

# Global-local and fixed-random parameters to model dominant height growth of *Pinus pseudostrobus* Lindley

## Parámetros globales-locales y fijos-aleatorios para modelar el crecimiento en altura dominante de *Pinus pseudostrobus* Lindley

Guadalupe G. García-Espinoza<sup>1</sup>; Oscar A. Aguirre-Calderón<sup>1\*</sup>; Gerónimo Quiñonez-Barraza<sup>2</sup>; Eduardo Alanís-Rodríguez<sup>1</sup>; Marco A. González-Tagle<sup>1</sup>; J. Jesús García-Magaña<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ciencias Forestales. Carretera Nacional, km 145. C. P. 67700. Linares, Nuevo León, México.

<sup>2</sup>Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias, Centro Regional Norte Centro, Campo Experimental Valle del Guadiana. Carretera Durango-Mezquitlan km 4.5. C. P. 43000. Durango, Dgo., México.

<sup>3</sup>Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Facultad de Agrobiología "Presidente Juárez". Paseo de la Revolución núm. 1, col. Emiliano Zapata. C. P. 60170. Uruapan, Michoacán, México.

\*Corresponding author: oscar.aguirrecl@uanl.edu.mx, tel.: +52 (818) 329 4000.

### Abstract

**Introduction:** Dominant height and site index (SI) models consider average parameters for a sample or population. The dummy variable (DV) modeling approach generates global and local parameters, while mixed-effects models (MEM) generate fixed and random ones for each tree or plot.

**Objective:** To fit and compare dynamic dominant height equations with the DV and MEM approaches for *Pinus pseudostrobus* Lindley in commercial forest plantations in Nuevo San Juan Parangaricutiro, Michoacan, Mexico.

**Materials and methods:** Three algebraic difference approach (ADA) equations and one generalized algebraic difference approach (GADA) equation, based on the Chapman-Richards model, were fitted with the SI parameter associated as local or random for each tree. The database used considered stem analysis of 41 trees.

**Results and discussion:** The accuracy of the fitted equations with DV and MEM was similar, according to the fitting statistics and the trajectories of the SI curves at the base age of 20 years. In the ADA equations, the polymorphic curve showed greater statistical efficiency with both approaches when the growth rate parameter depended on the SI. However, the GADA equation generated curves that better described the growth pattern; the highest accuracy was obtained with the DV approach.

**Conclusions:** The use of the GADA equation with DV is an accurate tool for classifying the productivity of commercial forest plantations, which will allow forest management planning based on site quality.

### Resumen

**Introducción:** Los modelos de altura dominante e índice de sitio (IS) se consideran parámetros promedio para una muestra o población. El enfoque de modelación de variables indicadoras (VI) genera parámetros globales y locales, mientras que los modelos de efectos mixtos (MEM) generan fijos y aleatorios para cada árbol o parcela.

**Objetivo:** Ajustar y comparar ecuaciones dinámicas de altura dominante con los enfoques de VI y MEM para *Pinus pseudostrobus* Lindley en plantaciones forestales comerciales de Nuevo San Juan Parangaricutiro, Michoacán, México.

**Materiales y métodos:** Tres ecuaciones en diferencias algebraicas (ADA) y una generalizada (GADA), basadas en el modelo de Chapman-Richards, se ajustaron con el parámetro de IS asociado como local o aleatorio para cada árbol. La base de datos utilizada consideró análisis troncales de 41 árboles.

**Resultados y discusión:** La precisión de las ecuaciones ajustadas con VI y MEM fue similar, de acuerdo con los estadísticos de ajuste y las trayectorias de las curvas de IS a la edad base de 20 años. En las ecuaciones ADA, la curva polimórfica presentó eficiencia estadística superior con los dos enfoques, cuando el parámetro de la tasa de crecimiento dependió del IS. No obstante, la ecuación GADA generó curvas que describieron mejor el patrón de crecimiento; la precisión mayor se obtuvo con el enfoque de VI.

**Conclusiones:** El uso de la ecuación GADA con VI es una herramienta precisa para clasificar la productividad de las plantaciones forestales comerciales, lo cual permitirá la planeación del manejo forestal por calidad de estación.

**Keywords:** Site quality; dynamic equations; mixed effects; site index; dummy variable.

**Palabras clave:** Calidad de estación; ecuaciones dinámicas; efectos mixtos; índice de sitio; variables indicadoras.

Please cite this article as follows (APA 6): García-Espinoza, G. G., Aguirre-Calderón, O. A., Quiñonez-Barraza, G., Alanís-Rodríguez, E., González-Tagle, M. A., & García-Magaña, J. J. (2019). Global-local and fixed-random parameters to model dominant height growth of *Pinus pseudostrobus* Lindley. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 25(1), 141-156. doi: 10.5154/r.rchscfa.2018.06.047



## Introduction

Site quality can be defined as the productive capacity of a particular site for the growth of trees of a given species in response to the totality of existing environmental conditions; it commonly refers to the volume of wood a stand produces in a forest rotation (Diéguez et al., 2009; Skovsgaard & Vanclay, 2008). Site quality assessment methods are divided into direct and indirect approaches. Direct methods are based on observations of dominant or co-dominant height; this variable is unaffected by stand density and is a fundamental component in growth and yield models (Pyo, 2017; Seki & Sakici, 2017). On the other hand, indirect ones use the relationships between canopy species, the characteristics of undergrowth vegetation, topographic, climatic and edaphic factors, and the chemical composition of foliage (Chen, Klinka, & Kabzems, 1998; Wang, 1998).

To characterize the forest productivity of the stands, the dominant height expected at a certain age is used and is called the site index (SI) (Martín-Benito, Gea-Izquierdo, Del Río, & Cañellas, 2008). Modeling dominant height and SI is an important tool for classifying the productivity of forest lands and defining management strategies in the application of silvicultural treatments (López-Sánchez, Álvarez-González, Diéguez-Aranda, & Rodríguez-Soalleiro, 2015; Quiñonez-Barraza et al., 2015). One of the most commonly used methods for generating SI curves is the guide curve, which characterizes the height status to determine the current average condition; in contrast, dynamic equations estimate dominant height as a function of current and future age and height (Tamarit-Urias et al., 2014). Dynamic equations are based on the algebraic difference approach (ADA) and generalized algebraic difference approach (GADA). In the ADA method, a parameter of the equation is considered site-specific. Depending on the site-dependent parameter, anamorphic or polymorphic curves are obtained (Bailey & Clutter, 1974). In the GADA equations, two parameters are site-specific and generate polymorphic curves with multiple asymptotes (Cieszewski & Bailey, 2000).

Dummy variable (DV) and mixed-effects model (MEM) approaches have been applied in ADA and GADA equations to model dominant height and SI (De los Santos-Posadas, Montero-Mata, & Kanninen, 2006; Nigh, 2015; Tamarit-Urias et al., 2014; Wang, Borders, & Zhao, 2007); results have shown ability to predict and project height as a function of age. In the DV approach, global and local parameters are generated, and in the MEM approach, parameters are fixed and random for each tree or plot. These approaches fit global (common) and specific (local) parameters simultaneously, but differ in the form of estimation (Wang, Borders, & Zhao, 2008).

## Introducción

La calidad de sitio se puede definir como la capacidad productiva de un lugar concreto para el crecimiento de los árboles de una especie determinada como respuesta a la totalidad de las condiciones ambientales existentes; comúnmente, se refiere al volumen de madera que un rodal produce en un turno de corta (Diéguez et al., 2009; Skovsgaard & Vanclay, 2008). Los métodos de evaluación de la calidad de sitio se dividen en directos e indirectos. Los métodos directos se basan en observaciones de altura dominante o codominante; esta variable no tiene afectación por la densidad del rodal y es un componente fundamental en los modelos de crecimiento y rendimiento (Pyo, 2017; Seki & Sakici, 2017). Por otro lado, los indirectos emplean las relaciones entre las especies del dosel, las características de la vegetación del sotobosque, los factores topográficos, climáticos y edáficos, y la composición química del follaje (Chen, Klinka, & Kabzems, 1998; Wang, 1998).

Para caracterizar la productividad forestal de los rodales se utiliza la altura dominante esperada a cierta edad y se le denomina índice de sitio (IS) (Martín-Benito, Gea-Izquierdo, Del Río, & Cañellas, 2008). La modelación de la altura dominante y el IS constituye una herramienta importante para clasificar la productividad de los terrenos forestales y definir estrategias de manejo en la aplicación de tratamientos silvícolas (López-Sánchez, Álvarez-González, Diéguez-Aranda, & Rodríguez-Soalleiro, 2015; Quiñonez-Barraza et al., 2015). Uno de los métodos más empleados para generar curvas de IS es la curva guía, la cual caracteriza el estado de la altura para determinar la condición promedio actual; en contraste, las ecuaciones dinámicas estiman la altura dominante en función de la edad y altura actuales y futuras (Tamarit-Urias et al., 2014). Las ecuaciones dinámicas se basan en la diferencia algebraica (ADA) y diferencia algebraica generalizada (GADA). En el método ADA, un parámetro de la ecuación se considera específico del sitio. En función del parámetro dependiente del sitio, se obtienen curvas anamórficas o polimórficas (Bailey & Clutter, 1974). En las ecuaciones GADA, dos parámetros son específicos del sitio y generan curvas polimórficas con asíntotas múltiples (Cieszewski & Bailey, 2000).

Los enfoques de variables indicadoras (VI) y de modelos de efectos mixtos (MEM) se han aplicado en ecuaciones ADA y GADA para modelar la altura dominante e IS (De los Santos-Posadas, Montero-Mata, & Kanninen, 2006; Nigh, 2015; Tamarit-Urias et al., 2014; Wang, Borders, & Zhao, 2007); los resultados han mostrado capacidad de predicción y proyección de la altura en función de la edad. En el enfoque de VI se generan parámetros globales y locales, y en el enfoque de MEM, los parámetros son fijos y aleatorios para cada árbol

The former is characterized by the addition of dummy variables to the parameter that explains the effect of the tree or plot; it considers local parameters as fixed, but different for each tree or plot. On the other hand, the MEM approach provides a mean response if only the fixed parameters and a specific response per sampling unit, which together form the mixed-effects parameters, are considered. These are estimated by defining a variance-covariance matrix in the model structure (Calama & Montero, 2004; Fang & Bailey, 2001).

In the state of Michoacan, Mexico, *Pinus pseudostrabus* Lindley is the most important forest species in economic terms, which is why commercial forest plantations have been established that represent a component in timber production (López-Upton, 2002; Sáenz-Romero et al., 2012). Therefore, it is necessary to develop accurate silvicultural techniques for the planning and implementation of sustainable forest management activities. In this context, the objective of the research was to fit and compare dynamic dominant height and SI equations with the DV and MEM approaches for *P. pseudostrabus* in commercial forest plantations in Nuevo San Juan Parangaricutiro, Michoacan, Mexico.

## Materials and methods

### Study area

The study was conducted in commercial forest plantations of *P. pseudostrabus* in Nuevo San Juan Parangaricutiro, Michoacan, located between 19° 34' – 19° 25' N and 102° 17' – 102° 00' W. The total area of the plantations is 12 ha, distributed in the communities of Pario, Huerekutini, Tejamanil I and Tejamanil II. The climate is humid temperate, average annual temperature is 18 °C and average annual rainfall is 1 600 mm (García, 1988). The most abundant soil groups are Andosols, Regosols and Phaeozems. The vegetation is typical of a temperate climate; species that stand out in the arboreal component are *Pinus devoniana* Lindl., *P. montezumae* Lamb., *P. douglasiana* Martínez, *P. leiophylla* Schiede ex Schltdl. & Cham., *P. pseudostrabus* Lindl., *Quercus laurina* Bonpl., *Q. castanea* Muhl., *Q. rugosa* Neé, *Abies religiosa* Kunth Schltdl. et Cham., *Arbutus xalapensis* Kunth, *Cornus disciflora* Sessé & Moc., *Tilia mexicana* Schltdl., *Alnus acuminata* H. B. K. and *Alnus jorullensis* Kunth (García-Espinoza et al., 2016).

The database comes from 41 dominant and co-dominant trees aged 26 and 28 years. The trees were felled to obtain cross-sections to 0.3m, 0.6 m and 1.3 m in length and sections between 2.5 m and 3.3 m up to the total height. Height-age data were obtained with the stem analysis methodology. The sample was obtained at different elevations and exposures to cover the study locations.

o parcela. Estos enfoques ajustan simultáneamente los parámetros globales (comunes) y específicos (locales), pero difieren en la forma de estimación (Wang, Borders, & Zhao, 2008). El primero se caracteriza por la adición de variables indicadoras al parámetro que explica el efecto del árbol o la parcela, considera los parámetros locales como fijos, pero diferentes para cada árbol o parcela. Por otro lado, el enfoque MEM proporciona una respuesta media si solo se consideran los parámetros fijos y una respuesta específica por unidad de muestreo, que en conjunto forman los parámetros de efectos mixtos. Estos se estiman mediante la definición de una matriz de varianza-covarianza en la estructura del modelo (Calama & Montero, 2004; Fang & Bailey, 2001).

En el estado de Michoacán, México, *Pinus pseudostrabus* Lindley es la especie forestal más importante en términos económicos, por lo cual se han establecido plantaciones forestales comerciales que representan un componente en la producción maderable (López-Upton, 2002; Sáenz-Romero et al., 2012). Por lo anterior, es necesario desarrollar técnicas silvícolas precisas para la planeación y ejecución de actividades de manejo forestal sustentable. En este contexto, el objetivo de la investigación fue ajustar y comparar ecuaciones dinámicas de altura dominante e IS con los enfoques de VI y MEM para *P. pseudostrabus* en plantaciones forestales comerciales de Nuevo San Juan Parangaricutiro, Michoacán, México.

## Materiales y métodos

### Área de estudio

El estudio se realizó en plantaciones forestales comerciales de *P. pseudostrabus* en Nuevo San Juan Parangaricutiro, Michoacán, localizadas entre los 19° 34' – 19° 25' LN y 102° 17' – 102° 00' LO. La superficie total de las plantaciones es de 12 ha, distribuidas en las localidades de Pario, Huerekutini, Tejamanil I y Tejamanil II. El clima es templado húmedo, la temperatura media anual es 18 °C y la precipitación media anual de 1 600 mm (García, 1988). El grupo de suelos más abundante se constituye por Andosoles, Regosoles y Feozems. La vegetación es propia de clima templado; en el componente arbóreo destacan *Pinus devoniana* Lindl., *P. montezumae* Lamb., *P. douglasiana* Martínez, *P. leiophylla* Schiede ex Schltdl. & Cham., *P. pseudostrabus* Lindl., *Quercus laurina* Bonpl., *Q. castanea* Muhl., *Q. rugosa* Neé, *Abies religiosa* Kunth Schltdl. et Cham., *Arbutus xalapensis* Kunth, *Cornus disciflora* Sessé & Moc., *Tilia mexicana* Schltdl., *Alnus acuminata* H. B. K. y *Alnus jorullensis* Kunth (García-Espinoza et al., 2016).

La base de datos proviene de 41 árboles dominantes y codominantes con edades de 26 y 28 años. Los árboles se derribaron para la obtención de cortes transversales

### Dominant height and site index equations

The base equation was developed by Chapman-Richards (Richards, 1959), which is flexible and has been used to generate SI and height increase curves in relation to age (Cañadas-L et al., 2018; Pyo, 2017; Quiñonez-Barraza et al., 2015; Rodríguez-Carrillo, Cruz-Cobos, Vargas-Larreta, & Hernández, 2015). The equation is represented as:

$$H_{ij} = \beta_1(1 - e^{-\beta_2 A_{ij}})^{\beta_3}$$

where,

$H_{ij}$  = height  $j$  of tree  $i$

$A_{ij}$  = age  $j$  of tree  $i$

$\beta_1$  = parameter representing the horizontal asymptote

$\beta_2$  = growth rate

$\beta_3$  = change rate

$e$  = Euler's mathematical constant.

Preliminarily, the ADA1 equation (equation 1) with global and local parameters was fitted so that the database was symmetrical in the growth trajectories, which allowed estimating the height of each tree until 28 years of age. The fitted parameters were different from zero ( $P < 0.00001$ ) and the coefficient of determination was 99.61 %. The age-symmetrical database was used for fitting the dynamic equations. Descriptive statistics including mean, minimum and maximum values and standard deviation for height-age in the four communities are shown in Table 1.

The ADA1 equation represented anamorphic SI curves with the site-dependent asymptote parameter ( $\beta_1$ ); ADA2 (equation 2) and ADA3 (equation 3) generated polymorphic curves with a common asymptote

a 0.3 m, 0.6 m y 1.3 m de longitud y secciones entre 2.5 m y 3.3 m hasta llegar a la altura total. Los datos de altura-edad se obtuvieron con la metodología de análisis troncales. La muestra se obtuvo en diferentes altitudes y exposiciones para cubrir las localidades de estudio.

### Ecuaciones de altura dominante e índice de sitio

La ecuación base fue la desarrollada por Chapman-Richards (Richards, 1959), la cual es flexible y ha sido utilizada para generar curvas de IS e incremento de altura en relación con la edad (Cañadas-L et al., 2018; Pyo, 2017; Quiñonez-Barraza et al., 2015; Rodríguez-Carrillo, Cruz-Cobos, Vargas-Larreta, & Hernández, 2015). La ecuación se representa como:

$$A_{ij} = \beta_1(1 - e^{-\beta_2 E_{ij}})^{\beta_3}$$

donde,

$A_{ij}$  = altura  $j$  del árbol  $i$

$E_{ij}$  = edad  $j$  del árbol  $i$

$\beta_1$  = parámetro que representa la asíntota horizontal

$\beta_2$  = tasa de crecimiento

$\beta_3$  = tasa de cambio

$e$  = constante matemática de Euler.

De manera preliminar, la ecuación ADA1 (ecuación 1) con parámetros globales y locales se ajustó, para que la base de datos fuera simétrica en las trayectorias de crecimiento, lo que permitió estimar la altura de cada árbol hasta la edad de 28 años. Los parámetros ajustados fueron diferentes de cero ( $P < 0.00001$ ) y el coeficiente de determinación fue 99.61 %. La base de datos simétrica en edad se utilizó para el ajuste de las ecuaciones dinámicas. Las estadísticas descriptivas que incluyen los valores promedio, mínimos y máximos y

**Table 1. Descriptive statistics of the height-age database of 41 trees sampled in commercial forest plantations of *P. pseudostrobus* in Nuevo San Juan Parangaricutiro, Michoacan, Mexico.**

**Cuadro 1. Estadísticas descriptivas de la base de datos de altura-edad de 41 árboles muestreados en plantaciones forestales comerciales de *P. pseudostrobus* en Nuevo San Juan Parangaricutiro, Michoacán, México.**

Community/Localidad	Variable	Minimum/Mínimo	Maximum/Máximo	Mean/Media
Pario	A/E	1.00	28.00	11.98 ± 8.59
	H/A	0.30	31.20	13.42 ± 9.39
Huerekutini	A/E	1.00	28.00	11.21 ± 8.56
	H/A	0.30	29.38	12.42 ± 9.38
Tejamanil I	A/E	1.00	28.00	11.22 ± 8.39
	H/A	0.30	34.76	14.33 ± 10.41
Tejamanil II	A/E	1.00	28.00	10.78 ± 8.51
	H/A	0.30	34.39	13.56 ± 10.12

A = age (years); H = height (m); ± standard deviation of the mean.

E = edad (años); A = altura (m); ± desviación estándar de la media.

when the parameters  $\beta_2$  and  $\beta_3$  depended on the site, respectively (Bailey & Clutter, 1974). In the GADA model, two parameters varied with specific site-quality conditions to obtain polymorphic curves with multiple asymptotes (Cieszewski & Bailey, 2000). The GADA equation (equation 4) was derived by Quiñonez-Barraza et al. (2015) for mixed-species stands, where the asymptote and rate of change parameters were considered a function of site quality. The ADA and GADA equations were as follows:

$$H_{ij} = Hs_i \left[ \frac{1 - e^{-\beta_2 A_{ij}}}{1 - e^{-\beta_2 Ab}} \right]^{\beta_3} \quad (1)$$

$$H_{ij} = \beta_1 (1 - [1 - (Hs_i / \beta_1)^{1/\beta_3}]^{A_{ij}/Ab})^{\beta_3} \quad (2)$$

$$H_{ij} = \beta_1 \left( \frac{Hs_i}{\beta_1} \right)^{\left( \frac{\ln(1 - e^{-\beta_2 H_{ij}})}{\ln(1 - e^{-\beta_2 Ab})} \right)} \quad (3)$$

$$H_{ij} = e^{\left[ \beta_1 + \beta_2 \left( \frac{\ln(Hs_i) - \beta_1}{\ln(1 - e^{-\beta_3 Ab}) + \beta_2} \right) \right]} (1 - e^{-\beta_3 A_{ij}})^{\left[ \frac{\ln(Hs_i) - \beta_1}{\ln(1 - e^{-\beta_3 Ab}) + \beta_2} \right]} \quad (4)$$

where,

$H_{ij}$  = height  $j$  of tree  $i$

$A_{ij}$  = age  $j$  of tree  $i$

$Hs_i$  = local parameter in the DV procedure, and the fixed one, represented as  $Hs$  in MEM, as well as the SI at a base age ( $Ab = 20$ )

$\beta_i$  = global or fixed parameters.

### Modeling approaches

The local parameter of each equation was adjusted with the DV approach to obtain an estimator for each tree; for example, equation 1, according to Wang et al. (2008), was represented as:

$$H_{ij} = f(Hs_{ij}, A_{ij}, Ab, \beta_i)$$

where the local parameter ( $Hs_i$ ) represented the height  $j$  in tree  $i$  and a dummy variable ( $I_i$ ), given by  $Hs_i = \sum_{i=1}^n Hs_{ij} I_i$ .

In the MEM approach, a random-effect formulation was used in each tree, which assumed fixed and random effects. The general structure of the models according to Fang and Bailey (2001) was as follows:

$$H_{ij} = g(C_i \beta + D_i Hs_i, A_{ij}, Ab) + \varepsilon_{ij}$$

where,

$g$  = dynamic function

$C_i = r \times p$  size design matrix for fixed parameters

$\beta = r \times 1$  size vector containing the fixed parameters ( $As$  and  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ )

$D_i = r \times q$  size design matrix, for random effect

$Hs_i = q \times 1$  size vector containing the effect associated with tree  $i$

desviación estándar para la altura-edad, en las cuatro localidades, se muestran en el Cuadro 1.

La ecuación ADA1 representó curvas de IS anamórficas con el parámetro de la asíntota ( $\beta_1$ ) dependiente del sitio; ADA2 (ecuación 2) y ADA3 (ecuación 3) generaron curvas polimórficas con asíntota común cuando los parámetros  $\beta_2$  y  $\beta_3$  dependieron del sitio, respectivamente (Bailey & Clutter, 1974). En el modelo GADA, dos parámetros variaron con las condiciones específicas de la calidad de sitio para obtener curvas polimórficas con asíntotas múltiples (Cieszewski & Bailey, 2000). La ecuación GADA (ecuación 4) fue derivada por Quiñonez-Barraza et al. (2015) para rodales mezclados, en donde el parámetro de la asíntota y el de la tasa de cambio se consideraron una función de la calidad de estación. Las ecuaciones ADA y GADA fueron las siguientes:

$$A_{ij} = As_i \left[ \frac{1 - e^{-\beta_2 E_{ij}}}{1 - e^{-\beta_2 Eb}} \right]^{\beta_3} \quad (1)$$

$$A_{ij} = \beta_1 (1 - [1 - (As_i / \beta_1)^{1/\beta_3}]^{E_{ij}/Eb})^{\beta_3} \quad (2)$$

$$A_{ij} = \beta_1 \left( \frac{As_i}{\beta_1} \right)^{\left( \frac{\ln(1 - e^{-\beta_2 E_{ij}})}{\ln(1 - e^{-\beta_2 Eb})} \right)} \quad (3)$$

$$A_{ij} = e^{\left[ \beta_1 + \beta_2 \left( \frac{\ln(As_i) - \beta_1}{\ln(1 - e^{-\beta_3 Eb}) + \beta_2} \right) \right]} (1 - e^{-\beta_3 E_{ij}})^{\left[ \frac{\ln(As_i) - \beta_1}{\ln(1 - e^{-\beta_3 Eb}) + \beta_2} \right]} \quad (4)$$

donde,

$A_{ij}$  = altura del árbol

$E_{ij}$  = edad del árbol

$As_i$  = parámetro local en el procedimiento de VI, y el fijo, representado como  $As$  en MEM, así como el IS a una edad de referencia ( $Eb = 20$ )

$\beta_i$  = parámetros globales o fijos.

### Enfoques de modelación

El parámetro local de cada ecuación se ajustó con el enfoque de VI para obtener un estimador para cada árbol, por ejemplo, la ecuación 1, de acuerdo con Wang et al. (2008) fue representada como:

$$A_{ij} = f(As_{ij}, E_{ij}, Eb, \beta_i)$$

donde el parámetro local ( $As_i$ ) representó la altura  $j$  en el árbol  $i$  y una variable indicadora ( $I_i$ ), dada por  $As_i = \sum_{i=1}^n As_{ij} I_i$ .

En el enfoque MEM se utilizó una formulación con efecto aleatorio en cada árbol, la cual asumió efectos fijos y aleatorios. La estructura general de los modelos de acuerdo con Fang y Bailey (2001) fue la siguiente:

$$A_{ij} = g(C_i \beta + D_i As_i, E_{ij}, Eb) + \varepsilon_{ij}$$

$A_{ij}$  = age in years of tree  $i$   
 $Ab$  = base age in years  
 $r$  = dimension equal to the number of parameters with fixed effects (global)  
 $\varepsilon_{ij}$  = vector of the error term, which was assumed with the property:  $\varepsilon_{ij} \sim N(0, R_i)$  and  $Hs_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ , where  $R$  is the variance-covariance matrix of the error term and  $N$  represents a normal distribution with  $\mu = 0$  and  $\sigma^2$  constant.

The local random-effect parameter was  $Hs$ , characterized by representing the initial height condition and being the most variable in the fitting by tree (Fang & Bailey, 2001; Tamarit-Urias et al., 2014). The mixed parameter was given by adding  $As$  and  $Hs_i$ .

In MEMs, the random parameter can be obtained through a calibration process for an independent sample; a calibrated response requires height measurements for  $k$  trees. The random parameter ( $\hat{H}s_{ik}$ ) can be estimated by the following matrix:

$$\hat{H}s_{ik} \approx \hat{F} \hat{Z}_k^T (\hat{Z}_k \hat{F} \hat{Z}_k^T + \hat{R}_k)^{-1} \hat{e}_k$$

where,

$\hat{F}$  = scalar matrix of random effect variance  
 $\hat{Z}_k$   $k \times q$  = matrix of partial derivatives with respect to the mixed parameters  
 $T$  = transposed matrix  
 $\hat{R}_k$  = scalar matrix of variance within each tree  
 $\hat{e}_k$  = difference between observed and predicted height, using the fixed-effects equation parameters (Ercanli, Kahriman, & Yavuz, 2014; Jiang & Li, 2010).

### Fitting and evaluation of equations

The DV-formulated equations were fitted by maximum likelihood (*ml*) with the *optimx* package, under the *nlminb* method of the statistical program R (R Core Team, 2017). For the MEM approach, the equations were fitted by maximum likelihood of the *nlme* package (Pinheiro, Bates, DebRoy, & Sarkar, 2013) in R, except for equation 4 which was fitted by *ml* with the SAS NLMIXED procedure (SAS Institute Inc., 2014) to achieve convergence of the fixed and random parameters. All the algorithms that allowed searching for the most efficient parameters for the GADA equation with MEM were tested in the SAS software; the Gauss local optimization method gave the highest value in likelihood and the lowest in the average of the random parameter.

The accuracy of the fitted equations by the DV and MEM approaches was evaluated with the log-likelihood (LL) and Akaike information criterion (AIC) statistics; models with the highest LL values and lowest AIC ones were considered the most efficient (Akaike,

donde,

$g$  = función dinámica  
 $C_i$  = matriz de diseño de tamaño  $r \times p$  para los parámetros fijos  
 $\beta$  = vector de tamaño  $r \times 1$  que contiene los parámetros fijos ( $As$  y  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ )  
 $D_i$  = matriz de diseño de tamaño  $r \times q$ , para el efecto aleatorio  
 $As_i$  = vector de tamaño  $q \times 1$  que contiene el efecto asociado al árbol  
 $E_{ij}$  = edad en años  $j$  del árbol  $i$   
 $E_b$  = edad de referencia en años  
 $r$  = dimensión igual al número de parámetros con efectos fijos (globales)  
 $\varepsilon_{ij}$  = vector del término del error, el cual se asumió con la propiedad:  $\varepsilon_{ij} \sim N(0, R_i)$  y  $As_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ , donde  $R$  es la matriz de varianza-covarianza del término del error y  $N$  representa una distribución normal con  $\mu = 0$  y  $\sigma^2$  constante.

El parámetro local con efecto aleatorio fue  $As$ , caracterizado por representar la condición inicial de altura y por ser el más variable en el ajuste por árbol (Fang & Bailey, 2001; Tamarit-Urias et al., 2014). El parámetro mixto fue dado por la adición de  $As$  y  $As_i$ .

En los MEM, el parámetro aleatorio se puede obtener a través de un proceso de calibración para una muestra independiente; una respuesta calibrada requiere mediciones de altura para  $k$  árboles. El parámetro aleatorio ( $\hat{A}s_{ik}$ ) se puede estimar por el arreglo matricial siguiente:

$$\hat{A}s_{ik} \approx \hat{F} \hat{Z}_k^T (\hat{Z}_k \hat{F} \hat{Z}_k^T + \hat{R}_k)^{-1} \hat{e}_k$$

donde,

$\hat{F}$  = matriz escalar de la varianza del efecto aleatorio  
 $\hat{Z}_k$   $k \times q$  = matriz de derivadas parciales con respecto a los parámetros mixtos  
 $T$  = matriz transpuesta  
 $\hat{R}_k$  = matriz escalar de varianza dentro de cada árbol  
 $\hat{e}_k$  = diferencia entre la altura observada y la predicha, usando los parámetros de la ecuación con efectos fijos (Ercanli, Kahriman, & Yavuz, 2014; Jiang & Li, 2010).

### Ajuste y evaluación de las ecuaciones

Las ecuaciones formuladas con VI se ajustaron por máxima verosimilitud (*ml*) con el paquete *optimx*, bajo el método *nlminb* del programa estadístico R (R Core Team, 2017). Para el enfoque MEM, las ecuaciones se ajustaron por máxima verosimilitud del paquete *nlme* (Pinheiro, Bates, DebRoy, & Sarkar, 2013) en R, excepto la ecuación 4 que fue ajustada por *ml* con el procedimiento NLMIXED de SAS (SAS Institute Inc., 2014) para lograr la convergencia de los parámetros

1979; Schwarz, 1978; Wang et al., 2008). In addition, the coefficient of determination ( $R^2$ ), the root mean square error (RMSE) and absolute average bias were included, estimated with the residual values of the fitted equations.

Visual analysis is one of the most efficient ways to compare models and detect possible systematic discrepancies (Rojo-Alboreca, Cabanillas-Saldaña, Barrio-Anta, Notivol-Paíno, & Gorgoso-Varela, 2017); therefore, the IS curves were plotted and then superimposed on the observed data. Similarly, the evolution of the bias was analyzed by age categories for the fitted dynamic equations.

The potential problem associated with correlation in height measurements in each tree was not corrected because the structure of the random-effects equations allows the variance-covariance matrix to be represented appropriately, and it is possible to control the specific variation at tree level, which offsets the autocorrelation effect (De los Santos Posadas et al., 2006; Jerez-Rico, Moret-Barillas, Carrero-Gómez, Macchiavelli, & Quevedo-Rojas, 2011). Other studies have shown that the use of a structure to correct autocorrelation generates little gain in fitting; furthermore, estimated structure parameters are not used in practice (Nord-Larsen, 2006; Wang et al., 2007, 2008).

## Results and discussion

Table 2 shows the estimates and standard errors of the global parameters for the DV approach and the fixed ones for MEM. All parameters were different from zero ( $P < 0.0001$ ). The means of the local and mixed parameters were similar in each fitted equation; the values ranged from 21.71 to 23.76 and the variance from 4.21 to 9.59, respectively (Table 3).

According to the comparison of the fitting of the modeling approaches with ADA equations, the ADA2 equation (equation 2) with DV obtained the maximum value in LL (-1 014.74) and the lowest in AIC (2 115.47). On the other hand, the GADA equation (equation 4) with DV presented values of -1 015.04 and 2 118.07, in the LL and AIC, respectively, which were similar to those obtained for ADA2 (Table 3). In the equations with DV, the local parameters were totally independent in comparison to MEM, where the random parameters were added to the fixed parameter. This explained the favorable results for DV in terms of LL and AIC, which can be considered as a modified version of LL to take into account the effect of the number of model parameters, even if the same results are obtained in terms of goodness-of-fit (Wang et al., 2008).

In general, the ADA equations with DV were relatively higher than those fitted with MEM. In the ADA

fijos y aleatorios. En el programa SAS se probaron todos los algoritmos que permitieron buscar los parámetros más eficientes para la ecuación GADA con MEM; el método de optimización local de Gauss proporcionó el valor más alto en la verosimilitud y el más bajo de la media del parámetro aleatorio.

La precisión de las ecuaciones ajustadas por VI y MEM se evaluó con los estadísticos de logaritmo de verosimilitud (LL) y criterio de información de Akaike (AIC); los modelos con los valores mayores de LL y los menores de AIC fueron considerados los más eficientes (Akaike, 1979; Schwarz, 1978; Wang et al., 2008). Además, se incluyeron el coeficiente de determinación ( $R^2$ ), la raíz del cuadrado medio del error (RCME) y sesgo promedio absoluto, estimados con los valores residuales de las ecuaciones ajustadas.

El análisis visual es una de las formas más eficientes para comparar modelos y detectar posibles discrepancias sistemáticas (Rojo-Alboreca, Cabanillas-Saldaña, Barrio-Anta, Notivol-Paíno, & Gorgoso-Varela, 2017), por ello, se graficaron las curvas de IS, las cuales fueron sobrepuestas a los datos observados. Del mismo modo, la evolución del sesgo se analizó por categorías de edad para las ecuaciones dinámicas ajustadas.

El problema potencial de autocorrelación asociado a las mediciones de alturas en cada árbol no fue corregido debido a que la estructura de las ecuaciones con efectos aleatorios permite representar la matriz de varianzas-covarianzas apropiadamente, y es posible controlar la variación específica a nivel árbol, lo que contrarresta el efecto de autocorrelación (De los Santos Posadas et al., 2006; Jerez-Rico, Moret-Barillas, Carrero-Gómez, Macchiavelli, & Quevedo-Rojas, 2011). En otros estudios se ha demostrado que el uso de una estructura para corregir la autocorrelación genera poca ganancia en el ajuste; además, los parámetros estimados de la estructura no se utilizan en la práctica (Nord-Larsen, 2006; Wang et al., 2007, 2008).

## Resultados y discusión

El Cuadro 2 presenta los estimadores y errores estándar de los parámetros globales para el enfoque de VI y los fijos para MEM. Todos los parámetros fueron diferentes de cero ( $P < 0.0001$ ). Las medias de los parámetros locales y mixtos fueron similares en cada ecuación ajustada; los valores variaron de 21.71 a 23.76 y la varianza de 4.21 a 9.59, respectivamente (Cuadro 3).

De acuerdo con la comparación de los ajustes de los enfoques de modelación con ecuaciones ADA, la ecuación ADA2 (ecuación 2) con VI obtuvo el valor máximo en el LL (-1 014.74) y el menor en AIC (2 115.47). Por su parte, la ecuación GADA (ecuación 4) con VI presentó valores de -1 015.04 y 2 118.07, en el LL y

equations, the  $R^2$  value was higher (98.58 %) and the RMSE one lower (1.17 m) in the ADA2 equation (equation 2) with DV, although with MEM it had the lowest bias. On the other hand, the MEM-fitted GADA equation (equation 4) had the highest  $R^2$  value (98.66 %) and the lowest RMSE one (1.14 m); however, the bias was lower with the DV approach (Table 3).

AIC, respectivamente, los cuales fueron similares a los obtenidos para ADA2 (Cuadro 3). En las ecuaciones con VI, los parámetros locales fueron totalmente independientes en comparación de MEM, donde los parámetros aleatorios se sumaron al parámetro fijo. Esto explicó los resultados favorables para VI en términos de LL y AIC, que puede considerarse como

**Table 2. Parameters and standard errors of the fitted dynamic equations (algebraic difference [ADA] and generalized algebraic difference [GADA]) of dominant height of *Pinus pseudostrobus* with the dummy variable (DV) and mixed-effects model (MEM) approaches.**

**Cuadro 2. Parámetros y errores estándar de las ecuaciones dinámicas ajustadas (diferencia algebraica [ADA] y diferencia algebraica generalizada [GADA]) de altura dominante de *Pinus pseudostrobus* con los enfoques de variables indicadoras (VI) y modelos de efectos mixtos (MEM).**

Equation/Ecuación	MA/EM	Parameter/ Parámetro	Estimate/ Estimador	SE/EE	t	Pr >  t
ADA1	DV/VI	$\beta_2$	0.0846	0.0026	32.3987	<0.00001
		$\beta_3$	1.4660	0.0294	49.9292	<0.00001
		As	23.6931	0.4860	48.7556	<0.00001
	MEM	$\beta_2$	0.0845	0.0035	23.8595	<0.00001
		$\beta_3$	1.4646	0.0407	36.0047	<0.00001
		$\sigma_e^2$	1.7913	0.0975	18.3702	<0.00001
		$\sigma_{HS}^2/\sigma_{AS}^2$	9.4095	1.7237	5.4586	<0.00001
ADA2	DV/VI	$\beta_1$	33.3855	0.3637	91.7950	<0.00001
		$\beta_3$	1.4776	0.0279	53.0446	<0.00001
		As	23.7308	0.4428	53.5917	<0.00001
	MEM	$\beta_1$	33.2124	0.4101	80.9942	<0.00001
		$\beta_3$	1.4857	0.0336	44.2634	<0.00001
		$\sigma_e^2$	1.3869	0.0719	19.2725	<0.00001
		$\sigma_{HS}^2/\sigma_{AS}^2$	7.7919	2.1989	3.5434	<0.00001
ADA3	DV/VI	$\beta_1$	36.3964	0.5833	62.3996	<0.00001
		$\beta_2$	0.0672	0.0025	26.8284	<0.00001
		As	23.7666	0.3365	70.6316	<0.00001
	MEM	$\beta_1$	35.6968	0.6906	51.6920	<0.00001
		$\beta_2$	0.0700	0.0032	21.7437	<0.00001
		$\sigma_e^2$	1.8990	0.2253	8.4320	<0.00001
		$\sigma_{HS}^2/\sigma_{AS}^2$	4.3609	0.8992	4.9256	<0.00001
GADA	DV/VI	$\beta_1$	4.1259	0.0704	58.5697	<0.00001
		$\beta_2$	-0.4242	0.0477	8.8958	<0.00001
		$\beta_3$	0.0868	0.0026	33.2023	<0.00001
		As	21.7156	3.8264	5.6800	<0.00001
	MEM	$\beta_1$	4.1242	0.0835	49.3900	<0.00001
		$\beta_2$	-0.4234	0.0565	7.4900	<0.00001
		$\beta_3$	0.0868	0.0031	28.1600	<0.00001
		$\sigma_e^2$	1.3877	0.0797	17.4100	<0.00001
		$\sigma_{HS}^2/\sigma_{AS}^2$	7.6689	1.7419	4.4000	<0.00001

MA = modeling approach; SE = standard error of the parameter;  $\sigma_e^2$  = variance;  $\sigma_{HS}^2$  = random parameter variance; t = Student's t-test statistic value; Pr = Student's t-test statistic probability.

EM = enfoque de modelación; Est = estimador del parámetro; EE = error estándar del parámetro;  $\sigma_e^2$  = varianza;  $\sigma_{AS}^2$  = varianza del parámetro aleatorio; t = valor del estadístico de t de Student; Pr = probabilidad del estadístico t de Student.



**Table 3. Fitting statistics of the dynamic dominant height equations (algebraic difference [ADA] and generalized algebraic difference GADA) of *Pinus pseudostrubus* with the dummy variable (DV) and mixed-effects model (MEM) approaches.**

**Cuadro 3. Estadísticos de ajuste de las ecuaciones dinámicas (diferencia algebraica [ADA] y diferencia algebraica generalizada [GADA]) de altura dominante de *Pinus pseudostrubus* con los enfoques de variables indicadoras (VI) y modelos de efectos mixtos (MEM).**

Equation/ Ecuación	MA/EM	LL	AIC	R <sup>2</sup>	RMSE/ RCME	$\bar{E}$	$\mu$	$\sigma^2$
ADA1	DV/VI	-1 134.84	2 355.69	0.9817	1.3376	0.1046	23.6918	9.5933
	MEM	-1 181.24	2 454.48	0.9816	1.3420	0.1051	23.6930	9.1331
ADA2	DV/VI	-1 014.74	2 115.47	0.9858	1.1796	0.0823	23.7273	7.9792
	MEM	-1 106.50	2 305.00	0.9857	1.1833	0.0813	23.7307	7.6480
ADA3	DV/VI	-1 169.47	2 424.94	0.9806	1.3797	0.0929	23.7496	4.6453
	MEM	-1 200.11	2 492.23	0.9804	1.3855	0.0890	23.7665	4.2102
GADA	DV/VI	-1 015.04	2 118.07	0.9858	1.1809	0.0705	23.7680	7.8159
	MEM	-1 106.55	2 225.10	0.9866	1.1470	0.0715	21.7124	7.5299

MA = modeling approach; LL = log-likelihood; AIC = Akaike information criterion; R<sup>2</sup> = coefficient of determination; RMSE = root mean square error;  $\bar{E}$  = absolute average bias;  $\mu$  = mean of local and mixed parameters;  $\sigma^2$  = variance of local and mixed parameters.

EM = enfoque de modelación; LL = logaritmo de la verosimilitud; AIC = criterio de información de Akaike; R<sup>2</sup> = coeficiente de determinación ajustado; RCME = raíz del cuadrado medio del error;  $\bar{E}$  = sesgo promedio absoluto;  $\mu$  = media de los parámetros locales y mixtos;  $\sigma^2$  = varianza de los parámetros locales y mixtos.

Figure 1 shows that the distribution of local and mixed parameters resembles a normal one and that it was similar for DV and MEM. The random MEM parameters for the ADA group showed a normal distribution with a different degree of kurtosis, and the mean values were close to 0 ( $-7.32 \times 10^{-11}$ ,  $-9.09 \times 10^{-16}$ ,  $7.31 \times 10^{-11}$  for ADA1, ADA2 and ADA3), while GADA had a value of -0.0030 with the Gauss optimization method (Figure 2). The condition of obtaining a normal distribution of the random parameters with zero mean and known variance is an aspect that must be considered; if this does not happen, it could be a reason to use DV, since in this approach there are no considerations about local parameters, as they are independent of each other and there are no restrictions on the values they can take (Nigh, 2015; Verbeke & Molenberghs 2000; Wang et al., 2008).

Figure 3 shows the families of dominant height growth curves with the modeling approaches and the ADA and GADA equations. The SI categories were symmetrical: 18, 22, 26 and 30 m at a base age of 20 years.

una versión modificada de LL para tomar en cuenta el efecto del número de parámetros del modelo, aun cuando se obtengan los mismos resultados en términos de bondad de ajuste (Wang et al., 2008).

En general, las ecuaciones ADA con VI fueron relativamente superiores a las ajustadas con MEM. En las ecuaciones ADA, el valor de R<sup>2</sup> fue mayor (98.58 %) y el de la RCME menor (1.17 m) en la ecuación ADA2 (ecuación 2) con VI, aunque con MEM presentó el menor sesgo. Por otro lado, la ecuación GADA (ecuación 4) ajustada con MEM presentó el valor más alto de R<sup>2</sup> (98.66 %) y el menor en la RCME (1.14 m); no obstante, el sesgo fue menor con el enfoque de VI (Cuadro 3).

La Figura 1 muestra que la distribución de los parámetros locales y mixtos se asemeja a una normal y que fue similar para VI y MEM. Los parámetros aleatorios de los MEM para el grupo ADA mostraron una distribución normal con diferente grado de curtosis, y los valores de la media fueron cercanos a 0 ( $-7.32 \times 10^{-11}$ ,  $-9.09 \times 10^{-16}$ ,  $7.31 \times 10^{-11}$  para ADA1, ADA2 y ADA3, respectivamente),

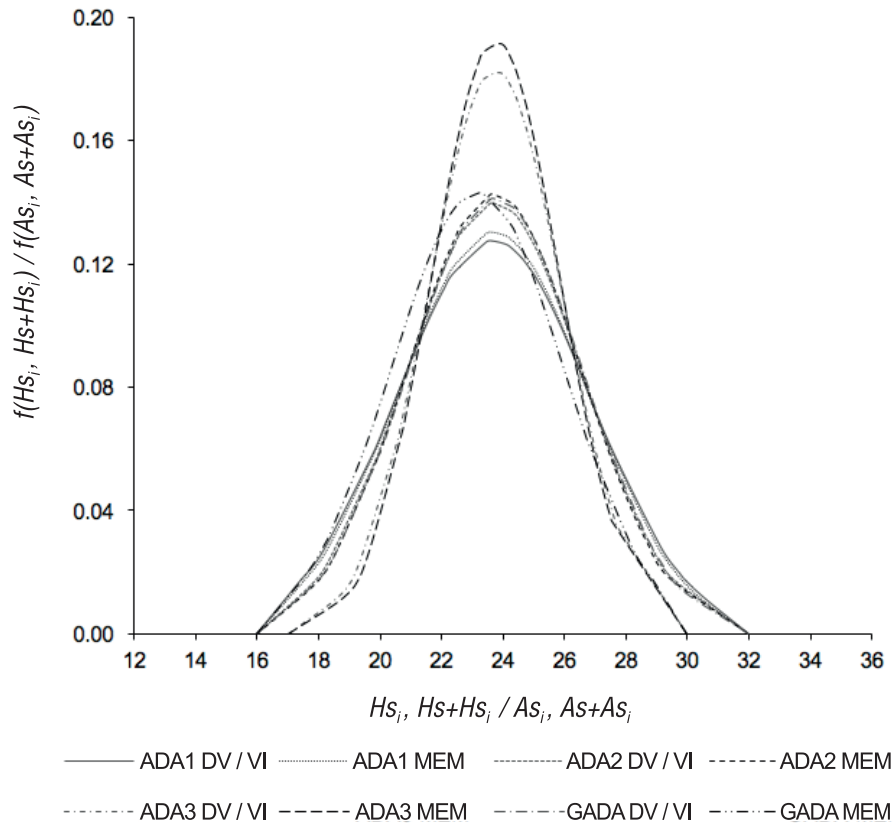


Figure 1. Normal distribution function of the local ( $Hs_i$ ) and mixed ( $Hs+Hs_i$ ) parameters of the fitted equations (algebraic difference [ADA] and generalized algebraic difference [GADA]) with the dummy variable (DV) and mixed-effects model (MEM) approaches.

Figura 1. Función de distribución normal de los parámetros locales ( $As_i$ ) y mixtos ( $As+As_i$ ) de las ecuaciones ajustadas (diferencia algebraica [ADA] y diferencia algebraica generalizada [GADA]) con los enfoques de variables indicadoras (VI) y modelos de efectos mixtos (MEM).

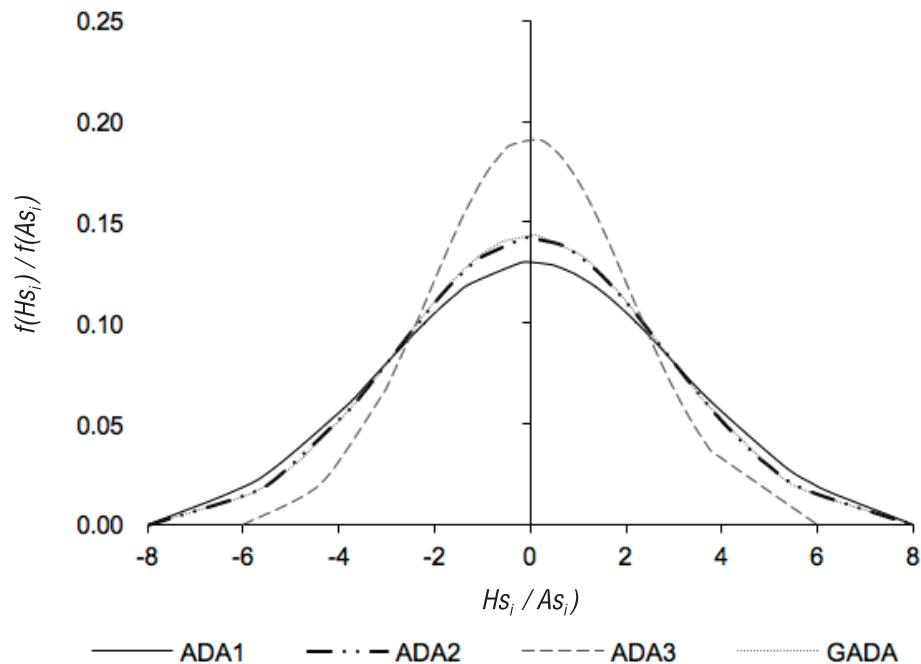
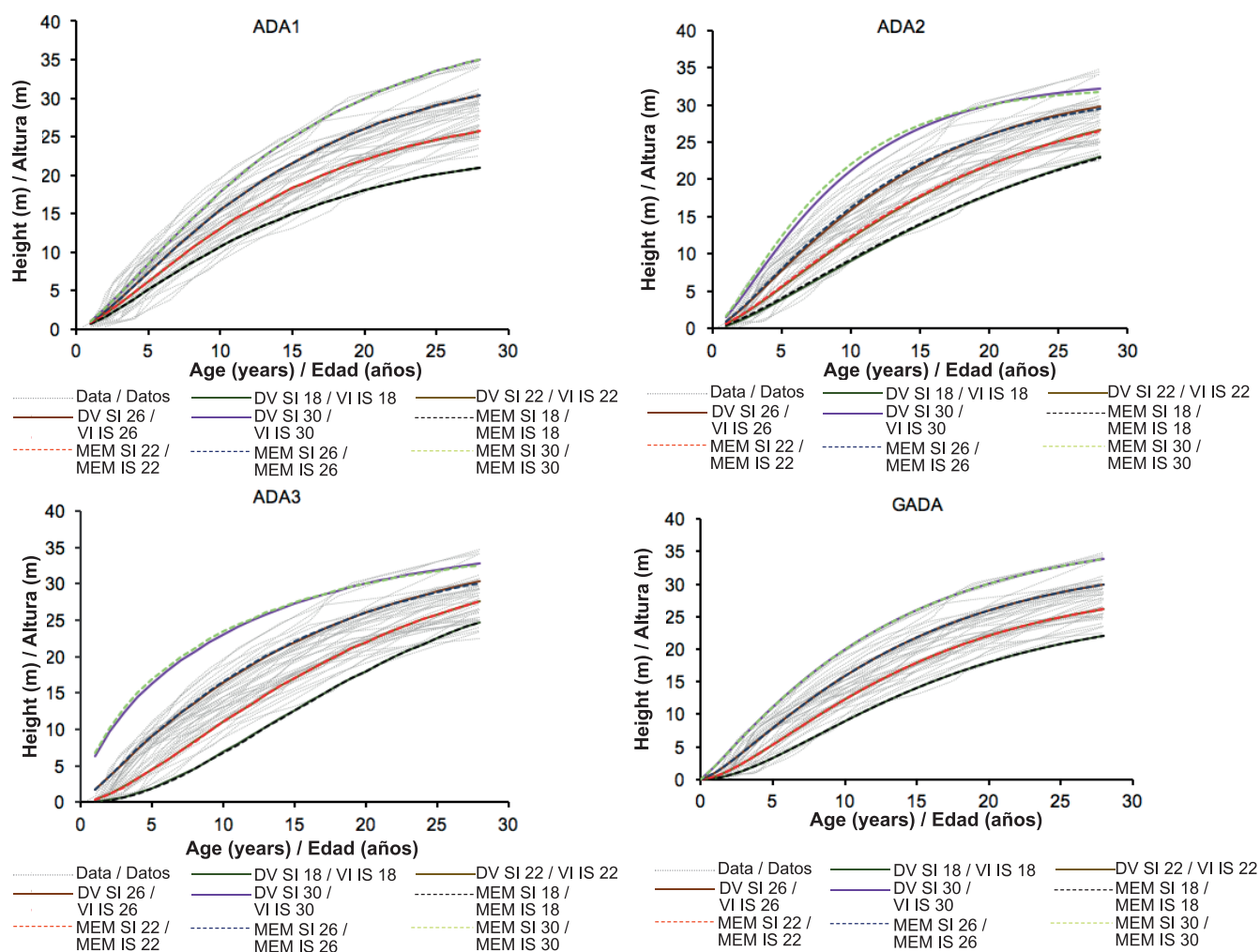


Figure 2. Normal distribution function of the random parameters ( $Hs_i$ ) and generalized algebraic difference (GADA) equations with mixed-effects models (MEM).

Figura 2. Función de distribución normal de los parámetros aleatorios ( $As_i$ ) de las ecuaciones y diferencia algebraica generalizada (GADA) con modelos de efectos mixtos (MEM).



**Figura 3. Families of dominant height growth curves of *Pinus pseudostrobus* for the site index (SI) categories 18, 22, 26 and 30 m, from the fitted algebraic difference (ADA) and generalized algebraic difference (GADA) equations with the dummy variable (DV) and mixed-effects model (MEM) approaches.**

**Figura 3. Familias de curvas de crecimiento de altura dominante de *Pinus pseudostrobus* para las categorías de índice de sitio (IS) 18, 22, 26 y 30 m, a partir de las ecuaciones ajustadas de diferencia algebraica (ADA) y diferencia algebraica generalizada (GADA) con los enfoques de variables indicadoras (VI) y modelos de efectos mixtos (MEM).**

At ages from one to 10 years, an underestimation of the dominant height was observed with the curves obtained from the ADA1 equation (equation 1), while for ADA3 (equation 3) an overestimation was observed. The ADA2 (equation 2) and ADA3 equations generate polymorphic curves, and GADA (equation 4), polymorphic with different asymptotes. The use of polymorphic models has been suggested in the literature to adequately represent the height-age relationship (Álvarez, Ruiz, Rodríguez, & Barrio, 2005; Kahriman, Sönmez, & Gadow, 2018; Tewari, Álvarez-González, & García, 2014); however, ADA3 on the 30-m SI curve showed a disarticulation on the basis of the data trend. The trajectories of the GADA-generated curve families better described dominant height growth behavior for the SIs, at the base age of 20 years. The SI values estimated with GADA with DV for the locations

mientras que GADA presentó un valor de  $-0.0030$  con el método de optimización de Gauss (Figura 2). La condición de obtener una distribución normal de los parámetros aleatorios con media cero y varianza conocida es un aspecto que se debe considerar; si esto no sucede, podría ser una razón para usar VI, ya que en este enfoque no existen consideraciones sobre los parámetros locales, pues son independientes entre sí y no hay restricciones sobre los valores que pueden tomar (Nigh, 2015; Verbeke & Molenberghs, 2000; Wang et al., 2008).

La Figura 3 muestra las familias de curvas de crecimiento de la altura dominante con los enfoques de modelación y las ecuaciones ADA y GADA. Las categorías de IS fueron simétricas: 18, 22, 26 y 30 m a una edad de referencia de 20 años.

of Pario, Huerekutini, Tejamanil I and Tejamanil II were 34, 32, 37 and 36 m, respectively. The commercial forest plantations of Pario and Huerekutini are located in the northeast of Nuevo San Juan Parangaricutiro and have similar topographic characteristics with slopes of 11 to 20 %, while Tejamanil I and Tejamanil II are located in the southwest and slopes vary from 12 to 23 %.

The dynamic equations based on the Chapman-Richards model had results similar to those reported by Pacheco, Santiago, Martínez, and Ortiz (2016), who indicated that the ADA2 and3 GADA equations were more accurate; however, the latter better described the data and covered the dominant height of *P. montezumae* with greater amplitude; Quiñonez-Barraza et al. (2015) generated curve families with the GADA equation used in this study, which adequately described the growth of the dominant height of *Pinus* species in mixed-species stands of Durango. Similarly, González, Cruz, Quiñonez, Vargas, and Nájera (2016) selected the a GADA equation because it presented better goodness-of-fit to predict height growth of *P. pseudostrabus*.

Figure 4 shows that the trend of the average bias by age classes for the equations was similar between modeling approaches and that the highest values occurred in the two-year classes. The distribution of bias was higher in the six- to 14-year categories with ADA3 (equation 3), while the values were homogeneous for ADA1 (equation 1), ADA2 (equation 2) and GADA (equation 4).

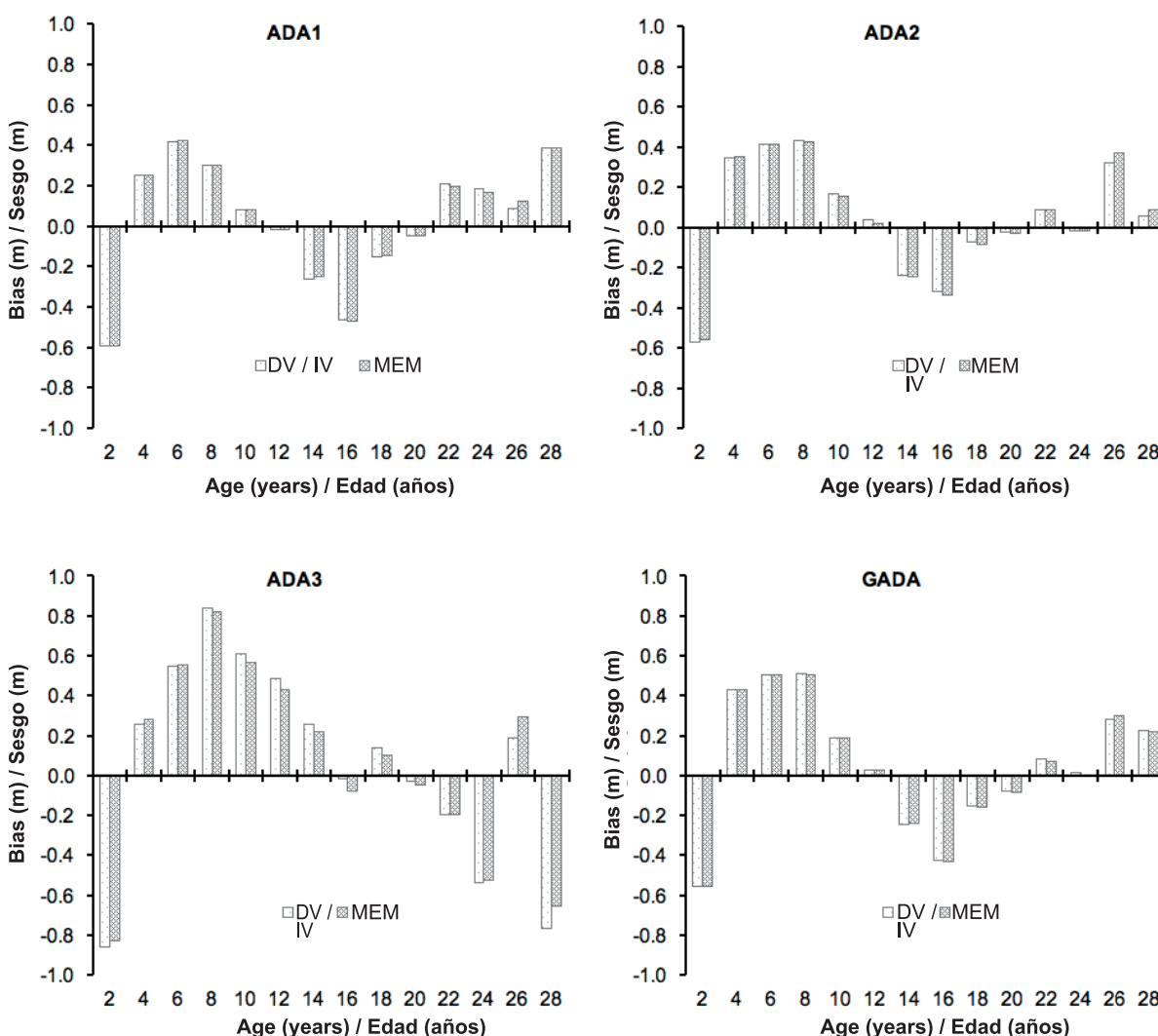
The GADA equation with DV and MEM better described the growth in dominant height; in addition, it presented the greatest efficiency in the fitting statistics. In forest modeling, these approaches have allowed the development of accurate equations with parameters unique to a tree or plot (Jerez-Rico et al., 2011; Pyo, 2017; Sharma, Subedi, Ter-Mikaelian, & Parton, 2015; Tamarit-Urias et al., 2014), which coincides with the results of this study. Although the results of the modeling approaches were similar, the GADA equation with the DV approach had the greatest accuracy; therefore, it is considered that it can be used in the description of the dominant height growth of *P. pseudostrabus* for the commercial forest plantations studied. The results were similar to those found by Wang et al. (2007, 2008), who concluded that DV and MEM had an almost equivalent yield for dominant height and SI for *Pinus tadea* L. According to Nigh (2015), the a GADA model presented better results with the DV approach for *Picea engelmannii* Parry ex Engelm. On the other hand, in biomass studies for *Pinus massoniana* Lamb., both approaches were statistically accurate; however, the use of MEM was more efficient (Fu, Zeng, Tang, Sharma, & Li, 2012).

En edades de uno a 10 años se observó una subestimación en la altura dominante con las curvas obtenidas de la ecuación ADA1 (ecuación 1), mientras que para ADA3 (ecuación 3) se observó sobrestimación. Las ecuaciones ADA2 (ecuación 2) y ADA3 generan curvas polimórficas, y GADA (ecuación 4), polimórficas con asíntotas diferentes. El uso de modelos polimórficos se ha sugerido en la literatura para representar adecuadamente la relación edad-altura (Álvarez, Ruiz, Rodríguez, & Barrio, 2005; Kahrman, Sönmez, & Gadow, 2018; Tewari, Álvarez-González, & García, 2014); sin embargo, ADA3 en la curva de IS de 30 m mostró una desarticulación conforme a la tendencia de los datos. Las trayectorias de las familias de curvas generadas con una GADA describieron mejor el comportamiento del crecimiento en altura dominante para los IS, a la edad base de 20 años. Los valores de IS estimados con GADA con VI para las localidades de Pario, Huerekutini, Tejamanil I y Tejamanil II fueron de 34, 32, 37 y 36 m, respectivamente. Las plantaciones forestales comerciales de Pario y Huerekutini se localizan en el noreste de Nuevo San Juan Parangaricutiro y presentan características topográficas similares con pendientes de 11 a 20 %, mientras que Tejamanil I y Tejamanil II se localizan en el suroeste y la pendiente varía de 12 a 23 %.

Las ecuaciones dinámicas basadas en el modelo de Chapman-Richards presentaron resultados similares a los reportados por Pacheco, Santiago, Martínez, y Ortiz (2016), quienes indicaron que la ecuación ADA2 y una GADA fueron más precisas; no obstante, esta última describió mejor los datos y cubrió la altura dominante de *P. montezumae* con mayor amplitud; Quiñonez-Barraza et al. (2015) generaron familias de curvas con la ecuación GADA utilizada en este estudio, las cuales describieron adecuadamente el crecimiento de la altura dominante de especies de *Pinus* en rodales mezclados de Durango. Del mismo modo, González, Cruz, Quiñonez, Vargas, y Nájera (2016) seleccionaron una ecuación GADA, ya que presentó bondad de ajuste mejor para predecir el crecimiento en altura de *P. pseudostrabus*.

La Figura 4 muestra que la tendencia del sesgo promedio por categoría de edad para las ecuaciones fue similar entre enfoques de modelación y que los valores más altos se presentaron en la categoría de dos años. La distribución del sesgo fue mayor en las categorías de seis a 14 años con ADA3 (ecuación 3), mientras que los valores fueron homogéneos para ADA1 (ecuación 1), ADA2 (ecuación 2) y GADA (ecuación 4).

La ecuación GADA con VI y MEM describió mejor el crecimiento en altura dominante; además, presentó la mayor eficiencia en los estadísticos de ajuste. En modelación forestal, estos enfoques han permitido desarrollar ecuaciones precisas con parámetros



**Figure 4. Average bias by age classes of the fitted algebraic difference (ADA) and generalized algebraic difference (GADA) equations for *Pinus pseudostrobus* with the dummy variable (DV) and mixed-effects model (MEM) approaches.**

**Figura 4. Sesgo promedio por categoría de edad de las ecuaciones ajustadas en diferencia algebraica (ADA) y diferencia algebraica generalizada (GADA) para *Pinus pseudostrobus* con los enfoques de variables indicadoras (VI) y modelos de efectos mixtos (MEM).**

## Conclusions

The dummy variable and mixed-effects modeling approaches were statistically accurate for the algebraic difference (ADA) and generalized algebraic difference (GADA) equations and allowed modeling dominant height growth and generating site index families for *P. pseudostrobus*. Results suggest that the ADA2 polymorphic equation adequately describes the growth pattern and projects maximum height growth in a forest rotation; however, the GADA equation satisfactorily covered the dominant height growth trajectories and had the highest accuracy with the dummy variable approach. Therefore, the use of the GADA equation with the dummy variable approach allows classifying the

exclusivos de un árbol o parcela (Jerez-Rico et al., 2011; Pyo, 2017; Sharma, Subedi, Ter-Mikaelian, & Parton, 2015; Tamarit-Urias et al., 2014), lo que coincide con los resultados de este estudio. Aunque los resultados de los enfoques de modelación fueron similares, la ecuación GADA con enfoque de VI tuvo la mayor precisión, por ello, se considera que puede ser utilizada en la descripción del crecimiento en altura dominante de *P. pseudostrobus* para las plantaciones forestales comerciales estudiadas. Los resultados fueron similares a los encontrados por Wang et al. (2007, 2008), quienes concluyeron que VI y MEM presentaron un rendimiento casi equivalente para la altura dominante e IS de *Pinus tadea* L. De acuerdo con Nigh (2015), un modelo GADA presentó resultados mejores cuando se ajustó con el

productive potential of commercial forest plantations in Nuevo San Juan Parangaricutiro, Michoacán, which have higher site index values in the Tejamanil I and Tejamanil II communities, and lower values in Pario and Huereikutini.

### Acknowledgments

The main author thanks the *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología* (CONACYT) for the scholarship awarded and the Doctoral Program of the *Facultad de Ciencias Forestales de la Universidad Autónoma de Nuevo León*. Thanks also go to the indigenous community of Nuevo San Juan Parangaricutiro, Michoacán, for the assistance provided in the collection of field information.

### End of English version

### References / Referencias

- Akaike, H. (1979). A Bayesian extension of the minimum AIC procedure of autoregressive model fitting. *Biometrika*, 66(2), 237–242. doi: 10.2307/2335654
- Álvarez, G. J., Ruiz, A., Rodríguez, R., & Barrio, M. (2005). Development of ecoregion-based site index models for even-aged stands of *Pinus pinaster* Ait. Galicia (northwestern Spain). *Annals of Forest Science*, 62, 115–127. doi: 10.1051/forest:2005003
- Bailey, R. L., & Clutter, J. L. (1974). Base-age invariant polymorphic site curves. *Forest Science*, 20(2), 155–159. Retrieved from [https://www.researchgate.net/publication/233492107\\_Base-Age\\_Invariant\\_Polymorphic\\_Site\\_Curves](https://www.researchgate.net/publication/233492107_Base-Age_Invariant_Polymorphic_Site_Curves)
- Calama, R., & Montero, G. (2004). Interregional nonlinear height diameter model with random coefficients for stone pine in Spain. *Canadian Journal of Forest Research*, 34(1), 150–163. doi: 10.1139/x03-199
- Cañadas-L, Á., Andrade-Candell, J., Domínguez-A, J. M., Molina-H, C., Schnabel-D, O., Vargas-Hernández, J. J., & Wehenkel, C. (2018). Growth and yield models for teak planted as living fences in coastal Ecuador. *Forests*, 9(2), 55. doi: 10.3390/f9020055
- Chen, H. Y., Klinka, K., & Kabzems, R. D. (1998). Site index, site quality, and foliar nutrients of trembling aspen: relationships and predictions. *Canadian Journal of Forest Research*, 28(12), 1743–1755. doi: 10.1139/x98-154
- Cieszewski, C. J., & Bailey, R. (2000). Generalized algebraic difference approach: Theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *Forest Science*, 46(1), 116–126.
- De los Santos-Posadas, H. M., Montero-Mata, M., & Kanninen, M. (2006). Curvas dinámicas de crecimiento en altura dominante para *Terminalia amazonia* (Gmel.) Excell en Costa Rica. *Agrociencia*, 40(4), 521–534 Retrieved from <http://www.redalyc.org/html/302/30240411/>

enfoque de VI para *Picea engelmannii* Parry ex Engelm. Por otra parte, en estudios de biomasa para *Pinus massoniana* Lamb., ambos enfoques tuvieron precisión estadística; no obstante, el uso de MEM resultó más eficiente (Fu, Zeng, Tang, Sharma, & Li, 2012).

### Conclusiones

Los enfoques de modelación de variables indicadoras y modelos de efectos mixtos resultaron estadísticamente precisos para las ecuaciones de diferencia algebraica (ADA) y diferencia algebraica generalizada (GADA) y permitieron modelar el crecimiento en altura dominante y generar familias de índice de sitio para *P. pseudostrobus*. Los resultados sugieren que la ecuación polimórfica ADA2 describe adecuadamente el patrón de crecimiento y proyecta un crecimiento máximo en altura en el turno de corta; sin embargo, la ecuación GADA cubrió satisfactoriamente las trayectorias de crecimiento de la altura dominante y tuvo la precisión mayor con el enfoque de variables indicadoras. Por tanto, el uso de la ecuación GADA con variables indicadoras permite clasificar el potencial productivo de las plantaciones forestales comerciales en Nuevo San Juan Parangaricutiro, Michoacán, las cuales presentan índice de sitio mayor en las localidades Tejamanil I y Tejamanil II, y menor en las localidades Pario y Huereikutini.

### Agradecimientos

El autor principal agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada y al programa de Doctorado de la Facultad de Ciencias Forestales de la Universidad Autónoma de Nuevo León. A la comunidad indígena de Nuevo San Juan Parangaricutiro, Michoacán, por las facilidades brindadas para la colecta de la información de campo.

Fin de la versión en español

- Diéguez-Aranda, U., Rojo, A. A., Castedo-Dorado, F., Álvarez, G. J. G., Barrio-Anta, M., Crecente-Campo, F., ... & Balboa-Murias, M. A. (2009). *Herramientas selvícolas para la gestión forestal sostenible en Galicia*. Lugo, España: Xunta de Galicia.
- Ercanli, I., Kahrman, A., & Yavuz, H. (2014). Dynamic base-age invariant site index models based on generalized algebraic difference approach for mixed Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) and Oriental beech (*Fagus orientalis* Lipsky) stands. *Turkish Journal of Agriculture and Forestry*, 38(1), 134–147. doi: 10.3906/tar-1212-67
- Fang, Z., & Bailey, R. L. (2001). Nonlinear mixed effects modeling for slash pine dominant height growth following intensive silvicultural treatments. *Forest Science*, 47(3), 287–300. doi: 10.1093/forestsience/47.3.287
- Fu, L., Zeng, W., Tang, S., Sharma, R., & Li, H. (2012). Using linear mixed model and dummy variable model approaches to construct compatible single-tree biomass equations at different scales—A case study for Masson pine in Southern China. *Journal of Forest Science*, 58(3), 101–115. Retrieved from [https://www.researchgate.net/publication/221704433\\_Using\\_linear\\_mixed\\_model\\_and\\_dummy\\_variable\\_model\\_approaches\\_to\\_construct\\_compatible\\_single-tree\\_biomass\\_equations\\_at\\_different\\_scales\\_-\\_A\\_case\\_study\\_for\\_Masson\\_pine\\_in\\_Southern\\_China](https://www.researchgate.net/publication/221704433_Using_linear_mixed_model_and_dummy_variable_model_approaches_to_construct_compatible_single-tree_biomass_equations_at_different_scales_-_A_case_study_for_Masson_pine_in_Southern_China)
- García, E. (1988). *Modificaciones al sistema de clasificación climática de Köppen*. México: UNAM, Instituto de Geografía.
- García-Espinoza, G. G., García-Magaña, J. J., Hernández-Ramos, J., Muñoz-Flores, H. J., García-Cuevas, X., & Hernández-Ramos, A. (2016). Precisión de los coeficientes y cocientes de forma en la estimación del volumen de *Pinus montezumae* Lamb. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 7(35), 19–36. Retrieved from [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S2007-11322016000300019&lng=es&tlng=es](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2007-11322016000300019&lng=es&tlng=es)
- González, M. M., Cruz, C. F., Quiñonez, B. G., Vargas, L. B., & Nájera, L. J. A. (2016). Modelo de crecimiento en altura dominante para *Pinus pseudostrabus* Lindl. en el estado de Guerrero. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 7(37), 7–20. Retrieved from <http://www.scielo.org.mx/pdf/remcf/v7n37/2007-1132-remcf-7-37-00007.pdf>
- Jerez-Rico, M., Moret-Barillas, A. Y., Carrero-Gámez, O. E., Macchiavelli, R. E., & Quevedo-Rojas, A. M. (2011). Curvas de índice de sitio basadas en modelos mixtos para plantaciones de teca (*Tectona grandis* LF) en los llanos de Venezuela. *Agrociencia*, 45(1), 135–145. Retrieved from [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1405-31952011000100012&lng=es&tlng=es](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-31952011000100012&lng=es&tlng=es)
- Jiang, L., & Li, Y. (2010). Application of nonlinear mixed-effects modeling approach in tree height prediction. *Journal of Computers*, 5(10), 1575–1581. doi: 10.4304/jcp.5.10.1575-1581
- Martín-Benito, D., Gea-Izquierdo, G., Del Río, M., & Cañellas, I. (2008). Long-term trends in dominant-height growth of black pine using dynamic models. *Forest Ecology and Management*, 256(5), 1230–1238. doi: 10.1016/j.foreco.2008.06.024
- Kahrman, A., Sönmez, T., & Gadov, K. v. (2018). Site index models for Calabrian pine in the central Mediterranean region of Turkey. *Journal of Sustainable Forestry*, 37(5), 1–16. doi: 10.1080/10549811.2017.1421086
- López-Sánchez, C. A., Álvarez-González, J. G., Diéguez-Aranda, U., & Rodríguez-Soalleiro, R. (2015). Modelling dominant height growth in plantations of *Pseudotsuga menziesii* (Mirb.) Franco in Spain. *Southern Forests: a Journal of Forest Science*, 77(4), 315–319. doi: 10.2989/20702620.2015.1077417
- López-Upton, J. (2002). *Pinus pseudostrabus* Lindl. In J. A. Vozzo (Ed.), *Tropical Tree Seed Manual* (636–638). USA: USDA Forest Service.
- Nigh, G. (2015). Engelmann spruce site index models: A comparison of model functions and parameterizations. *PLoS ONE*, 10(4), e0124079. doi: 10.1371/journal.pone.0124079
- Nord-Larsen, T. (2006). Developing dynamic site index curves for European beech (*Fagus sylvatica* L.) in Denmark. *Forest Science*, 52(2), 173–181. doi: 10.1093/forestsience/52.2.173
- Pacheco, A. G., Santiago, J. W., Martínez, S. D., & Ortiz, B. R. (2016). Análisis del crecimiento e incremento y estimación de índice de sitio para *Pinus montezumae* Lamb. en Santiago Textitlán, Sola de Vega, Oaxaca. *Foresta Veracruzana*, 18(2), 21–28. Retrieved from <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=49748829003>
- Pinheiro, J., Bates, D., DebRoy, S., & Sarkar, D. (2013). R package version 3.1–108. The R development core team nlme: linear and nonlinear mixed effect models. USA: R Development Core Team.
- Pyo, J. (2017). Developing the site index equation using a generalized algebraic difference approach for *Pinus densiflora* in central region, Korea. *Forest Science and Technology*, 13(2), 87–91. doi: 10.1080/21580103.2017.1308889
- Quiñonez-Barraza, G., De los Santos-Posadas, H. M., Cruz-Cobos, F., Velázquez-Martínez, A., Ángeles-Pérez, G., & Ramírez-Valverde, G. (2015). Site index with complex polymorphism of forest stands in Durango, Mexico. *Agrociencia*, 49(4), 439–454. Retrieved from <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=30239403007>
- R Core Team. (2017). *R: A language and environment for statistical computing*. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing.
- Richards, F. (1959). A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany*, 10(29), 290–301.
- Rodríguez-Carrillo, A., Cruz-Cobos, F., Vargas-Larreta, B., & Hernández, F. J. (2015). Compatible dominant height-site index model for juniper (*Juniperus deppeana* Steud.). *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 21(1), 97–108. doi: 10.5154/r.rchscfa.2014.09.041

- Rojo-Alboreca, A., Cabanillas-Saldaña, A. M., Barrio-Anta, M., Notivol-Paíno, E., & Gorgoso-Varela, J. J. (2017). Site index curves for natural Aleppo pine forests in the central Ebro valley (Spain). *Madera y Bosques*, 23(1), 143–159. doi: 10.21829/myb.2017.231495
- Sáenz-Romero, C., Rehfeldt, G. E., Soto-Correa, J. C., Aguilar-Aguilar, S., Zamarripa-Morales, V., & López-Upton, J. (2012). Altitudinal genetic variation among *Pinus pseudostrobus* populations from Michoacán, México. Two location shadehouse test results. *Revista Fitotecnia Mexicana*, 35(2), 111–120. Retrieved from <http://www.redalyc.org/html/610/61023300003/>
- SAS Institute Inc. (2014). Base SAS 9.4<sup>®</sup> procedures guide: Statistical procedure (3<sup>rd</sup>. ed.). Cary, NC, USA: Author.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, 6(2), 461–464. Retrieved from [https://projecteuclid.org/download/pdf\\_1/euclid.aos/1176344136](https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.aos/1176344136)
- Seki, M., & Sakici, O. E. (2017). Dominant height growth and dynamic site index models for Crimean pine in the Kastamonu–Taşköprü region of Turkey. *Canadian Journal of Forest Research*, 47(11), 1441–1449. doi: 10.1139/cjfr-2017-0131
- Sharma, M., Subedi, N., Ter-Mikaelian, M., & Parton, J. (2015). Modeling climatic effects on stand height/site index of plantation-grown jack pine and black spruce trees. *Forest Science*, 61(1), 25–34. doi: 10.5849/forsci.13-190
- Skovsgaard, J. P., & Vanclay, J. K. (2008). Forest site productivity: a review of the evolution of dendrometric concepts for even-aged stands. *Forestry: An International Journal of Forest Research*, 81(1), 13–31. doi: 10.1093/forestry/cpm041
- Tamarit-Urias, J. C., los Santos-Posadas, D., Héctor, M., Aldrete, A., Valdez-Lazalde, J. R., & Ramírez-Maldonado, H. (2014). Ecuaciones dinámicas de índice de sitio para *Tectona grandis* en Campeche, México. *Agrociencia*, 48(2), 225–238. Retrieved from [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1405-31952014000200008&lng=es&tlng=es](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-31952014000200008&lng=es&tlng=es)
- Tewari, V. P., Álvarez-González, J. G., & García, O. (2014). Developing a dynamic growth model for teak plantations in India. *Forest Ecosystems*, 1(9), 1–9. doi: 10.1186/2197-5620-1-9
- Verbeke, G., & Molenberghs, G. (2000). *Linear mixed models for longitudinal data*. New York: USA: NY Springer.
- Wang, G. G. (1998). Is height of dominant trees at a reference diameter an adequate measure of site quality? *Forest Ecology and Management*, 112(1-2), 49–54. doi: 10.1016/S0378-1127(98)00315-6
- Wang, M., Borders, B., & Zhao, D. (2007). Parameter estimation of base-age invariant site index models: which data structure to use? *Forest Science*, 53(5), 541–551. Retrieved from [https://www.researchgate.net/profile/Dehai\\_Zhao/publication/303767996\\_Param\\_Estimation\\_ForSci\\_2007/links/57517ea208ae17e65ec1b564.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Dehai_Zhao/publication/303767996_Param_Estimation_ForSci_2007/links/57517ea208ae17e65ec1b564.pdf)
- Wang, M., Borders, B. E., & Zhao, D. (2008). An empirical comparison of two subject-specific approaches to dominant heights modeling: The dummy variable method and the mixed model method. *Forest Ecology and Management*, 255(7), 2659–2669. doi: 10.1016/j.foreco.2008.01.030