



DESARROLLANDO UN SISTEMA DE PREDICCIÓN DE DISTRIBUCIONES DIAMÉTRICAS PARA *Pinus occidentalis*, Sw. EN LA SIERRA, REPÚBLICA DOMINICANA

DEVELOPING A DIAMETER-DISTRIBUTION PREDICTION SYSTEM FOR *Pinus occidentalis*, Sw. IN LA SIERRA, DOMINICAN REPUBLIC

Santiago W. Bueno López^{*a} y Eddie Bevilacqua^b

¹Investigador, Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, Vicerrectoría de Investigaciones e Innovación, Republica Dominicana & State University of New York, College of Environmental Science and Forestry. 1 Forestry Drive, 320 Bray Hall, Syracuse, N. Y. 13210. Correo-e: swbueno@syr.edu, swbueno@gmail.com. 315-470-6676. *Autor para correspondencia.

²Associate Professor, State University of New York, College of Environmental Science and Forestry.

RESUMEN

La información acerca de la distribución del diámetro de una masa forestal es un componente esencial para derivar una diversidad de atributos del rodal, entender la dinámica del rodal bajo diferentes condiciones ecológicas y la planificación futura de prescripciones silvícolas apropiadas. Distribuciones diamétricas de varias masas coetáneas de *Pinus occidentalis* en tres diferentes zonas ecológicas dentro de la región de La Sierra en la República Dominicana, fueron modeladas utilizando la función de probabilidad de densidad Weibull de tres parámetros. Se compararon cuatro métodos para la predicción de distribuciones diamétricas, dos basados en el método de estimación de parámetros usando máxima verosimilitud y el método de momentos modificados, y dos basados en el método de recuperación de parámetros de regresión utilizando la función de percentil y la función de distribución acumulativa de regresión. Las características del rodal tales como edad, altura, árboles por hectárea, calidad del sitio y área basal, se utilizaron como variables independientes. Los métodos se evaluaron sobre la base de bondad de ajuste de las distribuciones y la raíz del error medio cuadrático de rendimientos de rodal. Con estos datos, el método de recuperación de parámetros apoyados en la distribución basada en el percentil demostró ser considerablemente más eficiente al describir la distribución de diámetro.

Recibido: 12 de mayo, 2010
Aceptado: 4 de octubre, 2010
doi: 10.5154/r.rchscfa.2010.05.029
[http:// www.chapingo.mx/revistas](http://www.chapingo.mx/revistas)

PALABRAS CLAVE: *Pinus occidentalis*, distribución diamétrica, función de densidad de probabilidad Weibull, predicción y recuperación de parámetros, modelos mixtos.

ABSTRACT

Information about the diameter distribution of a forest stand is an essential component for deriving a variety of stand attributes, understanding stand dynamics under varying ecological conditions and planning future forest prescriptions. Diameter distributions from multiple even-aged stands of *Pinus occidentalis* from three different ecological zones within La Sierra region in the Dominican Republic were modeled using a three-parameter Weibull probability prediction method using either maximum likelihood or modified method of moments, and two bases on parameter recovery method using either percentile-based or cumulative distribution function regression. Stand characteristics such as age, total tree height, trees per hectare, site quality and basal area were employed as predictor variables. Methods were evaluated based on goodness-of-fit of the distributions and RMSE of stand yield. In these data, the parameter recovery method based on percentile based distribution proved to be considerably more efficient in describing the diameter distribution.

KEY WORDS: *Pinus occidentalis*, diameter distribution, Weibull pdf, parameter prediction, parameter recovery, mixed models.

INTRODUCCIÓN

La capacidad de predecir la forma en que la silvicultura puede afectar el crecimiento se logra a menudo utilizando modelos de crecimiento y rendimiento. Los modelos de crecimiento ayudan a los gestores forestales e investigadores en la predicción de rendimientos futuros y la exploración de opciones silvícolas, lo que hace posible examinar posibles resultados y conlleva a la toma de decisiones objetivas. Los biometristas forestales han clasificado los modelos de crecimiento basados en diferentes ópticas filosóficas; una de estas filosofías tiene que ver con el nivel de detalles requeridos, proporcionados y utilizados por los modelos (Vanclay, 2001). Usando esta conceptualización, los modelos pueden clasificarse como (1) modelos de todo rodal, (2) modelos de “tamaño de clase”, o (3) modelos del árbol individual. Los modelos de todo rodal son a menudo simples y robustos. Atributos del rodal como la edad, la productividad del sitio y la densidad se usan para predecir el crecimiento y rendimiento. Estos modelos, sin embargo, a menudo carecen de la capacidad de describir la estructura del rodal, proporcionando así información limitada para la toma de decisiones silvícolas. Los modelos de árboles individuales requieren información detallada cuya colección es a menudo demasiado costosa. Los modelos “tamaño de clase” representan un enfoque intermedio entre modelos de todo rodal y modelos del árbol individual.

El “tamaño de clase”, o específicamente, la distribución del diámetro a la altura del pecho (DAP) proporciona información sobre la estructura del rodal, así como un método de predicción del rendimiento. Las distribuciones de los diámetros tienen la capacidad de proporcionar un conocimiento más detallado de la estructura de la masa forestal, la mezcla de productos y su valor (Cao 2004, Nord-Larsen y Cao, 2006), y han sido ampliamente utilizadas en la caracterización de las masas forestales a la hora de prever las futuras cosechas, la programación de aclareos y la planificación de otros tratamientos silvícolas (Nanos y Monteros, 2002). Al predecir el número de árboles por clase de diámetro, ahora y en algún momento futuro en el tiempo, los gestores forestales pueden definir la rotación económica óptima para los rodales coetáneos, detectar el exceso o la falta de productos específicos, y tomar decisiones informadas con respecto a la gestión del rodal.

Los modelos matemáticos de distribuciones diamétricas se basan en el supuesto de que la distribución del diámetro de un rodal en particular puede ser adecuadamente descrita por una función de densidad de probabilidad matemática (pdf) (Bailey y Dell 1973, Knoebel y Burkhart, 1991). Para estimar los parámetros de las funciones de densidad de probabilidad, varios métodos y técnicas estadísticas son actualmente empleados. Dentro de estos métodos, la predicción de parámetros (PPM) y la recuperación de parámetros (PRM) se han

INTRODUCTION

The capacity to predict the form in which forestry can affect growth is often achieved using growth and yield models. Growth models help forest managers and investigators in the prediction of future yields and the exploration of forestry options, which makes it possible to examine possible results and leads to objective decision making. The forest biometricians have classified the growth models based on different philosophical viewpoints, one of these philosophies has to do with the level of details required, provided and utilized by the models (Vanclay, 2001). Using this conceptualization, the models can be classified as (1) all stand models, (2) “class size” models, or 3) individual tree models. The all stand models are often simple and robust. Stand attributes such as age, site productivity and density are used to predict growth and yield. However, these models often lack the capacity to describe the stand structure, thus providing limited information for making forestry decisions. The individual tree models require detailed information whose collection is often too costly. The “class size” models represent an intermediate focus between the all stand models and the individual tree models.

“Class size”, or specifically, the diameter distribution at breast height (DBH) provides information of the stand structure, as well as a method for yield prediction. The diameter distributions have the capacity to provide a more detailed knowledge of the structure of the forest mass, the mixture of products and their value (Cao, 2004; Nord-Larsen and Cao, 2006), and have been widely used in the characterization of the forest masses at the moment of predicting future harvests, programming of thinning and planning of other forest treatments (Nanos and Monteros, 2002). By predicting the number of trees per diameter class, now and at some future time, the forest managers can define the optimum economic rotation for the even-aged stands, detect the excess or lack of specific products, and make informed decisions with respect to the management of the stand.

The mathematical models of diameter distributions are based on the assumption that the diameter distribution of a particular stand may be adequately described by a mathematical probability density function (pdf) (Bailey and Dell, 1973; Knoebel and Burkhart, 1991). To estimate the parameters of the probability density functions, various methods and statistical techniques are presently employed. Within these methods, the prediction of parameters (PPM) and parameter recovery (PRM) have been widely used. The estimation techniques include linear regression, mixed linear regression, conditional maximum likelihood, functions based on moments, on mode and on percentiles and cumulative distribution functions (Liu *et al.*, 2004; Cao, 2004).

To model the diameter distributions, the Weibull probability density function has been commonly used

utilizado ampliamente. Las técnicas de estimación incluyen la regresión lineal, la regresión lineal mixta, máxima verosimilitud condicional, funciones basadas en momentos, en la moda y en funciones de percentiles y funciones de distribución acumulada (Liu *et al*, 2004; Cao, 2004).

Para modelar las distribuciones de diámetro, la función de densidad de probabilidad Weibull ha sido utilizada comúnmente (Bailey y Dell, 1973). La Weibull de tres parámetros puede ser descrita por los parámetros (a) de localización, (b) de escala y (c) de forma, y se define por la pdf:

$$f(x) = \frac{c}{b} \left(\frac{x-a}{b} \right)^{c-1} e \left[- \left(\frac{x-a}{b} \right)^c \right] \quad (1)$$

A pesar de que en teoría a puede ser negativo, cero o positivo, éste se limita a ser positivo cuando se utiliza para representar una distribución de diámetros. Una expresión de forma analítica cerrada de la función de distribución acumulada existe y está dada por la ecuación (2)

$$f(x) = 1 - e \left[- \left(\frac{x-a}{b} \right)^c \right] \quad (2)$$

Esta relación puede establecerse de la siguiente manera. Si una población tiene una distribución Weibull, la proporción de la población con valores superiores a L (diámetro menor en una clase) y menor que U (diámetro superior a una clase) está dada por la ecuación

$$P(L < x < U) = \exp \left[- \left(\frac{L-a}{b} \right)^c \right] - \exp \left[- \left(\frac{U-a}{b} \right)^c \right] \quad (3)$$

Una vez que los parámetros de la distribución de Weibull son estimados y disponibles, las frecuencias de árboles por clase de DAP se pueden calcular fácilmente mediante la aplicación de la ecuación (3) para cada clase.

Los objetivos de esta investigación fueron: 1) evaluar cuatro métodos para obtener los parámetros Weibull que caracterizan la distribución del diámetro de rodales de *P. occidentalis*, 2) determinar si la función de densidad de probabilidad (pdf) Weibull es lo suficientemente flexible para describir las distribuciones de diámetro de rodales de *P. occidentalis* que se encuentran en la República Dominicana (DR), 3) determinar cuáles características de rodal son predictoras adecuadas de los parámetros Weibull, y 4) explorar la precisión y la exactitud del rendimiento de rodales derivadas de predecir las distribuciones de diámetro.

(Bailey and Dell, 1973). The three Weibull parameters can be described by the parameters (a) of location, (b) of scale and (c) of form, and is defined by the pdf:

$$f(x) = \frac{c}{b} \left(\frac{x-a}{b} \right)^{c-1} e \left[- \left(\frac{x-a}{b} \right)^c \right] \quad (1)$$

Although in theory a can be negative, zero or positive, it is limited to being positive when it is used to represent a diameter distribution. An expression of closed analytical form of the cumulative distribution function exists and is given by equation (2):

$$f(x) = 1 - e \left[- \left(\frac{x-a}{b} \right)^c \right] \quad (2)$$

This relationship can be established in the following way. If a population has a Weibull distribution, the proportion of the population with values higher than L (smallest diameter in a class) and lower than U (diameter higher than a class) is given by the following equation:

$$P(L < x < U) = \exp \left[- \left(\frac{L-a}{b} \right)^c \right] - \exp \left[- \left(\frac{U-a}{b} \right)^c \right] \quad (3)$$

Once the parameters of the Weibull distribution are estimated and available, the frequencies of trees per class of DBH can be easily calculated through the application of equation (3) for each class.

The objectives of the present investigation were as follows: 1) to evaluate four methods for obtaining the Weibull parameters that characterize the diameter distribution of stands of *P. occidentalis*, 2) to determine if the Weibull probability density function (pdf) is flexible enough to describe the diameter distributions of stands of *P. occidentalis* that are found in the Dominican Republic (DR), 3) to determine which stand characteristics are adequate predictors of the Weibull parameters, and 4) to explore the precision and exactness of stand yields derived from predicting the diameter distributions.

MATERIALS AND METHODS

Study area. The study area is a region of approximately 1,800 km² in the north-central portion of the Cordillera Central, Dominican Republic. The data available for developing the model were collected in twenty-five plots located in an equal number of natural stands of *P. occidentalis* established in three different life zones in the La Sierra region: nine stands in the humid zone, six stands in the intermediate zone and ten in the dry region. The dry life zone corresponds to the official denomination of subtropical

MATERIALES Y MÉTODOS

Área de estudio. El área de estudio es una región de aproximadamente 1,800 km² en la porción centro-norte de la Cordillera Central, República Dominicana. Los datos disponibles para el desarrollo del modelo fueron colectados en veinticinco parcelas localizadas en igual número de rodales naturales de *P. occidentalis* establecidos en tres diferentes zonas de vida en la región de La Sierra: nueve rodales en la zona húmeda, seis rodales en la zona intermedia y diez en la región seca. La zona de vida seca corresponde a la denominación oficial del bosque seco subtropical, la zona de vida húmeda se describe formalmente como el bosque muy húmedo subtropical, y la zona intermedia, situada entre las dos anteriormente mencionadas, como bosque húmedo subtropical (Holdridge, 1987).

Conjunto de datos. En cada rodal, fue establecida una parcela permanente, y se midieron el diámetro a la altura del pecho con corteza (DAP) y la altura total de cada árbol. Debido a la falta de disponibilidad de rodales en localizaciones seguras, las parcelas variaron en tamaño desde 0.0625 a 1.25 hectáreas. Cada esfuerzo fue hecho para cubrir una amplia gama de condiciones en el rodal y ambientales. Los rodales seleccionados para el muestreo no presentaban indicios de haber experimentado incendios, estaban razonablemente libres de vegetación competidora y no presentaban daño aparente de insectos y hongos. Las parcelas se establecieron al azar en 1984 o 1988, y se midieron periódicamente hasta 1995. Cada parcela se midió entre 2 y 6 veces. Un total de 107 distribuciones fueron derivadas con mediciones repetidas durante un periodo de tiempo máximo de 11 años. La Cuadro 1 muestra el rango de los totales de parcela por zona ecológica para todos los años de medición.

Desarrollo de modelos. Fueron empleados cuatro métodos para estimar los parámetros Weibull: 1) método de predicción de parámetros mediante máxima verosimilitud

dry forest, the humid life zone is formally described as the very humid subtropical forest, and the intermediate zone, situated between the two previously described zones, is known as subtropical humid forest (Holdridge, 1987).

Set of data. In each stand, a permanent plot was established, and the breast height diameter with bark (DBH) was measured along with total height of each tree. Due to the lack of availability of stands in secure locations, the plots varied in size from 0.0625 to 1.25 hectares. Every effort was made to cover the wide range of conditions in the stand and environment. The stands selected for the sampling did not exhibit evidence of having experimented forest fires, were reasonably free of competing vegetation and did not present apparent damage from insects and fungi. The plots were randomly established in 1984 or 1988, and were measured periodically until 1995. Each plot was measured between 2 and 6 times. A total of 107 distributions were derived with repeated measurements during a maximum time period of 11 years. Table 1 shows the range of the plot totals per ecological zone for all the years of measurement.

Development of the models. Four methods were employed for estimating the Weibull parameters: 1) parameter prediction method through maximum likelihood (PPM-ML), 2) parameter prediction method utilizing a modified method of mathematical moments (PPM-MME), 3) parameter recovery method based on the prediction of percentiles (PRM-PCT) (Cao, 2004, Liu *et al.*, 2004).

PPM-ML method. Under this approach, the parameters of location, scale and form of the assumed underlying Weibull distribution were obtained for each re-measurement period and plot utilizing PROC NLP in SAS (SAS Institute Inc., 1990). The NLP procedure is a method of maximum likelihood that offers a set of optimization techniques for minimizing or maximizing a continuous linear and non-linear function and restrictions of inequality. PROC PNL supports a series of algorithms for the solution of this problem using the special structure of the objective

CUADRO 1. Resumen estadístico de las variables * del rodal utilizadas en el desarrollo de los modelos de distribución de diámetro.
TABLE 1. Statistical summary of the stand variables * utilized in the development of the diameter distribution models.

Zona		Edad	APH	Dq	AB	IDR	IS	VOL	Altura promedio 15 % más Altos
	Estadística	Años	(#)	(cm)	(m ² ·ha ⁻¹)		(m)	(m ³ ·ha ⁻¹)	(m)
Seca	Mínimo	23	220	14.25	9.26	111	13	92.24	11.50
	Media	31	482	21.54	15.31	170	19	186.53	18.33
	Máximo	45	950	28.18	27.40	273	25	353.81	25.16
Intermedia	Mínimo	31	160	18.41	13.79	91	20	94.51	18.91
	Media	33	416	24.65	18.11	189	24	168.59	24.46
	Máximo	37	672	31.32	24.21	262	29	273.93	30.00
Húmeda	Mínimo	21	304	20.15	18.96	131	23	190.86	21.50
	Media	31	564	24.47	25.43	173	27	254.52	26.38
	Máximo	52	832	32.46	33.39	231	30	399.12	31.25

*Variables definidas en texto.

(PPM-ML), 2) método de predicción de parámetros utilizando un método modificado de momentos matemáticos (PPM-MME), 3) método de recuperación de parámetros utilizando la función de regresión de distribución acumulada (PRM-CDF) y 4) el modelo de recuperación de parámetros basado en la predicción de percentiles (PRM-PCT) (Cao, 2004, Liu *et al.*, 2004).

Método PPM-ML. Bajo este enfoque, los parámetros de localización, escala y forma de la asumida subyacente distribución Weibull se obtuvieron para cada periodo de re-medición y parcela utilizando PROC NLP en SAS (SAS Institute Inc., 1990). El procedimiento NLP es un método de máxima verosimilitud que ofrece un conjunto de técnicas de optimización para minimizar o maximizar una función lineal continua $f(x)$ de n variables de decisión con límite, identidad general lineal y no lineal y restricciones de desigualdad. PROC NLP apoya una serie de algoritmos para la solución de este problema aprovechando la estructura especial de las funciones objetivo y restricciones. Dos algoritmos especialmente diseñados para problemas de optimización cuadrática, y otros dos algoritmos se proporcionan para la solución eficaz de problemas no lineales por mínimos cuadrados.

Una vez que los parámetros de Weibull fueron confirmados para cada período de nueva medición y parcela, un procedimiento con modelos lineales mixtos fue usado para regresar los parámetros en función de los atributos del rodal, como la edad (A), el número de árboles por hectárea (APH), área basal por hectárea (AB), la altura promedio del 15 % de árboles dominantes en la parcela (HT), índice de densidad del rodal (IDR) y el índice de sitio (IS). Debido a la falta de independencia en las observaciones repetidas para cada parcela en el tiempo, varias estructuras de varianza-covarianza se aplicaron en el modelo mixto. Las estructuras de varianza-covarianza utilizadas fueron la no estructurada (UN); de primer orden autorregresivo [AR (1)] con dos estados distintos, aleatorio y repetido; y el compuesto de simetría (CS), también con declaraciones separadas aleatoria y repetida.

Método PPM-MME. Las mejoras de la técnica de estimación de parámetros mediante la equivalencia de los momentos matemáticos de la muestral a la distribución propuesta, han dado lugar a los estimadores de momento modificados (MME) (Dodson, 1994). Según este autor, MME muestran un desempeño mucho mejor que los estimadores ML cuando la asimetría es grande, aunque los estimadores ML se desempeñan mejor cuando la asimetría es cercana a cero. Las ecuaciones para estimar MME son las siguientes:

$$\frac{S^2}{(\bar{X}-x_1)^2} = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1^2}{\left[\left(1 - n^{-\frac{1}{c}}\right)\Gamma_1\right]^2} \quad (4)$$

functions and restrictions. Two algorithms especially designed for quadratic optimization problems, and two more algorithms were provided for the efficient solution of non-linear problems by least squares.

Once the Weibull parameters were confirmed for each period of new measurement and plot, a procedure with mixed linear models was used to return the parameters in function of their stand attributes, such as age (A), number of trees per hectare (TPH), basal area per hectare (BA), average height of 15 % of dominant trees in the plot (HT), stand density index (SDI) and site index (SI). Due to the lack of independence in the repeated observations for each plot in the period, various structures of variance-co-variance were applied in the mixed model. The structures of variance-co-variance used were unstructured (UN); of first auto-regressive order [AR (1)] with two distinct states, random and repeated; and the symmetry compound (SC), also with separate random and repeated declarations.

PPM-MME method. The improvements of the parameter estimation technique through the equivalence of the mathematical moments of the sample to the proposed distribution, have given way to the modified moment estimators (MME) (Dodson, 1994). According to this author, MME exhibit a much better performance than the ML estimators when the asymmetry is great, although the ML estimators perform better when the asymmetry is close to zero. The equations for estimating MME are as follows:

$$\frac{S^2}{(\bar{X}-x_1)^2} = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1^2}{\left[\left(1 - n^{-\frac{1}{c}}\right)\Gamma_1\right]^2} \quad (4)$$

$$\hat{b} = \frac{S}{\sqrt{\Gamma_2 - \Gamma_1^2}} \quad (5)$$

$$c = \bar{X} - \hat{b}\Gamma_1 \quad (6)$$

where:

$$\Gamma_i = \Gamma\left(1 + \frac{i}{c}\right) \quad (7)$$

S= Standard deviation of the sample

X = Mean of the sample

x_1 = First ordered dbh

b = Scale parameter of the Weibull distribution

c = Form parameter of the Weibull distribution

$$\hat{b} = \frac{s}{\sqrt{\Gamma_2 - \Gamma_1^2}} \quad (5)$$

$$c = \bar{X} - \hat{b}\Gamma_1 \quad (6)$$

donde:

$$\Gamma_i = \Gamma \left(1 + \frac{i}{c} \right) \quad (7)$$

s = Desviación estándar de la muestra

$\bar{X}$ = Media de la muestra

x_1 = Primer dbh ordenado

b = Parámetro escala de la distribución Weibull

c = Parámetro de forma de la distribución Weibull

Similar al enfoque PPM-ML, una vez que se obtienen los parámetros Weibull para cada parcela en cada período de nueva medición, este método predice a continuación, los parámetros de la distribución diamétrica directamente de los atributos del rodal mediante un modelo lineal mixto.

Método PRM-PCT. En este enfoque, los percentiles 0th, 25th, 50th y 95th de la distribución de diámetro son inicialmente obtenidos a partir de datos de la parcela y luego se utilizan como variables dependientes para ser estimadas utilizando las características del rodal como variables independientes (Liu *et al.*, 2004). Los parámetros de la función Weibull se recuperan luego con las siguientes ecuaciones (Liu *et al.*, 2004; Cao, 2004):

$$a = \frac{n^{1/2} \hat{D}_0 - \hat{D}_{50}}{n^{1/2} - 1} \quad (8)$$

$$b = -\frac{a\Gamma_1}{\Gamma_2} + \left[\left(\frac{a}{\Gamma_2} \right)^2 (\Gamma_1^2 - \Gamma_2) + \frac{\hat{D}_q^2}{\Gamma_2} \right] \quad (9)$$

$$c = \frac{\ln \left[\frac{\ln(1-0.95)}{\ln(1-0.25)} \right]}{\ln[(\hat{D}_{95} - a) - (\hat{D}_{25} - a)]} \quad (10)$$

donde:

n: Número de árboles en la parcela

$\hat{D}_0$: Percentil 0th estimado

$\hat{D}_{50}$: Percentil 50th estimado

Similar to the PPM-ML approach, once the Weibull parameters have been obtained for each plot in each new measurement period, this method predicts in continuation, the diametric distribution parameters directly from the stand attributes by means of a mixed linear model.

PRM-PCT method. In this approach, the percentiles 0th, 25th, and 95th of the diameter distribution are initially obtained from data of the plot and then are used as dependent variables to be estimated using the stand characteristics as independent variables (Liu *et al.*, 2004). The parameters of the Weibull function are recovered afterwards with the following equations (Liu *et al.*, 2004; Cao, 2004):

$$a = \frac{n^{1/2} \hat{D}_0 - \hat{D}_{50}}{n^{1/2} - 1} \quad (8)$$

$$b = -\frac{a\Gamma_1}{\Gamma_2} + \left[\left(\frac{a}{\Gamma_2} \right)^2 (\Gamma_1^2 - \Gamma_2) + \frac{\hat{D}_q^2}{\Gamma_2} \right] \quad (9)$$

$$c = \frac{\ln \left[\frac{\ln(1-0.95)}{\ln(1-0.25)} \right]}{\ln[(\hat{D}_{95} - a) - (\hat{D}_{25} - a)]} \quad (10)$$

where:

n: Number of trees in the plot

$\hat{D}_0$: 0th percentile estimated

$\hat{D}_{50}$: 50th percentile estimated

a, b, c: Parameters of location, scale and form of the Weibull distribution

Cao (2004) points out that the PRM-PCT method is not strictly with percentiles, due to the fact that $\hat{D}_q$ is a factor in the equation. The regression parameters of the equations for predicting D_q , D_0 , D_{50} , D_{25} and D_{95} were estimated through mixed linear models.

PRM-CDF method. The location parameter in this approach was recovered from the $\hat{D}_0$, $\hat{D}_q$ percentile estimated. The rest of the parameters of the Weibull function were recovered by reducing to the minimum the following function of Cao (2004):

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_j} \frac{(F_{ij} - \hat{F}_{ij})^2}{n_i} \quad (11)$$

where:

F_{ij} : Accumulated probability observed from the *j*th tree in the *i*th plot.

$\hat{D}_q$: Diámetro medio cuadrático estimado

$\hat{D}_{25}$: Percentil 25th estimado

$\hat{D}_{95}$: Percentil 95th estimado

a, b, c : Parámetros de localización, escala y forma de la distribución Weibull

Cao (2004) señala que el método PRM-PCT no es estrictamente con percentiles debido a que $\hat{D}_q$ es un factor en la ecuación. Los parámetros de regresión de las ecuaciones para predecir D_q , D_0 , D_{50} , D_{25} y D_{95} fueron estimados mediante modelos lineales mixtos.

Método PRM-CDF. El parámetro de localización en este enfoque se recuperó del $\hat{D}_0$ percentil estimado. El resto de los parámetros de la función Weibull se recuperaron reduciendo al mínimo la siguiente función de Cao (2004):

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_j} \frac{(F_{ij} - \hat{F}_{ij})^2}{n_i} \quad (11)$$

donde:

F_{ij} : Probabilidad acumulada observada del j th árbol en la i th parcela.

$\hat{F}_{ij} = 1 - \exp\left\{\left[\frac{x_{ij}-a}{b}\right]^c\right\}$: valor de la CDF de la distribución Weibull.

n_i : Número de árboles en la i th parcela.

La función anterior permite la búsqueda iterativa de los coeficientes para estimar el parámetro de forma (c) en la siguiente ecuación:

$$c = \exp(b_1 + b_2 RS_2 + b_3 \widehat{HT}_2)$$

donde:

b_1, b_2, b_3 = Parámetros estimados.

$$RS = \frac{\left(\frac{10000}{APH}\right)^{0.5}}{HT} \quad (12)$$

HT = altura promedio de árboles dominantes

El parámetro de escala es estimado utilizando la ecuación siguiente:

$$b = \frac{-a\Gamma_1 + \sqrt{a^2(\Gamma_1^2 - \Gamma_2) + D_q^2\Gamma_2}}{\Gamma_2} \quad (13)$$

$\hat{F}_{ij} = 1 - \exp\left\{\left[\frac{x_{ij}-a}{b}\right]^c\right\}$: value of the CDF of the Weibull distribution.

n_i : Number of trees in the i th plot.

The above function allows the iterative search of the coefficients for estimating the form parameter (c) in the following equation:

$$c = \exp(b_1 + b_2 RS_2 + b_3 \widehat{HT}_2)$$

where:

b_1, b_2, b_3 = Estimated parameters.

$$RS = \frac{\left(\frac{10000}{APH}\right)^{0.5}}{HT} \quad (12)$$

HT = Average height of dominant trees

The scale parameter is estimated utilizing the following equation:

$$b = \frac{-a\Gamma_1 + \sqrt{a^2(\Gamma_1^2 - \Gamma_2) + D_q^2\Gamma_2}}{\Gamma_2} \quad (13)$$

where all of the symbols are as previously defined.

Goodness-of-fit tests. The tests to determine the goodness-of-fit of the models are applied to objectively test the hypothesis that the Weibull distribution with the estimated parameters adjusts to the frequencies observed. The following goodness-of-fit statistics were used: Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises, Anderson-Darling and the chi-squared test (Reynolds *et al.*, 1988). These tests permit the evaluation of the models for estimating the individual parameters. Furthermore, the error index proposed by Reynolds *et al.* (1988), based on the differences of the frequencies predicted and observed through the total distribution, is also calculated.

In addition to the above tests, other tests of fit were employed. To measure the level of exactness and precision in the ratio height-DBH and to compare the yields observed with the estimates, the following analysis of residuals was carried out. The mean squared error (MSE), the root of the mean squared error (RMSE), the pseudo-coefficient of determination (R^2), the absolute and relative bias (B , $B\%$), and the mean absolute deviation (MAD). They were calculated as follows:

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \hat{D}_i)^2}{n-m} \quad (14)$$

donde todos los símbolos son como se definió previamente.

Pruebas para la bondad de ajuste. Las pruebas para determinar la bondad de ajuste de los modelos, se aplicaron para probar objetivamente la hipótesis de que la distribución Weibull con los parámetros estimados se ajusta a las frecuencias observadas. Se utilizaron las siguientes estadísticas de bondad de ajuste: Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises, Anderson-Darling y la prueba de chi-cuadrado (Reynolds *et al.*, 1988). Estas pruebas permiten la evaluación de los modelos para estimar los parámetros individuales. Además, el índice de error propuesto por Reynolds *et al.*, (1988), basado en las diferencias de las frecuencias predicha y observada a través de la distribución total, se calcula también.

Además de las pruebas anteriores, fueron empleadas otras pruebas de ajuste. Para medir el nivel de exactitud y precisión en la relación altura-DAP y comparar los rendimientos observados con los estimados, se llevó a cabo el siguiente análisis de residuos: el error cuadrático medio (MSE), la raíz del error cuadrado medio (RMSE), el pseudocoefficiente de determinación (R^2), el sesgo absoluto y relativo (B, B %), y la desviación media absoluta (MAD). Se calcularon de la siguiente manera:

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \hat{D}_i)^2}{n-m} \quad (14)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \hat{D}_i)^2}{n}} \quad (15)$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \hat{D}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2} \quad (16)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \hat{D}_i)}{n} \quad (17)$$

$$B\% = 100 * \frac{\left| \sum_{i=1}^n \frac{(D_i - \hat{D}_i)}{n} \right|}{\bar{d}} \quad (18)$$

$$MAD = \sum_{i=1}^n \frac{|D_i - \hat{D}_i|}{n} \quad (19)$$

donde n es el número de observaciones; D_i es el DAP observado; $\hat{D}_i$ es el DAP estimado; $\bar{D}$ es el DAP promedio; m es el número de β_i parámetros, excluyendo β_0 .

Relación altura-diámetro. Con el fin de calcular los volúmenes partiendo de las distribuciones de diámetro estimadas y utilizando una ecuación de volumen estándar

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \hat{D}_i)^2}{n}} \quad (15)$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \hat{D}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2} \quad (16)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \hat{D}_i)}{n} \quad (17)$$

$$B\% = 100 * \frac{\left| \sum_{i=1}^n \frac{(D_i - \hat{D}_i)}{n} \right|}{\bar{d}} \quad (18)$$

$$MAD = \sum_{i=1}^n \frac{|D_i - \hat{D}_i|}{n} \quad (19)$$

where n is the number of observations; D_i is the observed DBH; $\hat{D}_i$ is the estimated DBH; $\bar{D}$ is the average DBH; m is the number of β_i parameters, excluding β_0 .

Height-diameter ratio. In order to calculate the volumes from the estimated diameter distributions and utilizing an equation of standard volume (Bueno and Bevilacqua, 2009), it was necessary to estimate the height-diameter ratio (Table 2). Data of DBH and height of the trees in each plot were analyzed to determine whether the heights followed the normal distribution for each one of the classes of DBH. Because the measurements were repeated in the individual tree and to take into account the spatial variation of the different forest stands, the DBH-height ratio was modeled with six mixed non-linear functions (Richards, 1959; Stage, 1963; Wycoff *et al.*, 1982; Zeide, 1989; Ratkowsky, 1990; Zhang *et al.*, 1996), each one under consideration with three random coefficients.

Calculations for plot yield. To calculate the yield of each plot estimated by the prediction of the Weibull distribution in the period, the equation of accumulated density (3) of the pdf was used to obtain the proportion of the population with values higher than the lower and upper limits of the diameter classes observed. This proportion was multiplied by the number of trees observed per hectare in the plot, to obtain the number of trees per hectare for each class of diameter of 2 cm. Once the number of trees in each class had been estimated, the average height of trees was calculated in each diameter class with the mid-point of class as the independent variable DBH in the best model of the height functions described above. The volume in cubic meters in the class was calculated using the equations of total stem volume for each one of the zones (Bueno and Bevilacqua, 2009). The predicted yields were compared with the yield observed in each one of the plots.

(Bueno y Bevilacqua, 2009), fue necesario estimar la relación altura-diámetro (Cuadro 2). Datos de DAP y altura de los árboles en cada parcela fueron analizados para determinar si las alturas seguían la distribución normal para cada una de las clases de DAP. Debido a que las mediciones eran repetidas en los árboles individuales y para tomar en cuenta la variación espacial de los diferentes rodales forestales, se procedió a modelar la relación DAP-altura con seis funciones no lineales mixtas (Richards, 1959; Stage, 1963; Wycoff *et al.*, 1982; Zeide, 1989; Ratkowsky, 1990; Zhang *et al.*, 1996), cada una bajo consideración con tres coeficientes aleatorios.

Cálculos de rendimiento en la parcela. Para calcular el rendimiento de cada parcela estimado por la predicción de la distribución Weibull en el tiempo, se utilizó la ecuación de la densidad acumulativa (3) del pdf para obtener la proporción de la población con valores superiores a los límites inferior y superior de las clases de diámetro observadas. Esta proporción fue multiplicada por el número observado de árboles por hectárea en la parcela, para obtener el número de árboles por hectárea para cada clase de diámetro de 2 cm. Una vez que se estimó el número de árboles en cada clase, se procedió a calcular la altura promedio de árboles en cada clase de diámetro con el punto medio de clase como la variable independiente DAP en el mejor modelo de las funciones de altura enunciadas anteriormente. El volumen en metros cúbicos en la clase se calculó utilizando las ecuaciones de volumen total de fuste para cada una de las zonas (Bueno y Bevilacqua, 2009). Los rendimientos pronosticados fueron comparados con los rendimientos observados en cada una de las parcelas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la evaluación de los cuatro métodos de modelización, el conjunto de datos resultó en que las 107 distribuciones de diámetro observadas fueron multi-modales. Las pruebas de bondad de ajuste indican, respecto a la comparación de las distribuciones Weibull con las distribuciones observadas de diámetros, que el 100 por ciento de las distribuciones fueron exitosamente descritas por la función de densidad Weibull acumulada. Las pruebas de bondad de ajuste indican una fuerte asociación entre las distribuciones diamétricas observadas y las esperadas.

Los métodos de predicción de parámetros (PPM) requieren la predicción directa de los parámetros Weibull de los atributos a nivel del rodal, mientras que los métodos de recuperación de parámetros (PRM) utilizan la recuperación indirecta de los parámetros Weibull a partir de los percentiles previstos y las estadísticas de distribución de diámetro utilizando las características del rodal. Los valores de los coeficientes de las ecuaciones de predicción de PPM y de PRM se muestran en los Cuadros 3 y 4, respectivamente.

RESULTS AND DISCUSSION

In the evaluation of the four methods of modeling, the set of data resulted in that the 107 diameter distributions observed were multi-modal. The goodness-of-fit tests indicate, with respect to the comparison of the Weibull distributions with the observed diameter distributions, that 100 per cent of the distributions were successfully described by the Weibull accumulated density function. The goodness-of-fit tests indicate a strong association between the observed and predicted diameter distributions.

The parameter prediction methods (PPM) require the direct prediction of the Weibull parameters of the attributes at the stand level, whereas the parameter recovery methods (PRM) utilize the indirect recovery of the Weibull parameters from the predicted percentiles and the diameter distribution statistics using the characteristics of the stand. The values of the coefficients of the prediction equations of PPM and of PRM are shown in Tables 3 and 4, respectively.

Evaluation of models

Height-diameter ratio. The relationship between height and diameter was explained with better fit by the exponential function (Ratkowsky, 1990), with the following general expression:

$$H = 1.3 + \left(\left(\beta_0 * \exp(-\beta_1 / (DBH + \beta_2)) \right) \right) \quad (20)$$

When this model was fitted to the data in the dry, intermediate and humid zones, the range for the RMSE was 1.22 to 3.11 meters; the absolute bias oscillated from 1.29 to 2.84 meters, and the values of the pseudo R^2 has a range between 0.67 and 0.96, these results being better than the goodness-of-fit statistics for the dry zone and worse for the intermediate zone.

The results show that the two parametric recovery methods PRM are significantly better for the estimations of diameter distributions and yields in terms of cubic meters, than the parameter prediction methods PPM. Both PRM tend to overestimate the number of trees in the higher diameter classes, overvaluing the stand yields. RME as percentage of the average volume per hectare was 2.0 % in general and the relative bias was 1.30 %. The bias in the model can be considered inadequate for the foreseen use of predictions.

The analysis of residuals suggests that the model underestimates the growth of the volume. The growth observed in volume per hectare and per year was on the average 6.60 m³. The growth of the volume estimated per hectare and per year by the PRM-PCT approach was on the average 5.97 m³. In most of the plots, some of the

Evaluación de modelos

Relación altura-diámetro. La relación entre la altura y el diámetro fue explicada con ajuste superior por la función exponencial (Ratkowsky, 1990), con la expresión general siguiente:

$$H = 1.3 + \left(\left(\beta_0 * \exp(-\beta_1 / (DBH + \beta_2)) \right) \right) \quad (20)$$

Cuando este modelo fue ajustado a los datos en las zonas secas, intermedia y húmeda, el rango para el RMSE fue de 1.22 a 3.11 metros; el sesgo absoluto osciló desde 1.29 hasta 2.84 metros, y los valores del pseudo R^2 tuvieron un rango entre 0.67 a 0.96, siendo mejor estos resultados sobre las estadísticas de bondad del ajuste para la zona seca y peor para la zona intermedia.

Los resultados muestran que los dos métodos de recuperación de parámetros PRM son significativamente mejores para la estimación de las distribuciones de diámetro y los rendimientos en términos de metros cúbicos, que los métodos de predicción de parámetros PPM. Ambos PRM tienden a sobreestimar el número de árboles en las clases de mayor diámetro, sobrevalorando los rendimientos del rodal. RMSE como porcentaje del volumen promedio por hectárea fue de 32.0 % en general y el sesgo relativo fue 1.30 %. El sesgo en el modelo puede considerarse despreciable para el uso previsto de predicciones.

El análisis de residuos sugiere que el modelo subestima el crecimiento del volumen. El crecimiento observado en volumen por hectárea y por año fue en promedio de 6.60 m³. El crecimiento del volumen estimado por hectárea y por año por el enfoque de PRM-PCT fue en promedio de 5.97 m³. En la mayoría de las parcelas, algunas de las clases de diámetro de dos centímetros no estuvieron presentes y puede que esto haya contribuido a la subestimación de la frecuencia de árboles por clases de DAP por la función de Weibull y, por tanto, resultara en estimaciones de volumen ligeramente bajas. Un análisis cuidadoso de las estimaciones de rendimiento por año de medición muestra aumentos o disminuciones en las estimaciones de volumen de hasta 25 metros cúbicos, como resultado de la adición o deducción de tan sólo dos clases de DAP. Parece que el modelo Weibull es muy sensible a la presencia continua de clases de DAP en el rango de los datos.

Ecuaciones separadas de regresión lineal utilizando modelos mixtos se han desarrollado para estimar 0th, 25th, 50th, 95th y el diámetro medio cuadrático (D_q). Los regresores significativos para el 0th percentil fueron las variables independientes edad, la altura media del 15 % de los árboles dominantes (HT) y de índice de sitio (IS). El resto de los percentiles, 25th, 50th y 95th, compartieron predictores

diameter classes of two centimeters were not present and it may be that this has contributed to the underestimation of the frequency of trees per classes of DBH by the Weibull function, and therefore, results in slightly low estimations of volume. A careful analysis of the yield estimations per year of measurement shows increases or decreases in the estimations of volume of as much as 25 cubic meters, as a result of the addition or deduction of just two classes of DBH. It seems that the Weibull model is very sensitive to the continuous presence of class of DBH in the range of the data.

Separate equations of linear regression using mixed models have been developed for estimating 0th, 25th, 50th, 95th and squared mean diameter (D_q). The significant regressors for the 0th percentile were the independent variables age, mean height of 15 % of the dominant trees (HT) and the site index (SI). The rest of the percentiles, 25th, 50th and 95th, shared common predictors. The significant independent variables that explain their variability were age, number of trees per hectare (APH) and stand density index (SDI). The most appropriate matrix of variance-covariance was that of first auto-regressive order (AR [1]) to show the correlated errors due to the nature of repeated measurements of the data.

According to the criteria of evaluation, the best method for estimating yield per hectare in the three zones was the PRM-PCT, closely followed by the PRM-CDF. In terms of prediction of the number of trees in individual diameter classes, these methods were also the best. Their prediction of the amount of trees was the same in terms of average error index. The PPM-ML was second in its capacity to predict the number of trees per each individual diameter class, with an error index very similar to that of the PMR methods. Because the PCT-PRM method occupied first place in yield prediction, and first place according to the error index, it was used to provide the estimations of Weibull parameters for the system of prediction of diameter distribution.

Variations per ecological zone

The diameter distributions predicted by the PRM-PCT in each ecological zone were examined considering the averages of the stand attributes, in order to generalize, compare and contrast the differences in the predicted structure among the three zones, and also to compare and contrast the differences among the diameter distributions observed and estimated for each one of the zones. The values corresponding to the predicted and observed average values (trees per hectare) and the levels of kurtosis and asymmetry of the predicted diameter distributions for each zone are shown in Table 5.

The mean of the predicted tree density is in correspondence with the density observed in the three

CUADRO 2. Estimaciones de los parámetros de la función exponencial en las tres zonas diferentes: el coeficiente aleatorio es b_1 .
TABLE 2. Estimations of the parameters of the exponential function in the three different zones: the random coefficient is b_1 .

Parámetro	Húmeda		Intermedia		Seca	
	Coeficiente	Pr > t	Coeficiente	Pr > t	Coeficiente	Pr > t
b_0	83.800	<.0001	33.050	<.0001	52.167	0.0002
b_1	67.430	0.0001	8.134	<.0001	0.041	<.0001
b_2	24.781	<.0001	-5.530	<.0001	0.743	<.0001
s	0.630	<.0001	0.452	<.0001	0.553	<.0001
su	6.504	<.0001	4.977	<.0001	2.344	<.0001

CUADRO 3. Coeficientes de regresión y estadísticos sobre la bondad de ajuste de los parámetros Weibull para el análisis de modelos lineales
TABLE 3. Coefficients of regression and statistics of goodness-of-fit of the Weibull parameters for the analysis of models.nte los métodos

Método de estimación	Parámetro Weibull	Efecto	Coeficiente	Error estándar	Valor-p	Estructura Co-Varianza *	AIC	AICc
ML	A	Intercepto	10.792	2.218	<0.0001	UN	303.3	304.7
		EDAD	-0.115	0.055	0.0450			
		AB	-0.011	0.001	<0.0001			
		APH	0.203	0.042	<0.0001			
	B	Intercepto	30.859	3.486	<0.0001	UN	491.7	492.1
		APH	-0.0234	0.006	0.0004			
MME	C	Intercepto	-2.9164	1.913	0.1341	UN	306.6	307.3
		EDAD	0.209	0.066	0.0020			
	A	Intercepto	7.4025	2.065	0.0006	UN	486.4	487.1
		APH	-0.0009	0.002	0.0011			
		IDR	0.049	0.008	<0.0001			
	B	Intercepto				UN	673.6	674.2
		IDR	-0.0731	0.0183	0.0002			
		IS	0.8925	0.279	0.0020			
		Intercepto	2.524	0.422	<0.0001			
	C	Intercepto				UN	321.0	321.4

* Modelo general: $y = \beta_0 + \beta_1 \text{AGE} + \beta_2 \text{BA} + \beta_3 \text{HT} + \beta_4 \text{SDI} + \beta_5 \text{SI} + \beta_6 \text{TPH} + \epsilon$. Donde y=Parámetro Weibull [†] a = parámetro de localización; b = parámetro de escala; c = parámetro de forma. *UN = no-estructurada. lineales mixtos mediante los métodos de predicción de parámetros de máxima verosimilitud (ML) y de momentos modificados (MME).

CUADRO 4. Coeficientes de regresión y estadísticos sobre la bondad de ajuste de los parámetros Weibull para el análisis de modelos lineales mixtos mediante los métodos de recuperación de parámetros de percentiles (PCT) y de la función de densidad acumulada (CDF).

TABLE 4. Coefficients of regression and statistics of the goodness-of-fit of the Weibull parameters for the analysis of mixed linear models through the methods of parameter recovery of percentiles (PCT) and of the cumulative density function (CDF).

Método de Estimación	Parámetro Weibull	Efecto	Coeficiente	Error Estándar	Valor-p	Estructura Co-Varianza *	AIC	AICc
PCT	D_0	EDAD	0.285	0.084	0.0010	AR(1)	446.5	447.3
		HT	-0.632	0.289	0.0320			
		IS	0.743	0.323	0.0320			
	D_{25}	Intercepto	17.732	1.366	<.0001	AR(1)	204.8	205.6
		EDAD	0.109	0.035	0.0002			
		N	-0.181	0.024	<.0001			
		IDR	0.029	0.006	<.0001			
	D_{50}	Intercepto	20.27	1.888	<.0001	CS	406.5	407.4
		EDAD	0.126	0.049	0.0129			
		N	-0.227	0.027	<.0001			
		IDR	0.045	0.009	<.0001			
	D_{95}	Intercepto	23.81	1.782	<.0001	CS	406.5	407.4
		EDAD	0.255	0.039	<.0001			
		N	-0.151	0.033	<.0001			
		IDR	0.036	0.007	<.0001			

* Modelo general: $y = \beta_0 + \beta_1 \text{AGE} + \beta_2 \text{BA} + \beta_3 \text{HT} + \beta_4 \text{SDI} + \beta_5 \text{SI} + \beta_6 \text{TPH} + \epsilon$, donde y = Estadístico de distribución diamétrica.

[†] D_0 = diámetro mínimo; D_{25} = 25th percentil; D_{50} = 50th percentil; D_{75} = 75th percentil; D_{95} = 95th percentil; D_q = diámetro medio cuadrático.

*CS = simetría compuesta; AR(1) = 1st-orden autorregresivo.

CUADRO 5. Clasificación de los métodos de modelización de la distribución Weibull basada en estimaciones de rendimiento e índice de error para el número de árboles por hectárea en cada clase de diámetro. lineales mixtos mediante los métodos de predicción de parámetros de máxima verosimilitud (ML) y de momentos modificados (MME).

CUADRO 5. Clasificación de los métodos de modelización de la distribución Weibull basada en estimaciones de rendimiento e índice de error para el número de árboles por hectárea en cada clase de diámetro. lineales mixtos mediante los métodos de predicción de parámetros de máxima verosimilitud (ML) y de momentos modificados (MME).

Estadístico de ajuste	Método Predicción de Parámetros		Método Recuperación de Parámetros	
	Máxima verosimilitud	Método momentos modificados	Percentiles	Regresión CDF
REMC	71.88	88.49	61.31	61.94
SESGO	41.00	32.59	2.50	6.25
SESGO (%)	18.29	17.03	1.30	3.26
SSRR	9.15	32.16	14.92	15.32
Ranking Estad. Ajuste	3	4	1	2
Índice Error *	283	415	280	280
Ranking I.E.	2	3	1	1

*Reynolds et al. (1988)

comunes. Las variables independientes significativas que explican la variabilidad de éstos fueron la edad, el número de árboles por hectárea (APH) y el índice de densidad del rodal (IDR). La matriz de varianza-covarianza más apropiada fue la de primer orden autorregresivo (AR [1]) para dar cuenta de los errores correlacionados debido a la naturaleza de medidas repetidas de los datos.

De acuerdo con los criterios de evaluación, el mejor método para estimar el rendimiento por hectárea en las tres zonas fue el PRM-PCT, seguido de cerca por el PRM-CDF. En términos de predicción del número de árboles en clases individuales de diámetro, estos métodos también fueron los mejores. Su predicción de cantidad de árboles fue la misma en términos de índice de error promedio. El PPM-ML fue segundo en su capacidad para predecir el número de árboles por cada clase de diámetro individual, con un índice de error muy similar a la de los métodos de PMR. Debido a que el método PCT-PRM ocupó el primer lugar en la predicción del rendimiento, y el primer lugar según el índice de error, se utilizó para proporcionar las estimaciones de parámetros Weibull para el sistema de predicción de distribución de diámetros.

Variaciones por zona ecológica

Se examinaron las distribuciones de diámetro predichas por el PRM-PCT en cada zona ecológica considerando los promedios de los atributos del rodal, para poder generalizar, comparar y contrastar las diferencias en la estructura prevista entre las tres zonas, y también comparar y contrastar las diferencias entre las distribuciones diamétricas observadas y estimadas para cada una de las zonas. Los valores correspondientes a las densidades promedio predichas y observadas (árboles por hectárea), y los niveles de curtosis y asimetría de las distribuciones previstas de diámetro para cada zona se muestran en el Cuadro 5.

zones. The number of trees per hectare was higher for the stands in the humid zone, followed by the stands in the dry and intermediate zones, where the differences were of 37 and 48 trees per hectare, respectively. In the intermediate zone the difference was of 107 trees. The kurtosis of the predicted distributions was similar in the three zones. The coefficient of asymmetry was higher for the dry zone, with similar values in the humid zone, and lower in the intermediate zone.

When the observed and estimated distributions are compared, in all of the zones the model PRM-PCT generally underestimated the number of trees of smaller diameter and overestimated the classes of greater diameters. In the dry zone it underestimates the number of trees with DBH below 22.0 cm (Figure 2), in the intermediate zone the model underestimates the number of trees in the class of 10.5 cm DBH and in the classes of over 28.5 cm and underestimates the densities for the DBH classes of over 22.0 cm (Figure 3). In the humid zone (Figure 4), the model overestimates the trees in the DBH classes of over 26.5 cm. The greatest discrepancies in the predictions are produced in the intermediate zone.

The classes of DBH in the analysis had a range between 8.5 and 52.5 cm, with a width of the class of 2 cm. In the dry zone, the unimodal distribution of DBH Weibull dbh approaches the multimodal distribution observed greater than the class of 22.0 cm from below, underestimating the number of trees (Figure 2). The mean absolute difference between the observed and predicted distributions for the 13 classes greater than 22.0 cm in terms of number of trees was 9. For the seven classes under 22.0 cm, the average absolute difference was 24 trees.

In the intermediate zone (Figure 3), the average of the absolute differences of the 14 classes above 26.5 cm of

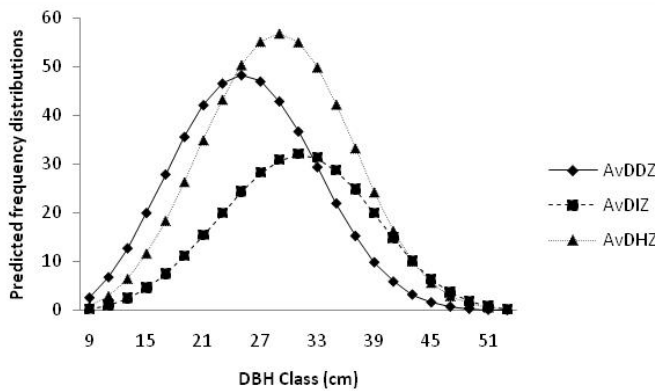


FIGURA 1. Predicción de distribuciones de diámetro mediante la aplicación del modelo PRM-PCT, a las condiciones promedio del rodal en cada zona.

FIGURE 1. Prediction of diameter distributions by means of the application of the model PRM-PCT, to the average conditions of the stand in each zone.

La media de la densidad de árboles predicha está en correspondencia con la densidad observada en las tres zonas. El número de árboles por hectárea fue mayor para los rodales en la zona húmeda, seguido por los rodales en la zona seca e intermedia, respectivamente (Figura 1). Basándonos en el número de árboles por hectárea estimados y observados, el modelo del PCT-PRM aproxima mejor los rodales en la zona húmeda y seca, donde las diferencias fueron de 37 y 48 árboles por hectárea, respectivamente. En la zona intermedia la diferencia fue de 107 árboles. La curtosis de las distribuciones predichas fue similar en las tres zonas. El coeficiente de asimetría fue mayor para la zona seca, con valores similares en la zona húmeda, y más bajos en la zona intermedia.

Al comparar las distribuciones observadas y estimadas, en todas las zonas el modelo PRM-PCT por lo general subestima el número de árboles de menor diámetro y sobrestima las clases de diámetros mayores. En la zona seca subestima el número de árboles con DAP inferior a 22.0 cm (Figura 2), en la zona intermedia el modelo subestima el número de árboles en la clase de 10.5 cm DAP y en las clases mayores a 28.5 cm y subestima las densidades para las clases de DAP superiores a 22.0 cm (Figura 3). En la zona húmeda (Figura 4), el modelo sobreestima los árboles en las clases de DAP mayores de 26.5 cm. Las mayores discrepancias en las predicciones se producen en la zona intermedia.

Las clases de DAP en el análisis tenían un rango entre 8.5 a 52.5 cm, con una anchura de la clase de dos cm. En la zona seca, la distribución unimodal de DAP Weibull dap se aproxima a la distribución multimodal observada por encima de la clase de 22.0 cm desde abajo, subestimando el número de árboles (Figura 2). La diferencia absoluta media entre las distribuciones observadas y previstas para las 13 clases por encima de 22.0 cm en términos de número de árboles fue de 9. Para las siete clases por debajo de 22.0 cm, la diferencia absoluta promedio fue de 24 árboles.

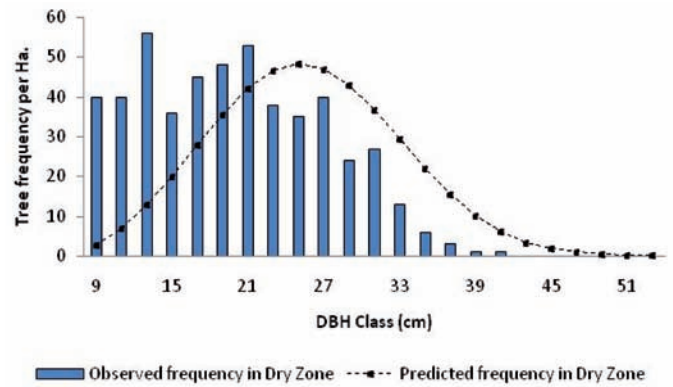


FIGURA 2. Distribuciones diamétricas estimadas y observadas utilizando las condiciones promedio del rodal en la zona seca.

FIGURE 2. Estimated and observed diameter distributions utilizing the average conditions of the stand in the dry zone.

DBH was 11 trees. For the trees in the last seven classes, the mean absolute difference between the observed and expected distribution was 37. The humid zone has 9 classes with overestimation and 13 classes where the number of trees is underestimated (Figure 4). The amount of trees underestimated for the classes under 26.4 cm of DBH in this zone is on the average 21 trees, while the average of absolute difference of the trees overestimated for the 13 classes above this measurement is 12. In general, the model PMR-PCT underestimates the amount of trees in small classes of DBH for the three zones, while it overestimates the amount of trees in the high classes of DBH. The changes in the diameter distribution of trees are caused by tree growth and/or mortality. Let us assume, according to the observations of Bailey (1980), that mortality was not produced during the brief period of seven years of observations. Among the four methods employed to

CUADRO 6. Densidad de árboles estimada y el observada junto con las estadísticas de los valores de curtosis y asimetría de las distribuciones diamétricas correspondientes a cada zona.

TABLE 6. Estimated and observed tree density along with the statistics of the values of kurtosis and asymmetry of the diameter distributions corresponding to each zone.

Estadística	Zona seca	Zona Intermedia	Zona Húmeda
Densidad estimada (Árboles por hectárea)	458	321	548
Densidad observada (Árboles por hectárea)	506	428	585
Curtosis (Distribución estimada)	-1.47	-1.49	-1.47
Simetría (Distribución estimada)	0.38	0.31	0.36

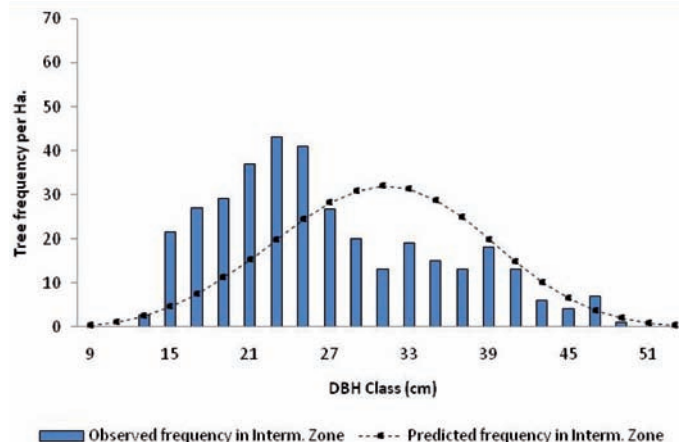


FIGURA 3. Distribuciones diamétricas estimadas y observadas utilizando las condiciones promedio del rodal en la zona intermedia.

FIGURE 3. Estimated and observed diameter distributions utilizing the average conditions of the stand in the intermediate zone.

En la zona intermedia (Figura 3), el promedio de las diferencias absolutas de las 14 clases por encima de 26.5 cm de DAP fue de 11 árboles. Para los árboles en las últimas siete clases, la diferencia absoluta media entre la distribución observada y la esperada fue de 37. La zona húmeda tiene 9 clases con sobrestimación y 13 clases donde el número de árboles es subestimada (Figura 4). La cantidad de árboles subestimados por las clases debajo de los 26.4 cm de DAP en esta zona es en promedio de 21 árboles, mientras que el promedio de diferencia absoluta de los árboles sobrestimados para las 13 clases por encima es de 12. En general, el modelo PMR-PCT subestima la cantidad de árboles en pequeñas clases de DAP para las tres zonas, mientras que sobrestima la cantidad de árboles en las clases altas de DAP. Los cambios en la distribución de diámetros de árboles son causados por el crecimiento de árboles y/o la mortalidad. Suponemos, en acuerdo con las observaciones de Bailey (1980), que la mortalidad no se produjo durante el breve período de siete años de observaciones. Entre los cuatro métodos empleados para obtener la predicción de la distribución Weibull para rodales de *P. occidentalis* en La Sierra, República Dominicana, el PRM-PCT obtuvo el mejor comportamiento sobre la base de la combinación de dos criterios de clasificación: las estadísticas de bondad de ajuste y en términos de predicción de rendimientos.

Los resultados en relación con el enfoque de PRM-PCT son coherentes con los resultados reportados por Liu *et al.*, (2004), que mostraron que el enfoque PRM-PCT superó el PPM en la predicción de distribuciones diamétricas de plantaciones de black spruce. En otro estudio realizado por Jiang y Brooks (2009), también se encuentra que el PRM-PCT produjo mejores estadísticas de bondad de ajuste que el método PRM-CDF. Por el contrario, en un estudio realizado por Cao (2004) en plantaciones de pino de incienso (*Pinus taeda* L.) el enfoque PRM-FCD fue el de mejor comportamiento.

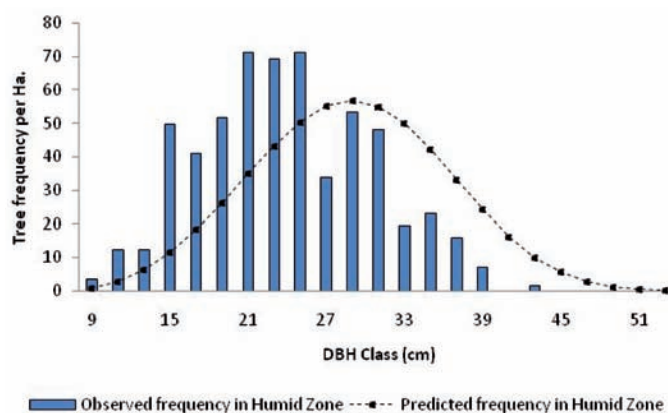


FIGURA 4. Distribuciones diamétricas estimadas y observadas utilizando las condiciones promedio del rodal en la zona húmeda.

FIGURE 4. Estimated and observed diameter distributions utilizing the average conditions of the stand in the humid zone.

obtain the prediction of the Weibull distribution for stands of *P. occidentalis* in La Sierra, Dominican Republic, the PRM-PCT obtained the best behavior over the base of the combination of two criteria of classification: the goodness-of-fit statistics and in terms of yield prediction.

The results in relation to the approach of PRM-PCT are coherent with the results reported by Liu *et al.* (2004), that showed that the PRM-PCT approach was superior to the PPM in the prediction of diameter distributions of black spruce plantations. In another study carried out by Jiang and Brooks (2009), it was also found that the PRM-PCT produced better statistics of goodness-of-fit than the PRM-CDF method. In contrast, in a study carried out by Cao (2004) in plantations of incense pine (*Pinus taeda* L.), the PRM-FCD approach exhibited the best behavior. Other methods have shown to be more advantageous than the probability density functions in reproducing the diameter distributions of forest stands (Borders *et al.*, 1987; Borders and Patterson, 1990; Maltamo *et al.*, 2000). These systems employ a percentile function with flexibility for reproducing multimodal stands. Nord-Larsen and Cao (2006) report that because the Weibull distribution is unimodal, it is inadequate for modeling multimodal distributions. The approach utilized by Borders *et al.* (1987) consists of 12 percentiles in the characterization of the distributions observed, compared with just 3 or 4 percentiles in the Weibull approach. However, the number of parameters in the Borders method makes it more complex, and as they point out, the assumption that a uniform distribution of tree frequency among adjacent percentiles may be too simplistic. The Weibull method should be the most appropriate.

The results reported by Zarnoch and Dell (1985) affirm that the estimators of PCT are biased, but with variances lower than the estimators MLE and MME. In our case we found that to estimate the volume (cubic meters ha⁻¹) of *P.*

Otros métodos han demostrado ser más ventajosos que las funciones de densidad de probabilidad en reproducir las distribuciones de diámetro de rodales forestales (Borders *et al.*, 1987; Borders y Patterson, 1990; Maltamo *et al.*, 2000). Esos sistemas emplean una función de percentil con flexibilidad para reproducir rodales multimodales. Nord-Larsen y Cao (2006) reportan que, debido a que la distribución de Weibull es unimodal, es inadecuada para modelar distribuciones multimodales. El enfoque utilizado por Borders *et al.*, (1987) consiste en 12 percentiles en la caracterización de las distribuciones observadas, comparados con tan sólo 3 o 4 percentiles en el enfoque Weibull. Sin embargo, el número de parámetros en el método de Borders hace que éste sea más complejo, y, como ellos destacan, el supuesto de una distribución uniforme de frecuencia de árboles entre percentiles adyacentes puede ser demasiado simplista. El método Weibull debería ser el más apropiado.

Los resultados reportados por Zarnoch y Dell (1985) afirman que los estimadores del PCT son sesgados, pero con varianzas menores que los estimadores MLE y MME. En nuestro caso encontramos que, para estimar el volumen (metros cúbicos ha⁻¹) de *P. occidentalis* en La Sierra, el enfoque de PRM-PCT es superior a la PRM-CDF, PPM MLE y PPM-MME en términos de EMC, sesgo, sesgo relativo y el índice de error (Cuadro 5).

La edad, altura promedio del 15 % de los árboles más altos (HT), los árboles por hectárea (APH), índice de sitio (IS) y el índice de densidad de rodal (IDR) son las características más adecuadas para predecir el diámetro medio y cuadrático, los que a su vez se utilizan para predecir los parámetros Weibull para el enfoque de recuperación de parámetros con la técnica estadística (PRM-PCT). Pueden proponerse Alternativas silvícolas para una especie determinada mediante la variación de las variables anteriores en el procedimiento de modelado.

Podemos decir que el nivel deseado de precisión no se alcanzó en el presente estudio, pero que obtuvimos la combinación de parámetros que producen niveles aceptables de precisión para el uso previsto para los modelos, que es de estimación. La precisión y la exactitud de las estimaciones de rendimiento dependen no sólo de las distribuciones de diámetro estimado por la función Weibull, sino también de la precisión y la exactitud de la relación entre la altura y el DAP y las ecuaciones de volumen. El sesgo en la estimación de volumen se puede considerar insignificante, a pesar de que un mayor nivel de precisión puede ser alcanzable. Reducciones significativas en el sesgo se notaron en las parcelas más grandes.

Shiver (1988) encontró que 50 árboles por parcelas de muestreo serían aceptables para la mayoría de trabajos de investigación que tratan de capturar la distribución del diámetro en plantaciones de pino Slash. Nord-Larsen y Cao (2006) afirman que las distribuciones de diámetro

occidentalis in La Sierra, the PRM-PCT approach is superior to the PRM-CDF, PPM MLE and PPM-MME in terms of EMC, bias, relative bias and the error index (Table 5).

Age, average height of 15 % of the highest trees (HT), trees per hectare (APH), site index (SI) and the stand density index (SDI) are the most adequate characteristics for predicting the mean and quadratic diameter, which in turn are utilized to predict the Weibull parameters for the approach of parameter recovery with the statistic technique (PRM-PCT). Forestry alternatives may be proposed for a determined species through the variation of the above variables in the modeling procedure.

We can say that the desired level of precision was not reached in the present study, but we obtained the combination of parameters that produce acceptable levels of precision for the foreseen use of the models, which is of estimation. The precision and exactness of the yield estimations depend not only on the diameter distributions estimated by the Weibull function, but also on the precision and exactness of the relationship between the height and the DBH and the equations of volume. The bias in the volume estimation can be considered insignificant, despite the fact that a higher level of precision may be achievable. Significant reductions in the bias were noted in the largest plots.

Shiver (1988) found that 50 trees per sampling plots would be acceptable for most of the investigation works that try to capture the diameter distribution in Slash pine plantations. Nord-Larsen and Cao (2006) affirm that the diameter distributions are affected by the spatial structure and the size of the plots. Working with even-aged beech stands in Denmark, they considered that plots of 0.40 hectares were relatively small and not realistic for sampling the hypothesized distribution. Our plots are generally small (0.0625 to 1.2500 ha) and had an average of 41 trees, with a single plot assigned to each stand. We agree with Nord-Larsen and Cao (2006), in that a better fit can be obtained with larger plots, but the number of plots should also be considered. Various plots of larger area distributed in each stand may be more effective in the task of capturing the diameter distribution of forest stands.

The analysis of variance of the Weibull parameters corresponding to the PRM-PCT model indicates statistically significant differences between the scale and form among the zones, with *p*-values of <0.0001 and 0.007, respectively. Rouvinena and Kuuluvainenb (2005) found clear differences in the forms of diameter distribution of *Pinus sylvestris* dominating natural forest stands in Finland. The mean values of the scale parameter (*b*) for the dry, intermediate and humid zones were 22.03, 28.09 and 25.30, respectively. The average values corresponding to the parameter of form (*c*) were 6.39, 5.94 and 6.57.

Simulated increases in the scale parameter (*b*) make the symmetry coefficient decrease to zero and

se ven afectadas por la estructura espacial y el tamaño de las parcelas. Trabajando con rodales coetáneos de hayas en Dinamarca, consideraron que parcelas de 0.40 hectáreas eran relativamente pequeñas y no realistas para muestrear la distribución real que puede ser ajustada por la función de distribución hipotetizada. Nuestras parcelas son generalmente de tamaño pequeño (0.0625 a 1.2500 ha) y tenían un promedio de 41 árboles, con una sola parcela asignada a cada rodal. Estamos de acuerdo con Nord-Larsen y Cao (2006), en que un mejor ajuste se puede obtener con parcelas más grandes. Pero también el número de parcelas debería considerarse. Varias parcelas de mayor área distribuidas en cada rodal pueden ser más eficaces en la tarea de capturar la distribución diamétrica de rodales forestales.

El análisis de varianza de los parámetros Weibull correspondientes al modelo PRM-PCT indica diferencias estadísticamente significativas entre la escala y forma entre las zonas, con valores-*p* de <0.0001 y 0.007, respectivamente. Rouvinena y Kuuluvainenb (2005) encontraron claras diferencias en las formas de distribuciones diamétricas de *Pinus sylvestris* dominando rodales de bosque natural en Finlandia. Los valores medios del parámetro escala (*b*) para las zonas seca, intermedia y húmeda fueron 22.03, 28.09 y 25.30, respectivamente. Los valores promedio correspondiente al parámetro de forma (*c*) fueron 6.39, 5.94 y 6.57.

Aumentos simulados en el parámetro de escala (*b*) hacen que disminuya el coeficiente de simetría a cero y el nivel de curtosis incrementa hacia el negativo, aumentando así la propagación de la distribución estimada. Los incrementos en el parámetro de forma producen un aumento en el índice de asimetría de la distribución, y el nivel de curtosis, que fue negativo, disminuye pero permanece negativo. Estos resultados son consistentes con otros estudios. Perry (1985) afirma que la distribución diamétrica de rodales de *Pseudotsuga menziesii* en las cascadas tiende a ser positiva sesgada cuando los árboles son relativamente pequeños, y se convierte cada vez más a negativa sesgada a medida que el tamaño del árbol promedio aumenta. El procedimiento tiene sentido ya que el parámetro de forma es un reflejo de la asimetría de la distribución. Cuando el parámetro de forma es igual a 3.6, la distribución es aproximadamente simétrica (normal). A medida que el parámetro de forma llega a ser grande, la varianza de la distribución disminuye y se vuelve simétrica (Vanclay, 2001).

CONCLUSIONES

Las frecuencias estimadas y observadas no coinciden bien en ninguna de las tres zonas de bosque en estudio. Por lo tanto, la densidad de árboles por clases de DAP es diferente entre la distribución observada y la esperada, aunque esto no se refleja en el análisis estadístico

the kurtosis level increases toward the negative, thus increasing the propagation of the estimated distribution. The increments in the form parameter produce an increase in the asymmetry index of the distribution and the kurtosis level, which was negative, decreases, but remains negative. These results are consistent with other studies. Perry (1985) affirms that the diameter distribution of stands of *Pseudotsuga menziesii* in the cascades tends to be positive biased when the trees are relatively small, and is converted more and more to negative biased as the average tree size increases. The procedure makes sense, given that the form parameter is a reflection of the asymmetry of the distribution. When the form parameter is equal to 3.6, the distribution is approximately symmetrical (normal). As the form parameter gets large, the variance of the distribution decreases and becomes symmetrical (Vanclay, 2001).

CONCLUSIONS

The estimated and observed frequencies do not coincide well in any of the three forest zones under study. Therefore, the tree density by classes of DBH is different between the observed and expected distribution, although this is not reflected in the statistical analysis that was carried out. Knowing what type of diameter distribution that can be expected in the diverse development stages of the stand is useful to determine the number and size of the trees to be used and conserved, this achieving the specified objectives of a residual stand. After the evaluation of the four methods for predicting the parameters of the pdf Weibull function, and taking into account the inherited limitations in the set of available data, it can be concluded that this probability density function (pdf) is flexible enough to describe the diameter distribution in stands of *P. occidentalis* located in the Dominican Republic, given that the plots are large enough to capture all of the diameter class in the stand.

The modeling of the diameter distribution in stands of *P. occidentalis* with the PRM-PCT approach seems to function with the adequate precision for prediction purposes. The procedure based on the iterative mathematics is a good alternative for modeling the stand diameter distributions, but the users should be conscious of its limitations. Due to these limitations, the model should be considered as a departure point, and with high potential for improvement.

ACKNOWLEDGEMENTS

This investigation was carried out thanks to important contributions of FONDOCYT, a research grant from the government of the Dominican Republic administered by the Ministerio de Educación Superior de Ciencia y Tecnología. Great minds should be recognized for their contributions to the successful finalization of this investigation. I would

realizado. Saber qué tipo de distribución de diámetro se puede esperar en las diversas etapas de desarrollo del rodal es útil para determinar el número y tamaño de los árboles a ser aprovechados y conservados, logrando así los objetivos especificados de un rodal residual. Después de la evaluación de los cuatro métodos para predecir los parámetros de la función pdf Weibull, y teniendo en cuenta las limitaciones heredadas en el conjunto de datos disponible, se puede concluir que esta función de densidad de probabilidad (pdf) es lo suficientemente flexible para describir la distribución diamétrica en rodales de *P. occidentalis* localizados en la República Dominicana, dado que las parcelas son lo suficientemente grandes para capturar todas las clases de diámetro en el rodal.

El modelado de la distribución de diámetro en rodales de *P. occidentalis* con el enfoque PRM-PCT parece funcionar con la precisión adecuada para propósitos de predicción. El procedimiento basado en las matemáticas iterativas es una buena alternativa para el modelado de las distribuciones de diámetro rodal, pero los usuarios deben ser conscientes de sus limitaciones. Debido a estas limitaciones, el modelo debe ser considerado como un punto de partida, y con mucho potencial de mejora.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación se llevó a cabo gracias a contribuciones importantes de FONDOCYT, una beca de investigación del gobierno de la República Dominicana administrada por el Ministerio de Educación Superior Ciencia y Tecnología. Grandes mentes deben ser reconocidas por sus contribuciones a la finalización con éxito de esta investigación. Quiero expresar mi gratitud a los miembros de mi comité de doctorado, el Doctor Ralph D. Nyland, el Doctor Lianjun Zhang y el Doctor Edwin H. White. Trabajar con este equipo de ensueño es una de esas raras oportunidades que vienen una vez en la vida.

LITERATURA CITADA

- BAILEY, ROBERT L.; DELL, T. R. 1973. Quantifying Diameter Distributions with the Weibull Function. *Forest Science* 19: 97-104.
- BAILEY, R. L. 1980. Individual Tree Growth Derived from Diameter Distribution Models. *Forest Science* 26: 626-632.
- BORDERS, B. E.; SOUTER, R. A.; BAILEY, R. L.; WARE, K. D. 1987. Percentile-Based Distributions Characterize Forest Rodal Tables. *Forest Science* 33: 570-576.
- BORDERS, B. E.; PATTERSON, W. 1990. Projecting Rodal Tables: A Comparison of the Weibull Diameter Distribution Method, a Percentile-Based Projection Method, and a Basal Area Growth Projection Method. *Forest Science* 36: 413-424.
- BUENO, S.; BEVILACQUA, E. 2009. *Underrodaling Growth and Yield of Pinus occidentalis in La Sierra, Dominican Republic*. State University of New York, College of Environmental Science and Forestry. 286 p.
- CAO, Q. V. 2004. Predicting parameters of a Weibull function for modeling diameter distribution. *Forest Science* 50: 682-685.

like to express my gratitude to the members of my doctoral committee, Doctor Ralph D. Nyland, Doctor Lianjun Zhang and Doctor Edwin H. White. Working with this dream team is one of those rare opportunities that happen once in a lifetime.

End of English Version

- DODSON, B. 1994. *Weibull Analysis*. ASQ Quality Press, Milwaukee, Wisconsin. 256 p.
- HOLDRIDGE, L. 1987. Ecología basada en zonas de vida. Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura, San José, Costa Rica. 304 p.
- JIANG, L.; BROOKS, J. R. 2009. Predicting Diameter Distributions for Young Longleaf Pine Plantations in Southwest Georgia. *Southern Journal of Applied Forestry* 33: 25-28.
- KNOEBEL, B. R.; BURKHART, H. E. 1991. A Bivariate Distribution Approach to Modeling Forest Diameter Distributions at Two Points in Time. *Biometrics*, 47: 241-253.
- LITTELL, R. C.; MILIKEN, G. A.; STROUP, W. W.; WOLFINGER, R. D. 1996. *SAS for Mixed Models*. SAS Institute Inc., Cary, North Carolina. 633 p.
- LIU, C.; ZHANG, S. Y.; YUANCAI, L.; NEWTON, P. F.; ZHANG, L. 2004. Evaluation of three methods for predicting diameter distributions of black spruce (*Picea mariana*) plantations in central Canada. *Canadian Journal of Forest Research*. 34: 2424-2432.
- MALTAMO, M.; KANGAS, A.; UUTTERA, J.; TORNIAINEN, T.; SARAMAÄKI, J. 2000. Comparison of percentile based prediction methods and the Weibull distribution in describing the diameter distribution of heterogeneous Scots pine rodals. *Forest Ecology and Management*. 133: 263-274.
- NANOS, N.; MONTEROS, G. 2002. Spatial prediction of diameter distribution models. *Forest Ecology and Management*. 161: 147-158.
- NORD-LARSEN, THOMAS; CAO, QUANG V. 2006. A diameter distribution model for even-aged beech in Denmark. *Forest Ecology and Management*. 231: 218-225.
- PERRY, D. A. 1985. The competition process in forest rodals. In *Attributes of Trees as Crop Plants*. Titus Wilson and Son Ltd, Kendal, Cumbria. 592 p.
- RATKOWSKY, D. A. 1990. *Handbook of Nonlinear Regression Models*. Marcel Dekker, Inc. 241p.
- REYNOLDS, M. R.; BURK, T. E.; HUANG, W. C. 1988. Goodness-of-fit tests and model selection procedures for diameter distribution models. *Forest Science* 34: 373-399.
- RICHARDS, F. J. 1959. A Flexible Growth Function for Empirical Use. *Journal of Experimental Botany*. Vol. 10(29): 290-300.
- ROUVINENA, S.; KUULUVAINEN, T. 2005. Tree diameter distributions in natural and managed old Pinus sylvestris-dominated forests. *Forest Ecology and Management* 208: 45-61.
- SAS INSTITUTE INC. 1990. *SAS/STAT User's Guide*. SAS Institute Inc., Cary, North Carolina. 213 p.
- SHIVER, B. D. 1988. Sample Sizes and Estimation Methods for the Weibull Distribution for Unthinned Slash Pine Plantation Diameter Distributions. *Forest Science* 34: 809-814.
- STAGE, A. R. 1963. A Mathematical approach to Polymorphic Site Index Curves For Grand Fir. *Forest Science* Vol. 9(2): 167-180.

- VANCLAY, J. K. 2001. Modeling Forest Growth and Yield, Applications to Mixed Tropical Forests. CABI Publishing. 312 p.
- WYCOFF, W. R.; CROOKSTON, N. L.; STAGE, A. R. 1982. User's Guide to the Rodal Prognosis Model. General Technical Report NT-133:112 p.
- ZARNOCH, S. J.; DELL, T. R. 1985. An evaluation of percentile y maximum likelihood estimators of Weibull parameters. *Forest Science* 31: 260–268.
- ZEIDE, B., 1989. Accuracy of equations describing diameter growth. *Canadian Journal of Forest Research*. 19: 1283–1286.
- ZHANG, L.; MOORE, J. A.; NEWBERRY, J. D. 1996. Evaluation of the prediction performance for eight nonlinear height-diameter equations. P. 447-448 in Proceedings of 1995 Society of American Foresters Annual Convention, Anonymous Society of American Foresters, Portland, Maine.