaciones.

La organización de las tareas para el problema o situación implica un análisis de los elementos matemáticos que entran en juego, correspondientes a la estructura de la serie de Fourier y al concepto de la transferencia de masa, bajo la perspectiva de una situación tocante al proceso de secado de un material.

El análisis de la forma en que el alumno interactúa con el problema se basa en un estudio de las variaciones de sus representaciones a través de la medición cualitativa de las invariantes operatorias, las cuales se organizan conforme al tipo de representaciones.

La recolección de datos se lleva a cabo con la observación y sesiones en profundidad o grupo de enfoque, en las que interviene la dirección andamiada del investigador.

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La formalidad del problema de transferencia de masa del tipo difusional en el secado de un material atañe a una situación donde se establece que, bajo ciertas condiciones, la transferencia de masa se debe al movimiento de moléculas de una región de mayor concentración a otra menor. El movimiento disminuye a través del tiempo y el poco espacio que tienen las moléculas para desplazarse.

Ahora bien, la transferencia de masa del agua por el secado se nota en los cambios que posee una propiedad transferente con el tiempo. En este caso, corresponde a la humedad del material representada por T, y su variación con el tiempo de transferencia t, mediante la función $\mathrm{T}(t)$, cuando el cambio en la humedad con el tiempo alcanza una condición de equilibrio. Tal condición representa la finalización de un estado inestable en el proceso (variación de la propiedad transferente con el tiempo) y el inicio del estado estable en la transferencia o movimiento molecular que aún ocurre en el fenómeno (no hay variación de la propiedad transferente con el tiempo). El comportamiento del secado se relaciona matemáticamente al límite de la función $\mathrm{T}(t)$.

De esta forma, el cambio de la humedad del material en el estado estable obedece a un movimiento molecular únicamente por acomodo espacial, debido a que la zona de transferencia tiene poco espacio. La función que representa dicho estado se establece en relación con el cambio en T con la posición x en el espesor del material, representado por $\mathrm{T}(x)$. Esta función también tendrá un límite cuando el espacio del movimiento molecular tienda a ser cero, indicando la finalización del proceso.

La representación matemática asociada a la descripción de ambos cambios de manera conjunta está dada por la ecuación (1), la cual representa concretamente el planteamiento del problema de secado, cuya solución debe dar como resultado la función $\mathrm{T}(x,t)$ que describa el comportamiento de la variación de la humedad del material en términos del espacio recorrido y del tiempo de secado. Para hallarla, se considera que la ecuación diferencial contiene variables separables y se pueden representar como el producto de dos funciones, una de x y otra de t, de acuerdo con lo representado en (2):

$$\mathrm{T}(x,t) = Z(x)R(t) \qquad (2)$$

Bajo este argumento, la solución de la ecuación (1) se representa mediante la expresión dada en (3), donde se puede localizar el producto de las dos funciones $Z(x)R(t)$, asociadas inicialmente con el problema.

$$\mathrm{T}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left[\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}\right] \exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2 k_g t}{4\ell^2}\right] \qquad (3)$$

Ahora bien, el segundo miembro de (3) corresponde al desarrollo de una serie de Fourier, la cual converge a la función que describe el comportamiento del fenómeno en términos del cambio de la transferencia de masa en espacio y tiempo. El coeficiente B_n varía según las condiciones limitantes del fenómeno, que caracteriza la situación del secado de un material contenido en una charola rectangular (espacio delimitado), y se da en un tiempo teóricamente infinito.

Las condiciones que caracterizan al problema en dicha situación precisan que el fenómeno se desarrolla en el tiempo, como una operación de evolución que toma el estado inicial $\mathrm{T}(x,0)$. Ahora bien, la condición inicial se plantea para un tiempo de transferencia cero y una posición en el espesor dada por x, y se lleva a otra condición, a la que le corresponde el estado $\mathrm{T}(x,t)$, cuya descripción se representa mediante una serie de Fourier. De esta manera, el resultado de B_n se inserta en la expresión (3), con lo cual se obtiene la representación de la solución particular del problema en la situación correspondiente mediante la expresión (4):

$$\mathrm{T}(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \left[\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} \right] \exp \left[- \frac{(2n+1)^2 \pi^2 k_g t}{4\ell^2} \right] \qquad (4)$$

La serie de Fourier que conforma a la expresión (4) predice el comportamiento en el equilibrio, debido al cambio de la propiedad de humedad por la transferencia de masa del agua contenida en el material. Dicho comportamiento lo establece una suma de funciones que integran la serie de Fourier, y siguen un patrón sinusoidal que se atenúa gradualmente hasta que el cambio es uniforme en todo el espacio. La suma da como resultado la función $f(t) = \mathrm{T}(x,t)$ en un intervalo $-\ell < x < \ell$, que corresponde al espesor completo del material a secar y al espacio total donde tiene lugar la transferencia.

Bajo este planteamiento, las representaciones formales que genera el problema ofrecen a los alumnos un conjunto de elementos que constituyen las siguientes invariantes operacionales, presentes en la situación problema.

a) Una serie de Fourier determina el cambio en la transferencia de masa que se sufre con el tiempo $\mathrm{T}(t)$ en la última etapa del proceso.

b) El cambio en la transferencia de masa debido a la posición muestra una función $\mathrm{T}(x)$ en la última etapa del proceso, que se encuentra determinada mediante una función periódica generada por una serie de Fourier.

c) La función periódica sigue un patrón sinusoidal que se atenúa gradualmente hasta que la transferencia de masa es uniforme en todo el sistema, determinando así el contenido de esta propiedad en equilibrio.
d) La serie de Fourier se conforma por una suma infinita de funciones.
e) La suma de la serie de Fourier converge a la función que representa al fenómeno en su última etapa.

A continuación, se muestra una de las situaciones problema aplicadas en la investigación, que enmarca la situación del significado de la serie de Fourier en el secado de un material. De igual manera, se presenta un conjunto de situaciones que la integran para realizar el análisis de las representaciones obtenidas de la actuación de los estudiantes.

Situación problema: significado de la serie de Fourier en el cambio de humedad en un material, en un instante t y una posición x:

El desglose de las situaciones que la integran es el siguiente:

1. Determinar la ecuación diferencial que representa el cambio de humedad en el material, en términos de la posición del líquido x que se transfiere a través del espesor ℓ del material en un tiempo de secado t.
2. Precisar la función general que representa la humedad del material en una posición x del espesor ℓ del sólido para un instante t.
3. Establecer la función particular que representa la humedad del material para una posición x en el espesor ℓ del sólido y del tiempo de secado t.
4. Construir el significado de la función hallada en la situación 3, con relación al cambio de humedad que se produce en el material en función de estas dos variables y determinar el equilibrio en el proceso.
5. Construir la gráfica de la función particular, dejando fija la posición x en el espesor de la muestra y variando el tiempo t. Determinar el límite de la función.
6. Construir la gráfica de la función particular, dejando fijo el tiempo t y variando la posición x en el espesor del material. Hallar el límite de la función.

7. Construir el significado de estos resultados en relación con el cambio de humedad que se produce en el material, en un tiempo t y una posición x.

Las situaciones establecidas contienen tareas que remiten a la actuación de los alumnos en anteriores situaciones, pues buscan el reconocimiento del vínculo entre la serie de Fourier y el cambio de humedad en un material. La resolución de las actividades requiere desde conocimientos en ecuaciones diferenciales parciales hasta conocimientos sobre la serie de Fourier como representación de la función que satisface a dicha ecuación. Para llegar a ello, es necesario establecer el comportamiento del proceso en los estados inestable y estable, así como identificar el equilibrio del proceso con el concepto matemático.

El conjunto de tareas a desarrollar para las situaciones anteriores son las siguientes:

1. Según el comportamiento de la curva que representa la cantidad de humedad del material en un tiempo t, dada por $\mathrm{T}(t)$, proponer la expresión matemática que corresponde a dicha función.
2. Vincular el cambio de humedad que se presenta en el secado para un intervalo de tiempo mediante decrementos de humedad e incrementos de tiempo.
3. Expresar matemáticamente la relación anterior.
4. Relacionar la constante física k_g, específica del agua que contiene el material, con la expresión que se ha escrito en el punto 3.
5. Expresar la ecuación diferencial que representa el comportamiento del cambio de humedad del material, en función del tiempo en que es sometido al proceso de secado.
6. Identificar el tipo de ecuación diferencial.
7. Encontrar la función general que satisface a la ecuación diferencial.
8. Hallar la función particular que satisface la ecuación diferencial, utilizando el dato de la cantidad de humedad inicial del coloide en la muestra antes de someterse a secado.
9. Graficar la función particular y describir sus características.
10. Comparar la gráfica con la curva obtenida experimentalmente de $\mathrm{T}(t)$.

11. A partir de la función particular obtenida en 8, encontrar el contenido de humedad en equilibrio y comparar el valor logrado experimentalmente y el que resulta de la curva de $\mathrm{T}(t)$.
12. A partir de la función particular obtenida en 8, hallar el límite en el contenido de humedad en equilibrio.

Los resultados que arrojan en forma general las representaciones de los estudiantes se pueden categorizar de la siguiente manera:

a) *Representaciones canónicas no algorítmicas*, asociadas al entendimiento de la serie de Fourier en relación con el fenómeno. Los estudiantes muestran conocimiento acerca de que la relación entre la serie y el fenómeno existe, pero no saben cómo expresarla matemáticamente.
b) *Representaciones no canónicas*, que atañen al entendimiento de la serie de Fourier en relación con el fenómeno y su variación con la posición. Los estudiantes no comprenden el vínculo de la serie de Fourier con el fenómeno en el estado estable, pues conciben que el proceso de secado termina cuando ya no hay registro de cambio de humedad en el material al terminar el estado inestable y, por ende, hay carencia de asociación con la serie.

Los detalles de la evolución en las representaciones se explican a continuación:

1. Representación canónica no algorítmica

Esquema de entendimiento canónico: Muestra la comprensión de que existe una relación que describe el cambio en la transferencia de masa con el tiempo y la posición, lo cual se ilustra en la Figura 1. El propósito es encontrar una expresión matemática que represente el cambio de T en términos de dos variables t, x, y su solución.

Esquema de solución no algorítmico: El grupo relaciona el cambio de T en t y el de T en x mediante una figura que trata de asociar ambos cambios, dando una posición y un tiempo en que el fenómeno alcanza el equilibrio; sin embargo, no proporciona la ecuación diferencial correspondiente y no establece la solución del problema que se formula en la tarea.

Invariantes: Relación del cambio que se define con respecto a dos variables en la ecuación diferencial parcial; de esa manera hay que encontrar la función T en términos de x y de t.

2. Representación no canónica-algorítmica

Esquema de entendimiento no canónico: Refleja la intención de obtener la ecuación diferencial que relaciona el comportamiento del fenómeno con las variables descritas. Las ecuaciones que propone son lineales. El objetivo es obtener la ecuación diferencial parcial de segundo orden que representa el cambio de la función $\mathrm{T}(x,t)$ en el equilibrio.

Esquema de solución algorítmico: Se plantean ecuaciones diferenciales lineales de primer orden para cada variable, y se trata de hacer operaciones con ellas a fin de establecer la expresión buscada (ver Figura 2).

Invariantes: Relación del cambio que se define con respecto a dos variables en la ecuación diferencial parcial; de esa forma hay que encontrar la función T en términos de x y de t.

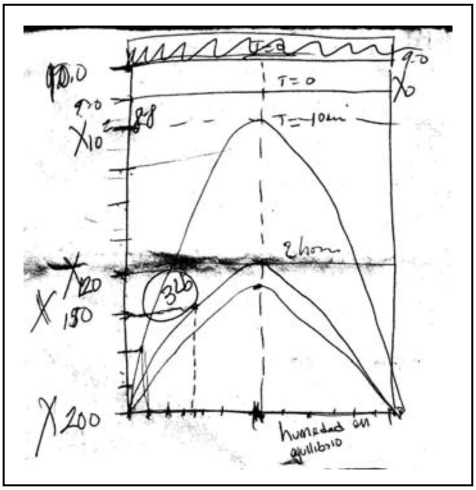


Figura 1. Representación canónica no algorítmica.

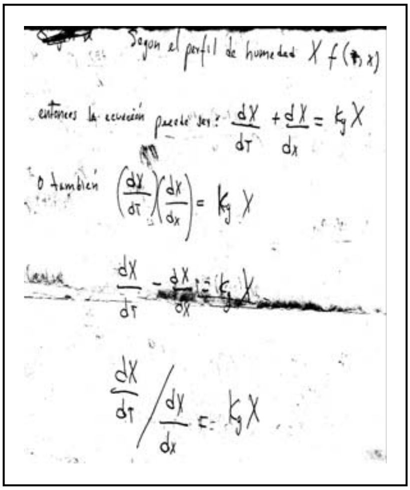


Figura 2. Representación no canónica algorítmica.

3. Representación canónica-algorítmica

Esquema de entendimiento canónico: Expresa la obtención de diferentes series a través del desarrollo de una sumatoria para obtener $\mathrm{T}(t)$ y la representación gráfica de dichas series, que aparece en la Figura 3. El propósito es obtener series y su representación gráfica para identificar a la función $\mathrm{T}(t)$ en función del tiempo t.

Esquema de solución algorítmico: El grupo sustituye valores de x para encontrar $\mathrm{T}(t)$ a través de la conformación de la serie, cuyos términos resultan al desarrollar la sumatoria con valores de $n=0$ hasta $n=25$. De esa manera se tiene que hallar su suma, considerando que es aproximadamente igual o igual cuando n va de 0 hasta ∞.

Invariantes: Desarrollo de una sumatoria, conformación de una serie de funciones, suma de funciones, gráfica de una suma de funciones y obtención de una suma infinita de funciones.

4. Representación canónica asociada a la serie de Fourier

Esquema de entendimiento canónico: El grupo muestra un entendimiento canónico al representar la serie como una suma de funciones, cuyo resultado es una gráfica que corresponde a una cierta porción de la curva $\mathrm{T}(t)$, lo cual se nota en la Figura 4. El propósito es obtener la suma de la serie, su gráfica y la relación que atañe a la curva $\mathrm{T}(t)$.

Esquema de solución no algorítmico: Se presenta cuando el grupo no asocia la convergencia de la serie con su suma, aunque es congruente con el esquema de entendimiento canónico.

Invariantes. Suma de una serie de funciones y su convergencia.

5. Representación canónica de la serie de Fourier asociada al fenómeno de transferencia de masa

Esquema de entendimiento canónico: El grupo atribuye el comportamiento de la suma de la serie al fenómeno, al representar a $\mathrm{T}(t)$ en la última etapa de secado, en la que se llega al equilibrio. El objetivo es identificar la suma de la serie en la última etapa del proceso correspondiente al equilibrio.

Esquema de solución no algorítmico. Aparece cuando el grupo no asocia la convergencia de la serie con el equilibrio del fenómeno, Si bien es congruente con el esquema de entendimiento en el comportamiento del proceso en dicha etapa, desconoce el término matemático y su relación con el contexto.

Invariantes: Suma de una serie de funciones, equilibrio en el proceso de secado.

A lo largo de las sesiones, el desempeño de los alumnos estuvo limitado a entender el cambio de la humedad con respecto a la posición x. En la mayoría de las preguntas que abordaban esta relación, los estudiantes mostraron entendimientos no canónicos. Cuando se hablaba de este tipo de cambio eran capaces de referirse a las curvas de perfil de transferencia de masa, pero no pudieron relacionar dicho perfil con una función $\mathrm{T}(x)$, representada por una serie de Fourier.

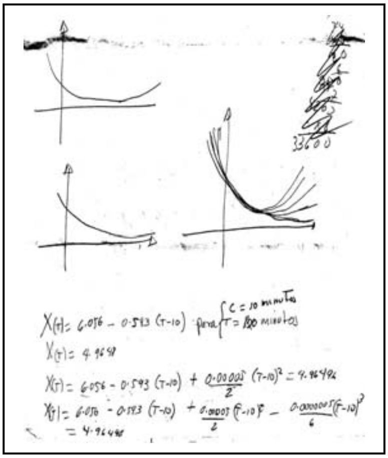


Figura 3. Representación no canónica no algorítmica.

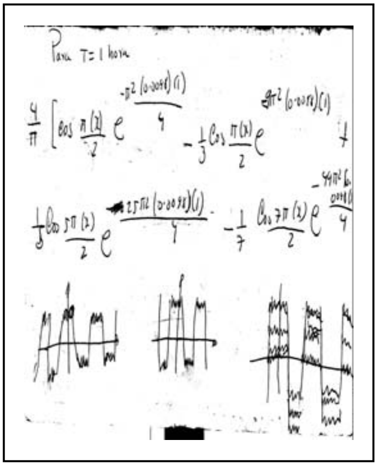


Figura 4. Representación canónica algorítmica.

6. CONCLUSIÓN

En el seguimiento a la actuación del grupo se identifica que hay un entendimiento sobre el concepto de la serie de Fourier, atribuido al comportamiento del fenómeno, sin que se haya reconocido que se trata de este concepto matemático ni los aspectos que lo definen. Tal es el caso del reconocimiento que ocurre acerca de la suma de funciones que proviene de la serie y converge a $\mathrm{T}(t)$. En suma, el grupo refleja un entendimiento sobre una serie, mas no identifica que es la serie de Fourier.

Acerca del fenómeno, el grupo tiene conocimiento sobre el equilibrio del proceso como el límite del estado inestable del fenómeno. Sin embargo, no reconoce que el estado estable se define por el movimiento molecular únicamente en el espacio o lugar de transferencia. Entonces, la vinculación y el significado que la serie de Fourier provee al fenómeno de transporte de masa en una situación de secado no se logra construir. Por tanto, es necesario determinar nuevas situaciones y tareas que apoyen a los estudiantes a construir el significado del concepto de la convergencia de la serie de Fourier en tal contexto.

Finalmente, se precisa el alcance del planteamiento de Vergnaud, al enmarcar el conocimiento matemático del niño para resolver situaciones de adición y sustracción hacia la descripción de un entendimiento también matemático, pero que concierne a un grupo de estudiantes del nivel superior en el área de ingeniería, acerca de conceptos cuyo significado deriva de situaciones que ofrece un problema complejo ligado con su realidad.

En este sentido, los resultados obtenidos en los trabajos de Vergnaud han contribuido a vislumbrar el conocimiento de un niño de educación primaria en situaciones propias de su nivel de enseñanza. Ahora bien, los resultados de este trabajo pueden ser útiles para identificar la jerarquía en el nivel de dificultad al asociar el significado de la convergencia de la serie de Fourier en las situaciones descritas; analizar el tipo de errores que se cometen en la solución de los problemas relacionados con tal concepto, así como para identificar los procedimientos formales y pragmáticos que los estudiantes utilizan, precisando cuáles recursos formales determinan el acceso a una solución canónica algorítmica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bonilla R., E.; Block, D. y Waldegg, G. (1993). La investigación educativa en los ochenta, perspectiva para los noventa. En Elisa Rius Bonilla, David Block Sevilla y Guillermina Waldegg (Coord.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (pp. 20-21). México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa-SNTE.

Camarena, P. (1993). *Curso de análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctricas*, México: Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del IPN.

Farfán, R. (1995). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Flores, R. (2003). *El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción: un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación.* Tesis de doctorado publicada, Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Guerrero, A. (1997). *El proceso de enseñanza del aprendizaje de las operaciones elementales*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Autónoma de México.

Muro, C. (2000). *La significación de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa.* Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Muro, C. (2004). *Análisis del conocimiento del estudiante relativo al campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa.* Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.

Muñoz, G. (1997). Un aspecto del enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral: Un ejemplo en la cinemática. En R. Farfán (Ed.), *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 64-68). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3* (2), 131-170.

Nunes, T. & Bryant, P. (1998). *Las matemáticas y su aplicación la perspectiva del niño.* México: Siglo XXI Editores.

Vargas, S. J. y López, L. A**.** (1988). *La adquisición de las operaciones aritméticas mentales en los niños de primaria,* México: DGEE-SEP/OEA.

Vergnaud, G**.** (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: a research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 14-30). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Vergnaud, G**.** (1996). The theory of conceptual fields. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldín & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 219-240). Mahwah NJ: Lawrence Eribaum Associates Publishers.

Vergnaud, G. (1997). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.

Vergnaud, G**.** (2000). Constructivisme et apprentissage des mathématiques. *Trabajo presentado en la Conferencia sobre Constructivismo,* Ginebra, Suiza.

Vergnaud, G., Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue Francaise de Pédagogie 3* (6), 28-43.

Ulín, C. (1984). *Análisis histórico critico de la difusión del calor: el trabajo de Fourier.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

Autores

Claudia Rosario Muro. Instituto Tecnológico de Toluca. México; claudiamuro@hotmail.com

Patricia Camarena. Instituto Politécnico Nacional. México, D. F. México; patypoli@prodigy.net.mx

Rosa del Carmen Flores. Universidad Autónoma de México. México; rcfm@servidor.unam.mx

MARÍA LOURDES RODRÍGUEZ y LOUREMY RICARDO

EL MODELO HOLÍSTICO PARA EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE GEOMETRÍA EN ARQUITECTOS DE LA ESCUELA CUBANA

THE HOLISTIC MODEL FOR THE TEACHING-LEARNING PROCESS OF GEOMETRY IN ARCHITECTS OF THE CUBAN SCHOOL

RESUMEN. En este artículo se describen los elementos del modelo holístico para el proceso enseñanza-aprendizaje de la geometría para arquitectos en la educación superior cubana. El mismo tuvo su base en el modelo de Van Hiele y el enfoque sistémico. El primer elemento de este modelo es la integración del contenido donde se unifican las dos ramas de la geometría (la descriptiva y la del espacio) relacionándose armónicamente como un todo los contenidos geométricos, el segundo elemento son los niveles de razonamiento y como tercer elemento las fases. El estudio realizado perfeccionó el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes de Arquitectura lográndose una mejor adquisición de las habilidades geométricas que les brinda la Matemática.

PALABRAS CLAVE: Modelo holístico, integración de contenidos, niveles de razonamiento, geometría para arquitectos.

ABSTRACT. This article describes elements of the holistic model for the teaching-learning process of geometry for architects in Cuban higher education. It was based on Van Hiele's model and the systemic approach. The first element of this model is content integration where the two branches of geometry (descriptive and spatial) are unified, the geometric content coming together harmoniously as a whole. The second element is the level of reasoning and the third, the stages. The study perfected the teaching-learning process for architecture students enabling them to achieve a better acquisition of geometric skills than that afforded by mathematics.

KEY WORDS: Holistic model, content integration, levels of reasoning, geometry for architects.

RESUMO. Este artigo descreve os elementos do modelo holístico para o processo ensino aprendizagem da geometria para arquitetos na educação superior cubana. O mesmo teve sua base no modelo de Van Hiele e o enfoque sistêmico. O primeiro elemento deste modelo é a integração do conteúdo donde se unificam os dois ramos da geometria (a descritiva e a do espaço) relacionando-o harmonicamente, como um todo, aos conteúdos geométricos, o segundo elemento são os níveis de raciocínio e como terceiro elemento, as fases. O estudo realizado melhorou o processo de ensino aprendizagem dos estudantes de Arquitetura conseguindo uma melhor aquisição das habilidades geométricas que lhes fornece a Matemática.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2007) 10(3): 421-461
Recepción: Noviembre 24, 2006/Aceptación: Julio 12, 2007

PALAVRAS CHAVE: Modelo holístico, integração de conteúdos, niveles de raciocínio, geometria para arquitetos.

RÉSUMÉ. Dans cet article sont décrits les composantes du modèle holistique des processus d'enseignement–apprentissage de la géométrie chez les futurs architectes dans le système d'éducation supérieur cubain. Celui-ci est basé sur le modèle de Van Hiele et l'approche systémique. La première composante de ce modèle est l'intégration du contenu qui unifie les deux branches de la géométrie (descriptive et de l'espace), en rapprochant ces contenus géométriques harmonieusement, dans un tout; la seconde composante est celles des niveaux de raisonnement et la troisième composante et les phases. L'étude menée a perfectionné le processus d'enseignement–apprentissage chez les étudiants d'architecture, en arrivant à une meilleure acquisition des compétences géométriques qui donne la mathématique.

MOTS CLÉS: Modèle holistique, intégration des contenus, niveaux de raisonnement, géométrie pour architectes.

1. INTRODUCCIÓN

En esta investigación se realizaron observaciones sobre el desempeño del estudiante en la carrera de Arquitectura de la Universidad de Camagüey, Cuba. Esto permitió identificar que el modo en que se desarrollaba el proceso de enseñanza-aprendizaje no permitía que el alumno aplicara en un corto plazo lo aprendido en matemática a asignaturas técnicas o relacionadas con su profesión.

Además, el uso del modelo de Van Hiele en la educación superior, tal como está concebido, no mide el logro de la habilidad de generalizar en los estudiantes, pues ese modelo sólo se ha aplicado a la educación primaria y secundaria. Otra de sus limitantes radica en que los niveles de razonamiento de los estudiantes no se deben medir únicamente por el sistema de conocimientos geométricos, sino hay que tener en cuenta también el desarrollo cognitivo de los estudiantes, es decir, su dominio del sistema de habilidades y de valores que deben lograr en el nivel educaciona al que se matriculen.

2. EL MODELO HOLÍSTICO

Muchos investigadores están enfrascados en el reto que tiene la educación superior contemporánea: preparar a sus estudiantes a enfrentar exitosamente este mundo globalizado. Este nivel de enseñanza deberá responder, entre otras direcciones, a lo siguiente:

> Desarrollar un proceso de formación del profesional que consolide un paradigma educativo productivo, creativo e innovador, en contraposición con el informativo, vigente esencialmente en la actividad, que deberá proporcionar la participación activa de estudiantes y profesores en su vínculo con los nuevos enfoques y desarrollo de la producción y los servicios teniendo en cuenta nuestras propias experiencias y las internacionales. Esto implica un profundo análisis, no sólo de las concepciones, sino de las condiciones reales de cómo implementar y ejecutar dicho proceso para lograr un cambio efectivo (Fuentes, 2000, p. 16).

De este planteamiento se infiere que en la educación superior hay mucho por hacer para lograr el desempeño profesional de los egresados universitarios, quienes tendrán que enfrentar los retos de la contemporaneidad. Por tanto, la educación superior necesita plantearse la formación de profesionales que, además de una sólida instrucción y educación, desarrollen competencias que les permitan convertirse en verdaderos creadores y transformadores, capaces de autoprepararse sistemáticamente durante toda la vida.

En nuestra opinión, preparar al hombre para la vida significa mostrarle desde el aula los vínculos existentes entre las ramas del saber y el mundo que lo rodea para hacerlo partícipe. Esta es una forma de contribuir a que el aprendizaje se haga efectivo, es decir, que el proceso docente educativo se ve como un todo, donde sus componentes –lo académico, lo laboral y lo investigativo– tienen una integración sistémica.

Por otro lado, cuando se analiza el término *holístico* responde a una totalidad, a criterio de Wertheimer:

> (…) en una totalidad organizada, lo que ocurre en el todo no se deduce de los elementos individuales, ni de su composición, sino al revés, lo que ocurre en el todo lo determinan las leyes internas de estructuración de ese mismo todo (Guzmán, 2002, p. 30).

En consecuencia, el todo no se explica por las partes, se manifiesta a través de las partes: el todo recibe significado de las partes insertas en él. Esto es, cierta parte de una totalidad o de un sistema tiene significación distinta si está aislada o integrada a otra totalidad, ya que sus funciones dentro de otro sistema le confieren cualidades diferentes.

Según escritos realizados por la UNILATINA (2001), desde un enfoque holístico la formación de un profesional óptimo significa que debe haber aprendido la máxima información científica sobre su profesión con una óptica inter y transdisciplinaria, en el marco de la formación de una conciencia social y de profundos valores éticos y morales, desarrollando su intelecto de forma que permita la capacidad crítica y el pensamiento científico creativo, así como las aptitudes que convergen con la maduración de la personalidad profesional para la toma de decisiones y el entrenamiento creativo.

Por otro lado, grupos de investigadores se han dedicado a estudiar sobre qué es pertinente de la matemática para la profesión del arquitecto. Entre ellos, podemos citar a Verner y Maor (2006), quienes implantaron un curso de cálculo basado en acercar la matemática a la realidad de su actuación, animando a sus estudiantes a que usaran la matemática en sus proyectos. Otra experiencia fue realizada por Rossi (2006), al enseñar la geometría a partir de la comprensión de esquemas geométricos en los objetos orgánicos regulares para formar la base de enseñar el dibujo y la representación científica, como síntesis arquitectónica formal. Por su parte, Consiglieri y Consiglieri (2003) ofrecen la propuesta de impartir un curso de matemática que tenga algunas nociones de topología y donde el álgebra lineal clásica y la geometría analítica adquieran una visión moderna de la utilidad tecnológica, con el propósito de que la matemática no entre en el abandono y los estudiantes puedan ganar de la matemática y la geometría topológica los requisitos para su imaginación y su habilidad poética.

Un trabajo interesante y renovador es el que llevan a cabo Carnicero, Enrich, Fornari y Mahiques (2006). Ellos investigan la comprensión de los procesos de morfogénesis y la cultura sistémica del diseñador a través de las imágenes asociadas a los fractales. La comprensión de las nuevas ramas de la geometría, en particular la geometría fractal, permite observar de otra manera la realidad existente y amplía la capacidad de los recursos disponibles para el diseño.

Dicho estudio insiste en abordar la geometría no-euclidiana, que implica una descripción del espacio radicalmente diferente, un nuevo concepto de movimiento y una nueva formulación de la complejidad proyectual. Esto posibilita el pasaje del espacio euclidiano a un espacio topológico y genera una verdadera revolución morfológica en la concepción del objeto arquitectónico, debido al potencial cognitivo de los modelos que suministra la geometría fractal, los cuales no sólo dan estructura cognitiva a los objetos y los procesos naturales (la representación y la forma), sino también propician el análisis de algunas de sus propiedades.

Si se observan las diferentes investigaciones que indagan en el proceso de enseñanza-aprendizaje para estudiantes de Arquitectura, hay una tendencia a que tal proceso se desarrolle según las exigencias del mundo contemporáneo del siglo XXI –donde el avance de la tecnología es cada vez más creciente– y que las matemáticas estén más cercanas a su realidad de actuación.

Ahora bien, teniendo en cuenta los anteriores preceptos teóricos, se va a entender por *modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría para arquitectos* al que se caracteriza por presentar el contenido integrado, como un todo de la geometría para arquitectos, en función de cumplir con el sistema de conocimientos, habilidades y valores que se persigue en el plan de estudios de la carrera de Arquitectura en Cuba, a fin de contribuir a la formación integral del futuro arquitecto. La geometría es una poderosa herramienta que incide en el campo de actuación de dicha carrera; si se organiza y ejecuta dicho proceso para que brinde de forma eficiente las técnicas de representación, el estudiante de esta carrera hará las propuestas de sus proyectos arquitectónicos sobre bases científicas.

El modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría para arquitectos tiene su base en el método sistémico y enriquece el modelo de Van Hiele, al aportarle la integración de los contenidos geométricos y los indicadores (con acciones y operaciones) que permiten medir el nivel en que se encuentran los estudiantes de la carrera de Arquitectura, mientras que las fases de enseñanza-aprendizaje se establecen en función de ofrecer las indicaciones metodológicas para la ejecución y control del proceso.

Lo holístico de este modelo reside en lo que ocurre en el todo (la realidad donde va a actuar el arquitecto) no se deduce de los elementos individuales (las disciplinas que conforman el plan de estudios), ni de su composición, sino al revés: lo que ocurre en el todo lo determinan las leyes internas de estructuración de ese mismo todo (la arquitectura). El proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría para arquitectos con esta nueva propuesta se desarrolla partiendo de las necesidades técnicas y sociales que van a enfrentar en su futura profesión. De esta forma, el estudiante siente la necesidad de aprender para solucionar los problemas que la sociedad le va a exigir como profesional.

Este modelo, al partir de la realidad de actuación, totaliza también el campo de acción de la geometría para arquitectos sin hacer diferencias entre sus ramas. La integración de los contenidos generaliza las posibilidades que brinda la geometría para el desempeño de la profesión, lo cual se refleja a través de las leyes internas que rigen la carrera de Arquitectura.

3. PRIMER ELEMENTO DEL MODELO: LA INTEGRACIÓN DE LOS CONTENIDOS GEOMÉTRICOS

El aporte teórico de nuestro trabajo consiste en unificar ambas ramas de la geometría (descriptiva y analítica) no de manera formal, sino interrelacionando armónicamente los contenidos en cada una de las unidades temáticas del plan de estudios, donde se establece un lenguaje común entre todas las ramas de la geometría que reciben los estudiantes de Arquitectura. Tales aspectos introducidos al proceso hacen el aprendizaje de la geometría más sencillo, sin eliminar la solidez de los contenidos.

De igual modo, con la integración del contenido a la teoría de Van Hiele aportamos recursos pedagógicos útiles a los profesores y estudiantes, que facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría para arquitectos. Con esta estructura de los contenidos geométricos se redujo a las dos terceras partes el tiempo que se dedicaba a las conferencias, dando cabida a más actividades de índole docente para la ejercitación e independiente por parte del estudiante, propiciando su mayor creatividad.

Al establecer un mismo lenguaje geométrico entre las matemáticas y la disciplina de Comunicación se le ha facilitado el trabajo a ésta, ya que las matemáticas ofrecen la herramienta teórica necesaria y la disciplina de Comunicación reafirma lo dado por la matemática y extiende su estudio a otros aspectos de la geometría propios de la arquitectura. Los resultados tocantes a una mejor calidad en la docencia y una retención escolar se deben a la incidencia de tal aporte en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría para arquitectos. Los Anexos I, II, V, VI, y VII muestran encuestas aplicadas a profesores y estudiantes donde aparecen comparaciones sobre el por ciento de promoción y otros instrumentos que comprueban nuestro planteamiento.

4. PROPUESTA DE ORGANIZACIÓN DEL CONTENIDO DE FORMA HOLÍSTICA DE LA GEOMETRÍA PARA ARQUITECTOS

El profesor y el estudiante intervienen en la planificación, organización, regulación, ejecución y control del desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje, en aras de alcanzar el objetivo previsto en el plan de estudios. Al respecto, Álvarez (1999) señala:

> El profesor selecciona la manera de desarrollar el proceso, es decir, el método lo planifica en el momento adecuado, en correspondencia con la estructura de los conocimientos a desarrollar y con las particularidades de los estudiantes. Lo organiza determinando el orden de los pasos, técnicas y procedimientos que mejor se adecuen a su concepción estratégica. (p. 43)

Ahora bien, el modo más adecuado para lograr que los estudiantes adquieran los conocimientos en el proceso de enseñanza-aprendizaje precisa de una organización más conveniente del contenido, seleccionándolo de las ramas del saber que atañen a las ciencias; es decir, de la cultura que la humanidad ha desarrollado y mejor se adecua al propósito de la profesión.

El hombre, impelido por la función de satisfacer sus necesidades, transforma el medio que le rodea y, a la vez, lo refleja en su conciencia. Dicho reflejo de los objetos en movimiento, así como el de los modos específicos que el hombre emplea para relacionar y transformar los objetos, va conformando la cultura humana. Un profesional con características independientes y creadoras, capaz de resolver los problemas de la producción y los servicios de su país, se forma mediante una óptima aprehensión de los contenidos. Por ello, el modo en que los adquiere influye en el desarrollo de sus habilidades.

Sin embargo, al contenido no se le puede identificar sólo como un sistema de conocimientos, ya que abarca tres dimensiones: los conocimientos que reflejan el objeto de estudio, las habilidades que recogen el modo en que se relaciona el hombre con dicho objeto, y los valores que expresan la significación que el hombre le asigna a los objetos. Al interpretar esos ámbitos se debe reparar en que son tres tipos de contenidos distintos y cada uno conserva su propia personalidad, pero no existen independientes unos de otros. Todos se relacionan dialécticamente por medio de una tríada y conforman una unidad que, justamente, es el componente estudiado.

Por lo general, se han detectado cinco problemas fundamentales en la distribución de los contenidos del programa de una asignatura en la educación superior cubana:

a. Organizar el contenido de la manera más eficiente posible, que permita darle al estudiante la posibilidad de realizar su actividad, sin ampliar el volumen del mismo.

b. Garantizar la formación de capacidades y habilidades específicas de la futura actividad profesional, así como los métodos de pensamiento que permitan aplicar de forma independiente los conocimientos en situaciones típicas y nuevas. De igual manera, obtener nuevos conocimientos.

c. Lograr un hilo conductor en la secuencia del contenido que favorezca su asimilación, acorde con el desarrollo cognitivo del estudiante (Portuondo, 2001).

d. Poder relacionar los contenidos adquiridos con la realidad que rodea al alumno y, en particular, con la rama del saber en que se prepara (Palacio, 2003).

e. Formar un profesional que defienda los intereses de la sociedad. Para ello, tiene que haberse formado en correspondencia con los valores que ésta defiende.

En consideración a lo anterior, en esta investigación se entiende por *organización del contenido de forma holística* a la acción de estructurar el contenido de la geometría para arquitectos integradamente, donde se interrelacionan armónicamente como un todo los contenidos geométricos. Cada rama de la geometría expresa sus rasgos esenciales en estrecha relación con el campo de actuación de dicha carrera, que es el estudio del espacio, llevado al enfrentamiento del problema profesional. De este modo, cuando una asignatura queda integrada holísticamente, se concibe la organización del proceso de enseñanza-aprendizaje como un todo. Existe un equilibrio entre el todo y sus partes; no hay una suma de fracciones de ciencias que los estudiantes no saben para qué les sirve, ni son capaces de integrar a su futura profesión.

Para abundar más sobre lo anterior, el Esquema 1 (véase el Anexo III) presenta una relación entre la ciencia, los objetivos del plan de estudios de la carrera de Arquitectura y las asignaturas que la conforman. En esa relación hay una contradicción entre la fundamentalización y la profesionalización, que es notoria por la ciencia fragmentada en asignaturas y por los objetivos que se deben lograr en los estudiantes. Al conformar el proceso como un todo, se establecen los nexos entre las ramas de la geometría que estudia un arquitecto con otras asignaturas de su carrera, pues la geometría constituye el fundamento teórico a cada paso que los estudiantes dan en sus representaciones espaciales, concretadas en planos, cortes, elevaciones o perspectivas. Es decir, pone en equilibrio la fundamentalización que ofrece la geometría y la profesionalidad que se debe conseguir en los alumnos.

La carrera de Arquitectura en la escuela cubana se compone por varias disciplinas, entre las que se pueden mencionar Proyecto Arquitectónico, Comunicación, Tecnología y Matemáticas. Como las matemáticas son nuestro objeto de estudio, el plan de estudios incluye un sistema de contenidos sobre las ramas de la geometría que inciden con mayor fuerza en los fundamentos geométricos de la carrera: geometría descriptiva y geometría analítica. Ahora bien, el estudio de la ciencia geométrica brinda los sistemas gráficos de representación, los métodos y técnicas de representación, desarrolla la visualización y el pensamiento abstracto que forman parte de las herramientas de un arquitecto.

Al integrar los contenidos de las diferentes ramas de la geometría para arquitectos, el proceso de enseñanza-aprendizaje tiene las siguientes ventajas:

- Le facilita el trabajo a la disciplina de la Comunicación, ya que hay un lenguaje único para la geometría que se enseña a los alumnos.
- Enriquece las distintas posibilidades de los criterios que tiene el alumno sobre la representación gráfica.
- Le facilita al estudiante de Arquitectura que piense en tres dimensiones, lo cual hace que perciba con mayor facilidad las imágenes externas e internas, las recree, transforme o modifique; que recorra el espacio o intervenga para que los objetos lo recorran, y que produzca o decodifique información gráfica. Es decir, le proporciona al estudiante distintas posibilidades para resolver un problema geométrico, aportándole nuevas cualidades a la geometría que necesita en su formación. De esta forma se manifiesta la base sistémica de esta integración.

Este proceso logra que cada rama de la geometría adquiera una nueva connotación, pues va a expresar los rasgos que caracterizan a la geometría para arquitectos; sus elementos esenciales se hallarán en cada una de las ramas que le conciernen. La geometría es la ciencia de las relaciones espaciales de la realidad objetiva (allí radica su esencia), pero como contenido que se esconde en la forma o el fenómeno hace que el estudiante lo perciba o vivencie al tener una nueva concepción y visión de las relaciones entre los entes geométricos y sus diferentes representaciones. En cada una está presente la esencia de la geometría y los elementos esenciales que la caracterizan como rama específica. Precisamente en dicho aspecto se manifiesta lo holístico del modelo.

Si en el proceso de enseñanza-aprendizaje se desmiembran, desarticulan o desintegran los contenidos en las diversas asignaturas que conforman las disciplinas de la carrera, estas partes por sí solas no tienen sentido alguno. No significan nada para el estudiante debido a que no expresan los rasgos y esencia de la ciencia objeto de estudio; sólo se puede lograr esto a través de la integración de los contenidos y su inserción con el todo que conforma la futura actividad profesional, en este caso del arquitecto.

En consecuencia, si no se parte de la realidad de actuación de la profesión tampoco el enfoque sería holístico porque no se vivenciarían las relaciones con lo social y, por ende, no se mostrarían los valores relacionados con dicha actuación.

5. REQUISITOS GENERALES PARA ORGANIZAR UN CONTENIDO DE FORMA HOLÍSTICA

A grosso modo, los lineamientos para organizar un contenido en forma holística son los siguientes:

- Tener presente la unidad entre el pensamiento abstracto y el concreto.
- Comprobar la interrelación dialéctica de lo general y lo particular entre los contenidos de la geometría.
- Revelar la interrelación con la realidad de actuación profesional.
- Existencia de literatura con un enfoque integrador para la preparación del estudiante.

En cuanto a los requerimientos para organizar holísticamente el contenido de un tema o varios de una asignatura, son:

- Precisar los conocimientos más generales o esenciales que, en calidad de invariantes o núcleo del conocimiento, subyacen en la base de toda la estructura del sistema de conocimientos.
- Partir de objetos reales, preferiblemente relacionados con la profesión.
- Aprovechar los puntos de contacto entre los contenidos de la geometría descriptiva y la analítica.
- Hacer extensiones o ampliaciones de conceptos y generalizaciones en los contenidos que lo requieran.

- Incentivar la creatividad de los estudiantes con tareas individuales donde tengan que crear su propio modelo. Dichas actividades no tienen que ser solamente de la asignatura en la que se ha puesto la tarea, necesitan incorporar elementos de otras asignaturas o de la futura profesión para mostrar a los estudiantes de Arquitectura que sus asignaturas forman parte de un todo, referente a su futura profesión.

La base para establecer los requisitos anteriores es que la geometría analítica del espacio estudia objetos materiales concretos, esquemas o representaciones gráficas y utiliza fundamentalmente el lenguaje de las ecuaciones, mientras que la geometría descriptiva trata las abstracciones que se realizan de las proyecciones ortogonales e infiere qué ocurre con esos entes geométricos, sin tener sus representaciones simbólicas o ecuaciones, si dichos contenidos se interrelacionan como un todo.

Para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje, se instaura una unidad dialéctica entre lo concreto y lo abstracto en la que, a través de interrelacionar armónicamente los temas de las ramas antes mencionadas, se establecen sus nexos a partir de un estudio teórico desde el punto de vista matemático y didáctico para no entrar en contradicciones (respetando la precedencia que tienen los contenidos geométricos entre ellas, así como sus axiomas, postulados, teoremas, entre otros). Además, se debe tomar en cuenta que la intuición es la base para la abstracción y que la visualización –tan importante para los alumnos de Arquitectura– se realiza a través de objetos concretos materiales (láminas, películas o construcción de objetos), esquemas, representaciones gráficas y un lenguaje comprensible.

En este sentido, tomar elementos de la geometría descriptiva y la analítica permite enriquecer las diferentes interpretaciones que se pueden realizar de los entes geométricos y, a su vez, llevar el pensamiento geométrico de lo concreto a lo abstracto y nuevamente a lo concreto. Esto se constata cuando los estudiantes llevan a la práctica, en sus diseños y proyectos, lo que han aprendido sobre la ciencia geométrica. Cabe mencionar que los contenidos geométricos, de acuerdo con la historia de las matemáticas, fueron adquiridos por los hombres ya en las primeras etapas del desarrollo bajo la influencia, incluso, de la más imperfecta actividad productiva. A medida que se iba complicando esta actividad, cambió y creció el conjunto de factores que influían en el desarrollo de la geometría.

Las abstracciones geométricas no pueden originarse arbitrariamente, ya que surgen como resultado de la interrelación del hombre con el mundo material.

Ribnikov (1991) afirma que el conocimiento científico tiene un objetivo único, el estudio del mundo real, mientras que su criterio de verdad, según Lobachevski, radica en la práctica, la experiencia. Es decir, la geometría ha tomado los objetos del mundo real y ha hecho abstracciones de ellos para estudiarlos de manera detallada.

Además, la geometría forma parte de la fundamentación teórica sobre el objeto de la profesión de los arquitectos, ya que permite hacer un estudio del espacio mediante una correcta formación del lenguaje gráfico. Por tal motivo, los estudiantes necesitan conocerla profundamente, con nuevos enfoques que les desarrollen su imaginación, visualización y creatividad para incorporarla a su profesión.

La arquitectura no hubiera llegado a ser una profesión si su herramienta teórica no fuese la geometría. Tal afirmación no quiere decir que la arquitectura surgiera cuando tomó como base a la geometría, sino se enriqueció y fortaleció con ella. Este es un ejemplo de cómo la ciencia geométrica tras consolidarse ha tenido impacto en la sociedad, ya que las necesidades de los hombres por hacer grandes obras maestras en la construcción los condujo a que hicieran un estudio detallado de la geometría y la incorporaran a su futura actividad social.

Retomamos el principio que esbozó Aristóteles en la Antigua Grecia: el todo es mayor que la suma de las partes componentes (Ruiz, 2000), que se interpreta de la siguiente forma: las diversas ramas de la ciencia geométrica se fueron creando en el transcurso del tiempo por las necesidades de los hombres, mas no pueden verse aisladas unas de otras; están relacionadas entre sí. Al observar a la geometría como sistema no podemos concebir que sus partes se dan con predominio, sino se construyen o eligen durante el proceso de división del sistema como un todo; es decir, la geometría es un sistema que puede ser dividido en distintos modos o ramas. Cada división de nuestro sistema geométrico en partes representa un subsistema (rama) y en conjunto integran la ciencia geométrica como un todo.

Por otro lado, en el concepto de sistema prevalece el enfoque integral porque es concebido como un todo. Al establecer los nexos entre las diferentes ramas del saber y tomarlos en cuenta en el proceso de enseñanza-aprendizaje, los estudiantes desarrollan el pensamiento creador y buscan las relaciones entre las diversas ciencias que conforman el soporte teórico de su futura profesión (el todo para ellos). Determinar los vínculos de los contenidos de geometría con las asignaturas propias de la carrera de Arquitectura y mostrar ejemplos que atañen a los problemas de dicha profesión evidencian el carácter social de la ciencia geométrica, pues se tiene en cuenta la producción, difusión y aplicación de conocimiento. Esta actividad va a generar que los estudiantes adquieran los contenidos, cultura y transparencia de la naturaleza social tocante a la ciencia geométrica.

Si se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría como parte de un todo (la futura profesión de arquitecto), el alumno siente la necesidad de aprender porque conoce qué función cumple la asignatura, y que esos conocimientos son importantes para llevar a cabo su trabajo y resolver los problemas en su desempeño después de graduado.

Otro aspecto a considerar es el desarrollo cada vez más creciente de las técnicas de cómputo, pues hay graficadores electrónicos que resuelven múltiples problemas profesionales si se aplican los conocimientos geométricos necesarios. Por ejemplo, *AutoCAD* permite que el estudiante realice sus propuestas de proyecto y con simples movimientos observe, desde distintos ángulos, cómo quedarían sus diseños; en caso de que tengan alguna imperfección, puede arreglarla sin mucha pérdida de tiempo y de recurso. Sin embargo, para llevar a cabo estas actividades necesita adquirir de manera correcta los contenidos geométricos, ya que con sus conocimientos y técnicas de representación utiliza AutoCAD con el propósito de facilitar su trabajo.

6. PROPUESTA PARA ORGANIZAR POR TEMAS EL CONTENIDO DE LA GEOMETRÍA PARA ARQUITECTOS

Los temas referentes a la geometría deben ser planificados de una forma que propicie las condiciones necesarias para que los alumnos logren el aprendizaje requerido, a través de niveles de abstracción progresivamente más altos que les permitan alcanzar la capacidad de razonamiento lógico matemático y puedan tener una visión generalizada de la geometría. El contenido de la materia quedaría estructurado de la siguiente manera:

Tema 1. Algunos conceptos básicos de la geometría

1.1. Contorno aparente

1.2. Superficies. Aristas. Vértices

1.3. Tríada de conceptos básicos

1.4. Forma real y aparente

1.5. Direcciones principales del espacio real

1.6. Análisis de las experiencias visuales

Tema 2. Sistemas gráficos de representación

2.1. Sistema cónico

2.2. Sistema axonométrico

2.3. Sistema acotado

2.4. Sistema diédrico

2.5. Sistema cartesiano rectangular del plano

2.6. Sistema triédrico

2.7. Sistema cartesiano rectangular del espacio

Tema 3. El punto, la recta y el plano

3.1. El punto en el sistema diédrico, cartesiano del plano y del espacio

3.2. La recta. Aspectos generales de la recta. Análisis de la tríada de conceptos básicos. Trazas de una recta. Forma paramétrica y vectorial

3.3. El plano. Aspectos generales. Representación. Diferentes tipos de planos. Trazas

3.4. La recta como intersección de dos planos

Tema 4. Relaciones entre punto, recta y plano

4.1. Puntos situados en rectas y planos

4.2. Puntos y rectas contenidos en planos

4.3. Principios de paralelismo y perpendicularidad

4.4. Relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre recta y recta, plano y plano y recta y plano

Tema 5. Poliedros

5.1. Definición de poliedro. Generalidades

5.2. Clasificación de los poliedros

5.3. Poliedros compuestos. Interpretación y representación

Tema 6. Las cónicas

6.1. Las cónicas. Generalidades

6.2. La circunferencia

6.3. La elipse

6.4. La hipérbola

6.5. La parábola

Tema 7. Superficies curvas

7.1. Definición de superficie. Generalidades

7.2. Clasificación de las superficies en regladas y no regladas

7.3. Estudio de las cuádricas y otras superficies

Tema 8. Curvas en el espacio real

8.1. Definición de curva en el espacio real

8.2. Clasificación de las curvas en el espacio real

8.3. Representación gráfica de una curva en el espacio real

Tema 9. Sólidos

9.1. Definición de sólido. Generalidades

9.2. Sólidos. Representación e interpretación

Esta nueva distribución de los temas de geometría funde en una sola a las dos ramas, que se encuentran relacionadas estrechamente desde el punto de vista geométrico –donde se respeta la precedencia que tienen los contenidos geométricos entre ellos, sus axiomas, postulados, teoremas, principios, leyes–. La unión de las dos ramas de la geometría no es por temas, sino que dentro de un mismo tema aparecen ambas.

Tema 1. Da los elementos fundamentales que sirven de base para la comprensión y entendimiento de la geometría en general, un aspecto del que carecen los libros de textos de geometría analítica que se utilizan para las ingenierías y otras carreras universitarias.

Tema 2. Abarca los diferentes sistemas gráficos de representación más usados en las diferentes ramas de la geometría, las relaciones entre ellos, las ventajas que tiene el arquitecto al saber representar e interpretar los entes geométricos en todos y las limitaciones que muestra al dominar unos y otros no.

Tema 3. Ofrece las diferentes formas de interpretar y representar el punto, la recta y el plano a través de lo descriptivo y lo analítico, simultáneamente. Esto proporciona al estudiante diferentes vías para el proceso de formación de imágenes tanto mentales como materiales, ya que utiliza diferentes formas para representar un mismo ente geométrico y sus relaciones, lo cual contribuye a la comprensión y descubrimiento de los nuevos contenidos geométricos. De este modo, se enriquece la interpretación y comprensión de modelos bidimensionales y tridimensionales para desarrollar la habilidad de traducir una información recibida en forma simbólica a una imagen visual, aspecto relevante para un estudiante de la carrera de Arquitectura.

Tema 4. Muestra las diferentes relaciones que hay en el espacio real entre el punto, la recta y el plano, interrelacionando lo descriptivo y lo analítico de forma correcta. Esto sigue la lógica propia de la geometría con el propósito de formar en los estudiantes aquellos conceptos y relaciones esenciales que resultan de la abstracción inmediata de la imagen sensoperceptual del espacio real en que viven, y los apliquen de manera pertinente en las intersecciones que realizan en la asignatura de Comunicación.

Tema 5. Expone el concepto de poliedro, a partir de los elementos definidos en los temas anteriores. Se interpreta y representa un poliedro a través de lo descriptivo y de lo analítico, simultáneamente, explicándole a los alumnos los nexos entre las dos formas y las ventajas que ofrece tal situación. Por ejemplo, si tienen en la asignatura de Comunicación las proyecciones ortogonales o la vista de un poliedro y su presentación les resulta difícil, pueden buscar las ecuaciones de los planos que los limitan; dicho proceso lo aprendieron en el Tema 3.

Tema 6. Refiere los conceptos preliminares necesarios para comprender y entender los contenidos que atañen a los Temas 7, 8 y 9, los cuales se introducen a partir de una extensión de las nociones vistas en los Temas 1, 2, 3, 4 y 5, donde la generatriz y a la directriz son vistas como las invariantes del conocimiento. Esta nueva forma de ejecutar el proceso de enseñanza-aprendizaje le ofrece al estudiante más participación y creatividad en el desarrollo del mismo, ya que, con la guía del profesor, generaliza y amplía los conceptos ya elaborados y definidos con anterioridad.

Después de establecer y explicar la nueva forma de organizar el contenido de la geometría para los estudiantes de Arquitectura, en el Anexo IV se muestra una propuesta para estructurar las conferencias y clases prácticas, siguiendo el criterio holístico.

Con la propuesta de organización del contenido bajo el criterio holístico, se logró:

- Unir de forma armónica los contenidos de las dos ramas de la geometría (la descriptiva y la analítica).
- Desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría a partir de un modelo establecido (Van Hiele), al cual se incorpora el elemento de integración de los contenidos que, a su vez, enriquece a los demás elementos. Esto permite atender las diferencias individuales de los estudiantes y pone en equilibrio el fundamento que brindan las ciencias básicas y la profesionalización que brindan las que conciernen al uso de la carrera de Arquitectura.
- Permitir que, en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje, haya más actividades docentes encaminadas a la aplicación de los contenidos geométricos integrados en el quehacer normal de la arquitectura.
- Poner de manifiesto el axioma: lo que ocurre en el todo lo determinan las leyes internas de estructuración de ese mismo todo. Esto muestra al estudiante que la geometría le proporciona las técnicas y herramientas necesarias para sus representaciones arquitectónicas.

7. Los niveles de razonamiento

Bajo la perspectiva del modelo holístico, los indicadores para medir los niveles de razonamiento en los estudiantes de Arquitectura se establecieron a partir del sistema de habilidades a lograr en los alumnos que definía el plan de estudios, con el propósito de enriquecer los niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele y adaptarlos a la educación superior, mediante los siguientes criterios teóricos:

En primer lugar, se hicieron observaciones al proceso formativo del estudiante de Arquitectura, las cuales permitieron concluir que su modo de desarrollo no permitía que, en un corto plazo, el alumno aplicara lo aprendido en las asignaturas técnicas o relacionadas con su profesión. Además, el uso del modelo de Van Hiele en la educación superior, como está concebido, no propicia que se adquiera la habilidad de generalizar, ya que posee insuficiencias para este nivel de enseñanza. Otra de las debilidades de dicho modelo es que sólo mide los niveles de razonamiento de los estudiantes en función del sistema de conocimientos geométricos; no atiende a su desarrollo cognitivo, es decir, su dominio del sistema de habilidades y valores que deben lograr en su nivel educacional.

Fuentes (2000) define la habilidad como sigue:

> El modo de interacción del sujeto con los objetos o sujetos en la actividad y la comunicación; es el contenido de las acciones que el sujeto realiza, integrada por un conjunto de operaciones, que tienen un objetivo y que se asimilan en el propio proceso. (p. 20)

Dicho concepto incluye aspectos importantes que se tienen que atender en el proceso de enseñanza-aprendizaje, como: modo, acciones e integrar. Esto con vista a lograr el objetivo de que los estudiantes asimilen el contenido en el propio proceso.

Ahora bien, para que los estudiantes adquieran las habilidades que se pretenden con el contenido que se desarrolla en la asignatura, el maestro debe, en primer lugar, orientar a los alumnos en el modo que van a interactuar con los objetos o sujetos en la actividad que realizan; en segundo, que los educandos, a través de la asignatura, dominen un sistema de operaciones para elaborar la información de los contenidos y revelarla, confrontarla y relacionarla con las acciones que deben llevar a cabo. El profesor, a través del plan de estudios, conoce las habilidades a lograr en sus estudiantes, pues forman parte del contenido de su disciplina y caracterizan, en el plano didáctico, a las acciones que ellos realizan al interactuar con su objeto de estudio, a fin de transformarlo y humanizarlo.

Además, el proceso de resolución de problemas en geometría lleva implícito varias etapas o niveles por los que el estudiante debe transitar. Dentro de ellos, es pertinente adoptar la posición Álvarez (2001) que considera que para los efectos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, la habilidad de representación gráfica arquitectónica es como una macrohabilidad, compuesta por diferentes procesos mentales, tales como la representación interna y externa, que tradicionalmente se consideran como interpretar y representar.

Desde este punto de vista, la resolución de problemas geométricos incluye ambas habilidades, los procesos de representación interna y externa se hacen más complejos al partir de un objeto, ya que en el caso de la geometría analítica la representación externa se consigue a través de las ecuaciones que simbolizan los elementos esenciales del objeto, mientras que en la geometría descriptiva se realiza a través de las proyecciones en el plano. En este último caso, los estudios de Quintero (2002) demuestran que al existir transformaciones de planos de tercera a segunda dimensión, se vuelve más compleja la habilidad de representación.

En consecuencia, puede afirmarse que hay diferentes grados de abstracción en cuanto a la representación del objeto real. Por ello, se induce que, cuando el estudiante queda sometido a un proceso que integra el contenido de estas ramas de la geometría con la realidad de actuación del profesional, el aprendizaje se produce mediante un tránsito de lo concreto a diferentes niveles de abstracción, tomando a lo concreto como punto de referencia para rectificar las representaciones internas.

Asumir un enfoque holístico en la comprensión de la formación de habilidades relacionadas en el proceso de enseñanza-aprendizaje significa, aparte de lo antes expresado, considerar que las partes –habilidades– del sistema, entendido como un todo, son más que simples componentes del mismo, pues manifiestan elementos esenciales de la comunicación que constituyen determinaciones o características de ella para distinguirla de otras. Por otra parte, la precisión de dichas habilidades adquiere especial significado sólo en su relación entre y con ellas, al igual que con la comunicación como un todo; así, desde el punto de vista del análisis lógico-dialéctico, las partes (habilidades) son comprendidas e interpretadas a través de la comunicación como el todo, pues el todo adquiere significado mediante las partes. Esto hace que para su comprensión e interpretación se recorra de manera ascendente el camino dialéctico, del todo a las relaciones de las partes y de las relaciones de las partes al todo, como en el ciclo dialéctico del conocimiento.

En esta investigación se asume lo siguiente:

> La representación geométrica espacial se puede clasificar en mental, que le permite al estudiante prever situaciones, estimar distancias y tamaño, así como orientarse en el espacio físico, y manual, donde los objetos concretos son una guía para comprender las propiedades de las figuras geométricas (Rodríguez, 2003, p. 26).

Por su parte, Quintero (2002) distingue que el dibujo no es más que un lenguaje gráfico que surge a partir del lenguaje verbal; el dibujo, en tanto es un proceso de comunicación, se basa en un código o lenguaje que debe ser conocido por el emisor y el receptor del mensaje. Si se desconoce o no se sabe interpretar ese código, el proceso de comunicación no se concreta. Y la figura es un objeto ideal que se puede representar por medio de un dibujo.

La representación deviene en realidad mediante la práctica multilateral del hombre. Es decir, adquiere diversas formas en su plasmación real; una de ellas es el modelo, que ya sea en su aspecto teórico o empírico concreto –maquetas, dibujos, gráficas, pinturas, esculturas– es resultado de la objetivación de las imágenes en su forma sensible. Lo anterior fundamenta que la integración de los contenidos geométricos enriquece, en la formación del estudiante de Arquitectura, las distintas posibilidades de sus propios criterios de representación gráfica, le facilita pensar en tres dimensiones, percibir con mayor facilidad imágenes externas e internas, recrearlas, transformarlas o modificarlas, recorrer el espacio o hacer que los objetos lo recorran y producir o decodificar información gráfica.

8. INDICADORES PARA MEDIR LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Los niveles de razonamiento de Van Hiele no establecen con claridad los indicadores, acciones y operaciones que permitan medir y evaluar el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje por parte del profesor y del propio alumno. Ante tal situación, para establecer los criterios en este proceso investigativo se hizo una consulta con especialistas que permitió delimitar las habilidades fundamentales, de la siguiente manera:

Para lograr la habilidad de generalizar, el profesor debe encaminar su trabajo inicial al desarrollo de las habilidades elementales, que conllevan a la adquisición de conocimientos primarios, bajo el criterio de que toda habilidad intelectual depende de algún conocimiento a adquirir (pueden existir varias habilidades con estas características). Las habilidades elementales se van perfeccionando e enriqueciendo en un proceso dinámico y sistemático hasta que se perfeccionan, de ahí que su desarrollo en los estudiantes propicie que adquieran nuevos conocimientos, enriquezcan su caudal de conocimiento y sistematicen sus acciones, llegando a formarse en ellos las habilidades generalizadas.

Tras este estudio, y como resultado de la consulta a los especialistas, se llegó a que el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, en las habilidades elementales para un estudiante de Arquitectura, trata el análisis de la realidad visible, cuya acción fundamental es observar; en las habilidades perfeccionadas están identificar, interpretar y representar, mientras que en las habilidades generalizadas se encuentran integrar y generalizar. Ahora bien, determinar con certeza y precisión las habilidades que se deben lograr en los estudiantes es lo que los conduce a la adquisición de nuevos conocimientos.

Además, de la consulta a los especialistas, realizamos un análisis sobre los objetivos del plan de estudios de la carrera de Arquitectura, donde se destaca el papel que desempeñan las matemáticas:

> Las matemáticas en la carrera de Arquitectura contribuyen al desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes, ayudándoles a organizar las ideas a través de los gráficos donde se relacionan las partes de un todo, teniendo en cuenta que la variación de una de ellas afecta a las demás. Les permite tener criterios sobre la forma de organizar el espacio a través de la geometría y que el diseño de un proyecto se sigan etapas a lo largo del proceso del mismo de una forma racional (…) El estudiante debe conocer los conceptos, procedimientos y métodos de trabajo que le aportan las matemáticas para aplicarlos y vincularlos directamente a los problemas de la profesión (1998, p. 84).

La rama de las matemáticas que brinda la posibilidad de organizar las ideas a través de gráficos es la geometría, que se desarrolla simultáneamente en las asignaturas de Matemáticas y Comunicación. Por tal razón, se hizo un estudio de los nexos entre sus ramas con vistas a ofrecer la ciencia geométrica desde otra óptica que no fuera la tradicional.

Para enriquecer la didáctica de la geometría y favorecer el proceso docente, sin dejar de reconocer que el modelo de Van Hiele constituía el punto de partida para las ideas desarrolladas en esta investigación, se requería de un modelo de enseñanza que respondiera a las exigencias tanto del punto de vista psicopedagógico como de la realidad del estudiante universitario cubano, en particular el camagüeyano.

Los indicadores que propusimos para medir y enriquecer los niveles de razonamiento de Van Hiele se muestran en la Tabla I.

Dichos indicadores se presentan de forma helicoidal, ya que al retomar en varias ocasiones los contenidos geométricos en el proceso de enseñanza-aprendizaje permite lograr su correcta asimilación en los estudiantes. Por otro lado, cada vez que se desarrolle en el proceso docente un tema de la asignatura necesariamente el alumno va a transitar por todos los niveles, pues las exigencias del tipo de enseñanza así lo precisan. Al lograr que se produzca con plena efectividad el proceso de formación de las habilidades, esta sistematización lleva implícita no sólo una repetición de las acciones y su reforzamiento, sino también su perfeccionamiento y enriquecimiento, con el fin de formar la generalización en los alumnos.

TABLA I
Indicadores para medir y enriquecer
los niveles de razonamiento de Van Hiele

Niveles de razonamiento	Indicadores
Nivel 1: De reconocimiento	Análisis de la realidad visible.
Nivel 2: De análisis	Identificación y representación de los entes geométricos.
Nivel 3: De clasificación	Interpretación y representación de una de las ramas de la geometría.
Nivel 4: De deducción formal	Interpretación y representación de los entes geométricos de forma integrada y generalización de los entes geométricos.

8.1. *Aspectos que caracterizan a los indicadores*

Indicador 1. Análisis de la realidad visible: Analiza al objeto y sus representaciones.

Para lograr esta habilidad en los estudiantes, el profesor ofrece el camino a través de los elementos esenciales: acciones y operaciones, como se sintetiza en la Tabla II.

TABLA II
Indicador 1

Habilidad	Acciones	Operaciones
Análisis de la realidad visible	Observar	- Ver con atención los objetos del espacio real visible. - Esbozar los objetos que lo rodean como un todo. Por ejemplo: sillas, mesas, edificaciones, etc. - Esbozar partes de los objetos que lo rodean. Por ejemplo, representar una de las habitaciones de una vivienda.

Indicador 2. Identificación y representación de los entes geométricos: Identifica las relaciones geométricas entre el objeto y sus representaciones.

Para lograr que los alumnos adquieran dichas habilidades, el profesor ofrece el camino a través de los elementos esenciales: las acciones y las operaciones, como se ilustra en la Tabla III.

TABLA III
Indicador 2

Habilidad	Acciones	Operaciones
Identificar	Observar	- Mirar detenidamente en la realidad visible los cuerpos del mundo real donde están presentes elementos que distinguen a los entes geométricos.
	Seleccionar	- Analizar, en los objetos visibles, los elementos geométricos que los componen.
	Reconocer	- Distinguir en los objetos visibles los entes geométricos, como el punto, la recta, el plano, etc.
Representar	Seleccionar	- Analizar diferentes variantes en las que se identifica un ente geométrico. Por ejemplo, se precisa que la representación de un plano se identifica por: tres puntos no alineados; dos rectas paralelas; dos rectas que se cortan, y; una recta y un punto fuera de ella.
	Dibujar	- Tener una representación mental del ente geométrico a partir de los elementos que lo identifican. - Trasladar las imágenes al sistema gráfico de representación seleccionado en 2D ó 3D.

Indicador 3. Interpretación y representación de los entes geométricos de una de las ramas de la geometría objeto de estudio: Llega a la esencia de las relaciones analíticas o descriptivas entre el objeto y su representación geométrica, a través de una de las ramas de la geometría objeto de estudio.

Para el logro de estas habilidades en los estudiantes, el profesor da el camino a través de los elementos esenciales: las acciones y las operaciones, sintetizados en la tabla IV.

TABLA IV
Indicador 3

Habilidad	Acciones	Operaciones
Interpretar	Atribuir	- Establecer propiedades o características de los entes geométricos en cada rama de la geometría objeto de estudio.
	Comprender	- Establecer la esencia de las relaciones analíticas o descriptivas en el objeto o entre los objetos geométricos.
	Explicar	- Exponer en forma oral y escrita los atributos esenciales que distinguen a los entes geométricos en una de las ramas de la geometría objeto de estudio.
Representar	Seleccionar objeto	- Determinar las características que los identifican. - Analizar si el estudio del objeto geométrico se da mediante ecuaciones o proyecciones ortogonales.
	Determinar los elementos esenciales	- Seleccionar las propiedades y elementos necesarios para su representación.
	Dibujar	- Trasladar las imágenes al sistema gráfico de representación adecuado a través del estudio de las ecuaciones o proyecciones ortogonales.

Indicador 4. Interpretación y representación de los entes geométricos de forma integrada: Permite que los alumnos lleguen a la esencia entre los objetos y sus representaciones geométricas, siguiendo las explicaciones del maestro en los dos elementos esenciales: acciones y operaciones, como se muestra en la tabla V.

TABLA V
Indicador 4 (parte 1)

Habilidad	Acciones	Operaciones
Interpretar	Atribuir	- Establecer los nexos y relaciones de los entes geométricos entre las ramas de la geometría objeto de estudio.
	Comprender	- Determinar la esencia entre los objetos geométricos destacando que un mismo ente geométrico puede ser representado de diferentes formas y conserva sus propiedades.

TABLA V
Indicador 4 (parte 2)

Habilidad	Acciones	Operaciones
	Explicar	- Exponer en forma oral o escrita la esencia entre los objetos y sus representaciones, en los cuales se distingue: a) La relación correcta de los nexos entre las ramas de la geometría objeto de estudio. b) La argumentación mediante una secuencia lógica de las diferentes interpretaciones que se pueden realizar entre los entes geométricos. c) Interrelacionar lo descriptivo con lo analítico en la argumentación de las interpretaciones hechas sobre los entes geométricos.
Representar	Observar	- Examinar con atención los elementos invariantes de los entes geométricos en las ramas de la geometría objeto de estudio.
	Caracterizar	- Determinar los atributos esenciales que permiten comprender que los entes geométricos tienen el mismo significado en todas las ramas de la geometría objeto de estudio.
	Definir	- Fijar con claridad y exactitud la esencia entre los objetos y sus representaciones geométricas.
	Dibujar	- Trasladar las imágenes a los sistemas gráficos de representación a través de un estudio de los entes geométricos.

Indicador 5. Generalización: Consiste en la representación geométrica de objetos arquitectónicos.

Para el logro de esta habilidad en los estudiantes, el profesor brinda el camino a través de los elementos esenciales: acciones y operaciones, sintetizados en la tabla VI.

TABLA VI
Indicador 5

Habilidad	Acciones	Operaciones
Generalizar	Interrelacionar	- Determinar los nexos y relaciones de los entes geométricos, a través de un estudio sobre su propuesta de obra arquitectónica. - Analizar los diferentes elementos que intervienen en la propuesta de su proyecto de obra arquitectónica. Por ejemplo, las elevaciones no son más que las proyecciones ortogonales en la vista de frente y la lateral de los sólidos estudiados, obviando las ventanas, puertas, figuras humanas, etc., mientras que la planta arquitectónica es la proyección ortogonal de un sólido o poliedro, obviando la forma en que denota los muros, sillas mesas, etc.
	Hacer general un sólido	- Representar geométricamente un sólido; en él se abstraen los elementos interiores de una obra arquitectónica y puede interpretarse como la tipología estructural de armazón (esqueleto) o mixta de una obra arquitectónica. - En los ejercicios que aparecen en los anexos se aprecian otras operaciones que permiten generalizar los entes geométricos.

9. LAS FASES

Las fases de enseñanza-aprendizaje son momentos que permiten graduar y organizar las actividades que deben realizar el profesor y el alumno, a fin de que éste adquiera las experiencias que le garanticen el logro del nivel superior de razonamiento.

Primera fase: información

El objetivo de esta fase es preparar las condiciones para proceso de enseñanza-aprendizaje. Por tal motivo, se informa acerca de las actividades a realizar en la asignatura y su papel en la carrera de Arquitectura. De igual manera, el profesor investiga en qué nivel de razonamiento están sus estudiantes sobre los conocimientos necesarios para enfrentar el nuevo contenido y qué saben del mismo.

Segunda fase: orientación dirigida

El propósito de esta fase radica en conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos, propiedades o figuras principales en el área de la geometría.

Tercera fase: reafirmación

La intención de esta fase es que los estudiantes aprendan nuevos contenidos, pero utilizando los viejos conocimientos, al hacer una revisión del trabajo hecho anteriormente para poner a punto las conclusiones a que los alumnos han arribado, así como que practiquen y perfeccionen su forma de expresarse. Además, se busca que empiecen a hacer suyo el lenguaje de la geometría con el establecimiento de nexos y relaciones entre las diferentes ramas.

Cuarta fase: aplicación

Aquí se pretende que los estudiantes, al poseer la esencia de ambas ramas de la geometría y su relación con la geometría –tema que abordan en la asignatura de Comunicación–, interrelacionen entre sí los conocimientos y el lenguaje que acaban de adquirir. Si bien reconocen esos puntos de contacto, les falta perfeccionar su conocimiento para ver como un todo a la geometría que abordan tanto en matemáticas como en Comunicación.

Quinta fase: integración

El objetivo de esta fase es que, en general, los alumnos consigan aprehender la esencia de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, al igual que relacionen los nuevos conocimientos con otras ciencias que estén estudiando o hayan visto. Se trata de que los estudiantes condensen en un todo el dominio que ha explorado su pensamiento, de ahí que la función del profesor sea de guía, pues la mayor actividad recae en los estudiantes, al realizar sus tareas de forma creativa e independiente y aplicar los conocimientos adquiridos en la geometría a otras asignaturas vinculadas con su profesión. Las actividades que el maestro propone serán individuales y de aplicación a la futura profesión.

En la caracterización cualitativa de estas fases de enseñanza-aprendizaje, el docente necesita procurar que sus alumnos construyan la red mental de relaciones que atañen al nivel de razonamiento al cual deben acceder, creando primero los vértices de la red y después las conexiones entre ellos. Por ello, es necesario que, en primer lugar, los estudiantes adquieran de manera comprensiva los conocimientos básicos necesarios –nuevos conceptos, propiedades, vocabulario– con los que tendrán que trabajar, y después centren su actividad en aprender a utilizarlos y combinarlos para asimilarlos.

Desde nuestro punto de vista, en la educación matemática donde el elemento primordial es el estudiante, resulta pertinente que los profesores tengan libertad para hacer modificaciones, de acuerdo con la situación concreta. Las fases 2, 3 y 4 son fundamentales para lograr un buen aprendizaje de los contenidos y desarrollo en la capacidad de razonamiento, de ahí que no puede ser obviada ninguna de ellas ni desordenarse. La fase 3 no debe entenderse como un período concreto de tiempo entre las fases 2 y 4, dedicado exclusivamente al diálogo, sino como una actitud continua del profesor que consiste en incitar a sus alumnos a que dialoguen y expliquen sus descubrimientos, formas de trabajo, dudas, fallos u opiniones. Por ello, dicha fase se extenderá a los resultados de las actividades que se lleven a cabo durante las fases 1, 2, 4 y 5.

En cuanto a la fase 1, su objetivo es permitir que el profesor informe a los estudiantes del nuevo tema de trabajo y averigüe qué conocimientos y nivel de razonamiento tienen. Por tanto, en determinadas ocasiones, cuando tanto el profesor como el alumno tengan ya la información adecuada, esta fase no será necesaria.

Además, las fases ponen de manifiesto el carácter helicoidal de este modelo, ya que se repite el paso de los estudiantes por los respectivos niveles, al retomar los contenidos adquiridos como base para comprender los nuevos, si bien esto sucede más rápido que en los primeros temas porque los ven como extensiones de nociones ya aprendidas. El profesor reparará en que sus orientaciones vayan encaminadas a lograr que los estudiantes vean a la geometría objeto de estudio, tanto en las matemáticas como en la asignatura de Comunicación, como un todo, pues es la realidad donde van a actuar después de graduados, la cual no se deduce de los elementos individuales –las disciplinas que conforman el plan de estudios de la carrera– ni de su composición, sino al revés: lo que ocurre en el todo (la arquitectura) lo determinan sus leyes internas de estructuración, de ahí que defina las ramas del saber necesarias.

El modelo holístico propuesto considera, como primer elemento, la integración del contenido de la geometría para arquitectos en estrecha relación con los niveles de razonamiento y las fases de enseñanza-aprendizaje.

10. CONCLUSIÓN

La adquisición de los contenidos geométricos ha sido una preocupación por parte del claustro de profesores de la carrera de Arquitectura. Por tal motivo, este trabajo abordó la problemática de las dificultades que presentan los estudiantes de Arquitectura para integrar los contenidos geométricos y su relación con la asignatura de Comunicación, y se mostró una alternativa para mejorar tal situación basada en un modelo holístico que integra los contenidos.

Se conformó y aplicó el modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría para arquitectos, generando los siguientes resultados:

- Integrar los contenidos geométricos enriquece la formación del estudiante de Arquitectura, ya que le ofrecen distintas posibilidades para que construya sus propios criterios de representación gráfica, le facilita pensar en tres dimensiones, le permite percibir con mayor facilidad imágenes externas e internas, recrearlas, transformarlas o modificarlas, recorrer el espacio o hacer que los objetos lo recorran, así como producir o decodificar información gráfica. También le proporciona distintas posibilidades para resolver un mismo problema geométrico, aportándole nuevas cualidades a la geometría que necesita en su formación, debido al papel que desempeña el tratamiento de los espacios en la capacidad del arquitecto.

- El enriquecimiento del modelo de Van Hiele con la incorporación del elemento integración de los contenidos geométricos, e instaurar en los niveles de razonamiento los indicadores, acciones y operaciones para facilitar su medición, hicieron que se perfeccionara de forma novedosa y actual dicho modelo.

- La caracterización cualitativa de las fases de enseñanza-aprendizaje permitió medir los niveles por los que pasa el razonamiento de los estudiantes que reciben geometría, y cómo actúan cuando se encuentran en cada una de ellas, lográndose una atención diferenciada a cada estudiante sobre bases científicas.

- La aplicación del modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría para arquitectos propició una mejor adquisición de los conocimientos geométricos en los estudiantes. Esto se hizo notorio en la aplicación exitosa de los contenidos geométricos en las asignaturas de ejercicios de la profesión que comprende la carrera, en las encuestas que se anexan y en el porcentaje de promoción (ver Anexos II y VI).

- Como resultado práctico de esta investigación, se elaboró un libro de texto con el enfoque integrador que contribuyó a mejorar el aprendizaje de los estudiantes de la carrera de Arquitectura, a fin de que sea un medio de organización y guía para su trabajo independiente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Articles about didactics (s/f). *Nexus Network Journal*. Obtenido en mayo 14, 2007, de http://www.nexusjournal.com/Didactics-intro.html.

Álvarez, C. (1999). *La escuela en la vida*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Álvarez, G. (2001). *El desarrollo de la representación gráfica en el estudiante de Arquitectura*. Disertación doctoral no publicada, Universidad de Camagüey, Cuba.

Arquitectura para las ciudades digitales (s.f.). Obtenido en mayo 8, 2007, de http://www.monografias.com/trabajos901/ciudades-digitales-entornos-virtuales venezuela/ciudades-digitales-entornos-virtuales-venezuela.shtml.

Carnicero, A., Enrich, R., Fornari, G. y Mahiques, M. (2006, septiembre). *Acerca de la enseñanza de la Geometría Fractal en Arquitectura.* Ponencia presentada en la Sexta Conferencia Argentina de Educación Matemática, La Plata, Argentina.

Consiglieri, L. & Consiglieri. V. (2003). A Proposed two-semester programme for mathematics in the architecture curriculum. *Nexus Network Journal 5*(1), 127-134.

Fuentes, H. (1997). *Modelo holístico configuracional de los procesos universitarios*. Santiago de Cuba, Cuba: documentos electrónicos del Centro de Estudios de la Educación Superior Manuel F. Gran-Universidad de Oriente.

Fuentes, H. C. (2000). *Didáctica de la educación superior*. Santiago de Cuba, Cuba: Centro de Estudios de la Educación Superior Manuel F. Gran-Universidad de Oriente.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1991). El método de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. *Revista Educación Matemática 3*(2), 49-65.

Guzmán, M. R. (2002). *Desarrollo de habilidades de comunicación a través de la interrelación entre la representación y la explicación en estudiantes de la Lic. en Educación, especialidad Construcciones, en la asignatura Dibujo Arquitectónico.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Estudios de Ciencias de la Educación "Enrique José Varona", Camagüey, Cuba.

Jaime, P. (1996). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele.* Barcelona, España: Editora Ciencias de la Educación.

Palacio, P. (2003). *Colección de problemas matemáticos para la vida*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Portuondo, R. (1983). *Teoría de las minimónicas*. Disertación doctoral no publicada, Instituto Politécnico de Bielorrusia.

Portuondo, R. (2001). *Resolución de problemas profesionales*. Conferencia magistral, México: Universidad de Colima. [s.p.], noviembre.

Quintero, R. (2002). *Metodología para perfeccionar el desarrollo de las habilidades de interpretar y representar de los estudiantes en los centros politécnicos industriales de la provincia de Camagüey durante el aprendizaje del dibujo*. Disertación doctoral no publicada, Universidad de Camagüey, Cuba.

Ríbnikov, K (1991). *Historia de las Matemáticas.* Moscú: MIR.

Rodríguez, M. (2003). *Modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría para arquitectos*. Disertación doctoral no publicda, Universidad de Camagüey, Cuba.

Rossi, M. (2006). Natural Architecture and constructed forms: structure and surfaces from idea to drawing. *Nexus Network Journal 8*(1), 112-122.

Ruiz, S. (2000). *Dirección del proceso docente mediante el enfoque matemático en la teoría general de sistemas.* Tesis de maestría no publicada, Universidad de Camagüey, Cuba.

UNILATINA (2001). *Modelo holístico para la Educación Superior*. Obtenido en mayo 3, 2001, de http://www.unilatina.edu.co/filosofía.mth.

Verner, I. M. & Maor, S. (2006). Mathematical mode of thought in architectural design education: a case study. *Nexus Network Journal 8*(1), 93-106.

Autores

María Lourdes Rodríguez. Universidad de Camagüey, Cuba; maria.rodriguez@reduc.edu.cu

Louremy Ricardo Rodríguez. Universidad de Camagüey, Cuba.

ANEXO I
Encuesta a profesores

En estos momentos se realiza una investigación sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría descriptiva y analítica con el fin de establecer un modelo holístico. Este cuestionario no ofrece dificultad para ser llenado, y su información es confidencial y de muy valiosa ayuda para nuestro trabajo. Agradecemos toda la información que usted nos pueda brindar.

1) La organización de los temas de geometría descriptiva y analítica en asignaturas diferentes la considera:

BUENA _____ REGULAR _____ MALA _____

2) Organizar dentro de la propia matemática los temas de geometría descriptiva y analítica por separado lo considera:

BUENO _____ REGULAR ______ MALO _____

3) La información que usted tiene para diseñar una clase de geometría es:

EXCESIVA _____ SUFICIENTE _____ INSUFICIENTE ______

4) Tiene información acerca de los aspectos psicológico-didácticos que deben tenerse en cuenta en el desarrollo de una clase de geometría:

MUY POCA ___ POCA ___ ALGUNA ____ BASTANTE ____ MUCHA ____

5) Tiene información acerca de trabajos científicos metodológicos sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría descriptiva y analítica que se hayan realizado de forma unificada:

SÍ _____ NO_____ NO ME HA INTERESADO _____

6) Dirige el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría descriptiva y analítica hacia las acciones esenciales y habilidades generalizadoras:

SIEMPRE ____ GENERALMENTE _____ ALGUNAS VECES ____
POCAS VECES _____ NUNCA _____

7) La literatura que orienta a sus estudiantes para el aprendizaje en la geometría la considera:

BUENA ____ REGULAR _____ MALA _____

8) En la literatura que usted ha consultado, se ha encontrado con libros que hagan un tratamiento de la geometría descriptiva y analítica de forma integrada:

SÍ _____ NO ______ UN POCO ______

9) En el proceso de enseñanza-aprendizaje sobre los temas de geometría tiene en cuenta los niveles de razonamiento de sus estudiantes:

SIEMPRE ____ GENERALMENTE _____ ALGUNAS VECES ____
POCAS VECES _____ NUNCA _____

10) Le interesa conocer un modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría para arquitectos:

SÍ _____ NO ______ ME ES INDIFERENTE ______

Resultados del cuestionario aplicado a profesores

(total de profesores encuestados de diferentes universidades del país: 20)

1) La organización de los temas de geometría descriptiva y analítica en asignaturas diferentes la considera:

BUENA 0% REGULAR 30% MALA 70%

2) Organizar dentro de la propia matemática los temas de geometría descriptiva y analítica por separado lo considera:

BUENO 0% REGULAR 25% MALO 75%

3) La información que usted tiene para diseñar una clase de geometría es:

EXCESIVA 0% SUFICIENTE 30% INSUFICIENTE 70%

4) Tiene información acerca de los aspectos psicológico-didácticos que deben tenerse en cuenta en el desarrollo de una clase de geometría:

MUY POCA 35% POCA 40% ALGUNA 25% BASTANTE 0% MUCHA 0%

5) Tiene información acerca de trabajos científicos metodológicos sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría descriptiva y analítica que se hayan realizado de forma unificada:

SÍ 0% NO 100% NO ME HA INTERESADO 0%

6) Dirige el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría descriptiva y analítica hacia las acciones esenciales y habilidades generalizadoras:

SIEMPRE 10% GENERALMENTE 5% ALGUNAS VECES 40%
POCAS VECES 45% NUNCA 0%

7) La literatura que orienta a sus estudiantes para el aprendizaje en la geometría la considera:

BUENA 40% REGULAR 60% MALA 0%

8) En la literatura que usted ha consultado, se ha encontrado con libros que hagan un tratamiento de la geometría descriptiva y analítica de forma integrada:

SÍ 0% NO 100% UN POCO 0%

9) En el proceso de enseñanza-aprendizaje sobre los temas de geometría tiene en cuenta los niveles de razonamiento de sus estudiantes:

SIEMPRE 5% GENERALMENTE 10% ALGUNAS VECES 50%
POCAS VECES 35% NUNCA 0%

10) Le interesa conocer un modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría para arquitectos:

SÍ 100% NO 0% ME ES INDIFERENTE 0%

ANEXO II

Encuesta aplicada a los estudiantes de la carrera de Arquitectura en la Universidad de Camagüey

Resultados de las encuestas aplicadas a 70 estudiantes del primero al quinto año de la carrera de Arquitectura en la Universidad de Camagüey

Preguntas	Sí	No	Algunas veces	No sé
1. b)	70			
c)	66	4	-	-
2. a)	59	-	11	-
b)	69	1	-	-
c)	68		2	
d)	70	-	-	-
3. a)	61	-	9	-
b)	66	-	4	-
c)	28	39	-	3
d)	70	-	-	-
Total	627	44	26	3

Respuestas a la pregunta 4 por grupos de estudiantes.

De los 20 estudiantes de primer año:

- En general, los estudiantes plantearon la necesidad de que se le entregara un libro a cada alumno para su estudio individual.
- Otra de sus opiniones fue que todo el tema de geometría podía estar en la disciplina de Comunicación, ya que la manera como se les impartía en matemáticas les generaba la idea de que estaban en una clase de Comunicación.
- Les gusta la forma en que su profesora desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje a través de sus clases, pues comprenden mejor el papel que desempeña la geometría en su carrera.

De los 10 estudiantes de segundo año:

- Plantean la necesidad de que los alumnos posean el libro elaborado por la profesora, debido a lo práctico y útil para un estudiante de Arquitectura.
- Les gusta la forma en que su profesora desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje a través de sus clases, ya que entienden mejor el papel que desempeña la geometría en su carrera.

De los 10 estudiantes de tercer año:

- Les gusta la forma en que su profesora desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje a través de sus clases, ya que asimilan mejor el papel que juega la geometría en su carrera; asimismo, señalan que ella demuestra dominio del contenido y su relación con la carrera.
- Plantearon además la necesidad de la impresión del libro elaborado por la profesora.

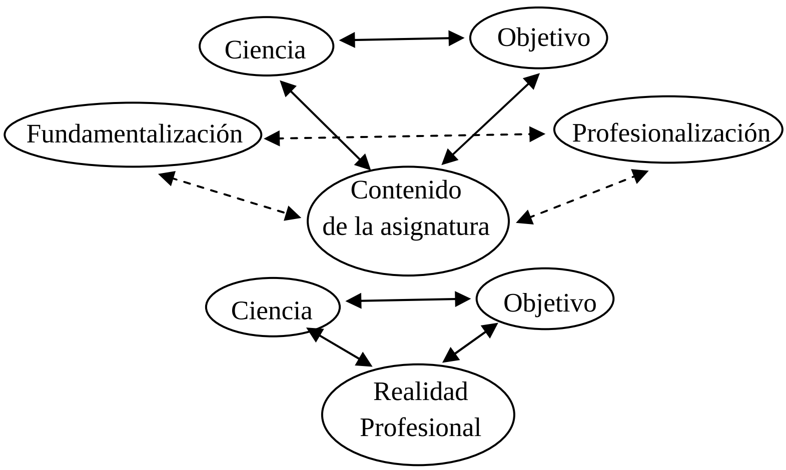
De los 15 estudiantes de cuarto año:

- Que se imprimiera el libro para que los estudiantes puedan estudiar.
- Les gusta cómo la profesora da las clases, domina el contenido y lo relaciona muy bien con la carrera; incluso pensaban que era arquitecta.
- De esta forma ven la relación de las matemáticas con la carrera de Arquitectura.
- Se deben implementar laboratorios de geometría con la ayuda del AutoCAD.
- Hacer más tareas extraclase vinculadas con las materias Proyecto y Comunicación.

De los 15 estudiantes de quinto año:

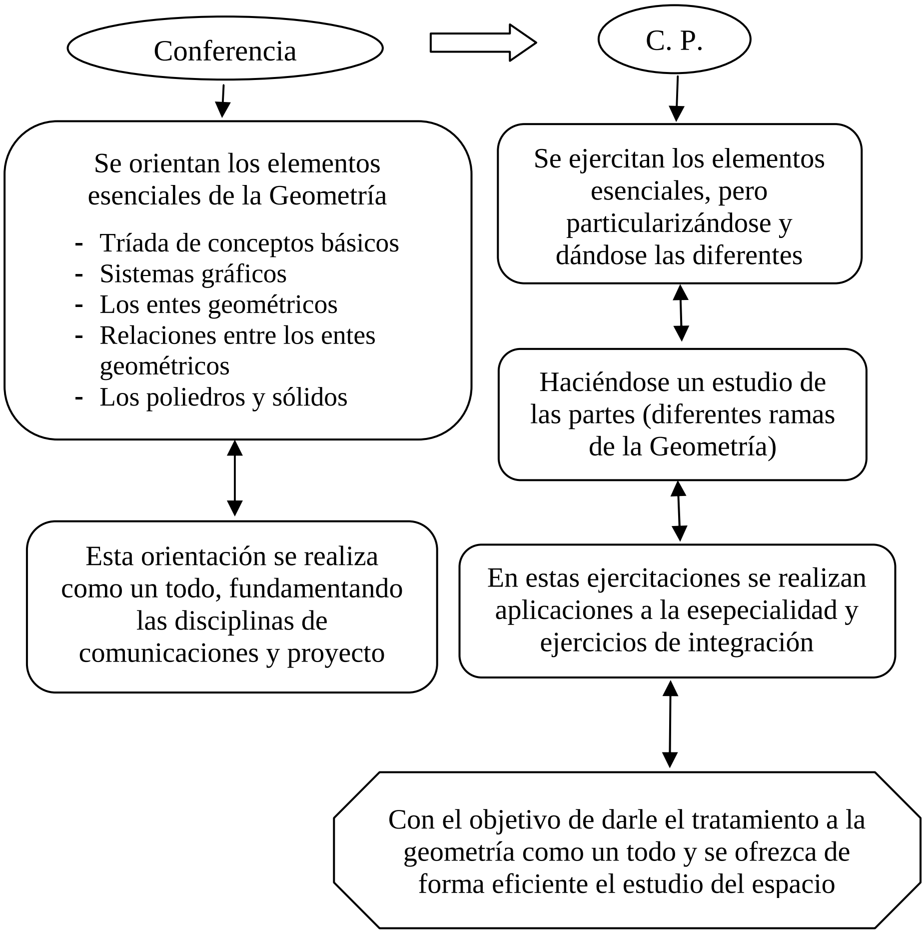
- Los estudiantes plantean que la profesora domina el contenido y que, a lo largo del desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura, buscó los puntos de contacto de la geometría con la carrera. También les dijo que cada elemento que ella les daba en algún momento lo utilizarían, lo cual pudieron verificar.
- Imprimir todos los materiales de la profesora para que los estudiantes los utilicen en la asignatura y en la carrera, pues son aplicables en muchas asignaturas.

ANEXO III



Esquema 1

ANEXO IV


Conferencia
C. P.
Se orientan los elementos esenciales de la Geometría
- Tríada de conceptos básicos
- Sistemas gráficos
- Los entes geométricos
- Relaciones entre los entes geométricos
- Los poliedros y sólidos
Se ejercitan los elementos esenciales, pero particularizándose y dándose las diferentes
Haciéndose un estudio de las partes (diferentes ramas de la Geometría)
Esta orientación se realiza como un todo, fundamentando las disciplinas de comunicaciones y proyecto
En estas ejercitaciones se realizan aplicaciones a la esepecialidad y ejercicios de integración
Con el objetivo de darle el tratamiento a la geometría como un todo y se ofrezca de forma eficiente el estudio del espacio

ANEXO V

Resultados de promoción de la asignaturas de la disciplina Matemática para arquitectos y Comunicación I del uso de la profesión, antes de aplicar el modelo holístico propuesto.

Asignatura: Matemática I

Cursos	M. I.	Aprob.	Con 3	Con 4	Con 5	% de calidad	% de promedio	Convalidados
90-91	104	84	57	20	12	30	85	-
91-92	64	53	30	10	10	31	82	3
92-93	54	49	30	14	5	35	90	-
93-94	46	43	24	8	11	41	93	-

Asignatura: Comunicación I

Cursos	M. I.	Aprob.	Con 3	Con 4	Con 5	% de calidad	% de promedio	Convalidados
90-91	104	86	50	24	12	34.61	82.62	-
91-92	64	55	32	13	10	35.93	85.93	-
92-93	54	46	33	10	3	24.07	85.18	-
93-94	46	41	24	10	7	36.95	89.13	-

Asignatura: Matemática II (segundo semestre de primer año)

Constatación de las preguntas realizadas en el examen final que llevan la utilización o aplicación de los conocimientos geométricos.

Cursos	M. I.	Aprob.	Con 3	Con 4	Con 5	% de calidad	% de promedio	Convalidados
90-91	102	80	52	20	8	27.45	78.43	-
91-92	63	50	34	10	6	25.39	79.36	-
92-93	54	43	32	6	5	20.37	79.62	-
93-94	45	40	28	8	4	26.66	88.88	-

ANEXO VI

Resultados de promoción de las asignaturas de la disciplina Matemática para arquitectos y la Comunicación I del uso de la profesión, después de aplicar el modelo holístico propuesto

Asignatura: Matemática I

Cursos	M. I.	Aprob.	Con 3	Con 4	Con 5	% de calidad	% de promedio	Convalidados
94-95	32	31	97	14	12	5	53	-
95-96	39	38	98	15	11	12	59	-
96-97	37	36	97	17	12	7	51	-
97-98	36	36	100	12	6	18	67	-
98-99	26	25	96	11	6	8	54	-
99-00	33	31	94	8	13	10	69	-

Asignatura: Comunicación I

Cursos	M. I.	Aprob.	Con 3	Con 4	Con 5	% de calidad	% de promedio
94-95	32	30	13	10	7	53.12	93.75
95-96	39	37	14	10	13	58.97	94.87
96-97	37	36	15	13	8	56.75	97.29
97-98	36	35	10	11	14	69.44	97.22
98-99	26	25	9	9	7	61.53	96.15
99-00	33	33	7	15	11	78.78	100

Asignatura: Matemática II (segundo semestre de primer año)

Constatación de las preguntas realizadas en el examen final que llevan la utilización o aplicación de los conocimientos geométricos.

Cursos	M. I.	Aprob.	Con 3	Con 4	Con 5	% de calidad	% de promedio
94-95	31	30	14	11	5	51.61	96.77
95-96	38	35	16	10	9	50	92.10
96-97	37	35	13	14	8	59.42	94.59
97-98	36	34	14	12	8	55.55	94.59
98-99	26	24	11	8	5	50	92.30
99-00	33	31	14	10	7	51.51	93.93

Asignatura: Matemática III (con el plan "C" modificado, a partir del año 1998 pasaron las integrales dobles y triples para el primer semestre de segundo año)

Constatación de las preguntas realizadas en el examen final que llevan la utilización o aplicación de los conocimientos geométricos.

Cursos	M. I.	Aprob.	Con 3	Con 4	Con 5	% de calidad	% de promedio
94-95	25	25	10	8	7	60	100
95-96	31	31	11	12	8	64.51	100

ANEXO VII

Escala autovalorativa aplicada a profesores

Nombre: ____

Nota: mientras mayor sea el grado de dificultad, mayor será la numeración

	1 2 3 4 5
Le resulta difícil	
1. Una buena impartición de los contenidos relacionados con la geometría.	
2. Que sus estudiantes integren los contenidos de la geometría cuando se imparte de la forma tradicional.	
3. Encontrar literatura docente que sea asequible a los estudiantes y, a su vez, le permita desarrollar la capacidad creativa.	
4. Que sus estudiantes asimilen los contenidos geométricos cuando se imparten por separado las ramas de la geometría.	
5. Desarrollar en los estudiantes la capacidad de producir y crear en la forma tradicional de impartir la geometría.	
6. Confeccionar un sistema de evaluación que le permita medir el nivel de productividad y creatividad en sus estudiantes.	
7. Integrar las ramas de la geometría en el momento de impartir sus clases; es decir, enseñarla como un todo.	

Resultados de la escala autovalorativa

	1	2	3	4	5
1	0%	0%	35%	35%	30%
2	0%	0%	20%	30%	50%
3	0%	0%	10%	30%	60%
4	0%	15%	20%	35%	30%
5	10%	10%	25%	25%	30%
6	0%	5%	30%	25%	40%
7	0%	10%	10%	20%	60%

Escala de valoración aplicada a los profesores

En qué medida se siente satisfecho con los siguientes aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría descriptiva y analítica:

	Satisfecho	Más satisfecho que insatisfecho	Más insatisfecho que satisfecho	Insatisfecho
1. Con su planificación en asignaturas por separado.				
2. Con su planificación dentro de la matemática, pero en temas separados.				
3. Con la literatura que existe para ser usada por los estudiantes para aprender la geometría.				
4. Con los tipos de ejercicios que existen en los libros para que los estudiantes aprendan la geometría.				
5. Con el modo de evaluar la geometría en su asignatura, según la orientación del estudio individual por la literatura existente.				
6. Con el nivel de información que usted tiene sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría descriptiva y analítica.				
7. Con la cantidad de horas asignadas al proceso enseñanza-aprendizaje de la geometría.				

Resultados de la escala valorativa

	Satisfecho	Más satisfecho que insatisfecho	Más insatisfecho que satisfecho	Insatisfecho
1	0%	30%	60%	20%
2	0%	15%	75%	10%
3	10%	10%	65%	15%
4	15%	30%	35%	20%
5	10%	30%	40%	20%
6	5%	25%	40%	30%
7	0%	35%	40%	25%