Uso de las funciones de supervivencia en las ciencias sociales y en los estudios de población. Aplicación al caso de México

Alejandro MINA-VALDÉS

El Colegio de México

Resumen

Este artículo presenta bases probabilísticas, estadísticas y matemáticas útiles para la obtención de funciones de supervivencia que se emplean en la descripción de la tendencia, por edad en el tiempo, a la extinción de una población. Luego de introducir las bases teóricas de dichas funciones, se lleva a cabo un ejercicio con datos de México que permiten la proyección de la estructura por edad de la mortalidad en este país. El hecho de que sea posible obtener tablas de mortalidad a corto y largo plazos, en las que se pueden cuantificar las ganancias en las esperanzas de vida que se tendrán en el futuro sirve, entre otras cosas, para la legislación sobre las edades de retiro de la población económicamente activa y la legislación sobre la conveniencia de ampliarlas y a cuántos años.

Palabras clave: funciones de supervivencia, probabilidad de muerte, probabilidad de supervivencia, fuerza de mortalidad, esperanza de vida, edad de retiro, México.

Abstract

Use of survival functions in social sciences and in population studies; application in the case of Mexico

This article presents useful probabilistic, statistical and mathematical bases to obtain survival functions employed in the description of the tendency by age in time, to the extinction of a population. After introducing the theoretical bases of said functions, an exercise with data for Mexico is carried out; these data allow projecting the structure by age of the mortality of this country. The fact of obtaining mortality rates for the sort and long terms, where the improvements of life expectancy for the future might be quantified works for, among other things, legislating on the retirement ages for the workforce and on the convenience of broadening them and how many years more.

Key words: survival functions, casualty probability, survival probability, mortality force, life expectancy, retirement age, Mexico.

Introducción

La obtención de funciones matemáticas que expliquen el impacto de los fenómenos demográficos ha sido una tarea que desde el siglo XIX y hasta la fecha se ha realizado de manera tal que hoy en día se tienen, en el campo actuarial y demográfico, avances que permiten confrontar diversas funciones para obtener ajustes que optimicen el comportamiento de variables como la mortalidad en poblaciones humanas.

En el presente trabajo se presentan las bases probabilísticas, estadísticas y matemáticas que dan lugar a la obtención de funciones de supervivencia que se emplean en la descripción de la tendencia por edad en el tiempo, de la forma en que se extingue una población. Así, en una primer instancia se presentan las bases teóricas de dichas funciones, para que en una segunda instancia se obtengan, para el caso de México, las funciones de ajuste que permiten, en última instancia, la proyección de la estructura por edad de la mortalidad en México.

Probabilidades de muerte y supervivencia

Sea X la variable aleatoria 'edad de muerte de un recién nacido', la cual es continua, y F es la función de distribución, entonces:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Siendo: $x > 0$ y $F(0) = 0$

Teniéndose que la probabilidad de que un recién nacido fallezca entre las edades x y $x + t$ es:

$$P(x < X \leq x+t) = F(x+t) - F(x)$$

Y la probabilidad de que un recién nacido sobreviva a la edad x,

$$P(X > x) = 1 - F(x)$$

Con la probabilidad de que una persona de edad x fallezca entre las edades x y $x + t$

$$P(x < X < x+t \mid X > x) = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)}$$

Si denotamos esta variable aleatoria por Y_x y por F_x a su función de distribución, entonces:

$$F_X(y) = P(Y_X \leq y) = \frac{F(y) - F(x)}{1 - F(x)},\ y \geq x$$

Siendo, obviamente, $F_x(y) = 0$ siempre que $y \leq x$, siendo suficiente conocer la función de distribución F de la edad de muerte de un recién nacido para conocer la función de distribución F_x.

Función de supervivencia

La función de supervivencia proporciona, para cualquier edad x, la probabilidad de que un recién nacido alcance la edad x, es decir,

$$s(x) = P(X \geq x) = 1 - F(x)$$

Con lo que, obviamente, s(0) = 1

$$P(x < X \leq x + t) = s(x) - s(x + t)$$

$$P(x < X \leq x + t \mid X > x) = F_x(x + t) = \frac{s(x) - s(x + t)}{s(x)}, t \geq 0$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = -\frac{d}{dx}s(x) = -s'(x)$$

Y dada (x), su 'vida residual' o 'vida futura', o también 'tiempo de vida hasta el fallecimiento', es una variable aleatoria que se representa por T_x, denotando por G_x su función de distribución, de modo que:

$$G_X(t) = P(T_X \leq t), t \geq 0$$

será la probabilidad de que una persona viva a la edad x fallezca en el transcurso de t años, es decir, antes de la edad $x + t$. Es claro que $T_x = Y_x - x$, siendo, pues, $T_0 = X$.

$$G_X(t) = F_X(x + t) = \frac{s(x) - s(x + t)}{s(x)}$$

Si T_x es una variable aleatoria continúa, su función de densidad está dada por:

$$g_X(t) = \frac{d}{dx}\left(\frac{s(x) - s(x + t)}{s(x)}\right) = -\frac{\frac{d}{dx}s(x + t)}{s(x)}$$

La variable aleatoria 'número de años completos hasta la muerte de una persona de edad *x*' es por definición discreta y se representa por K_x, teniéndose que:

$$P(K_X = k) = P(k < K_X \leq k+1), k = 0,1,2,...$$

Siendo:

$$P(K_X = k) = G_X(k+1) - G_X(k)$$

Fuerza de mortalidad

La fuerza de mortalidad se denota por *μ(x)* y define como:

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

Como sabemos que $f(x) = s`(x)$, se deduce que:

$$\mu(x) = -\frac{s'(x)}{s(x)} = -\frac{d}{dx}\ln(s(x))$$

La fuerza de mortalidad puede obtenerse como el límite del cociente entre la proporción de los fallecidos en tiempo *t*, *tqx*, por unidad de tiempo cuando *t* tiende a cero.

$$\mu(x) = \lim_{t \to 0} \frac{{}_tq_x}{t}$$

$$\mu(x+t) = \frac{f(x+t)}{s(x+t)}$$

$$\mu(x+t) = \frac{g_x(t)}{1 - G_x(t)}$$

Que puede interpretarse como la fuerza de mortalidad de (*x*) a la edad *x* + *t*.

Dado: $\mu(z) = -\frac{d}{dx}\ln(s(z))$, integrando se tiene:

$$\int_t^{x+t} \mu(z)dz = -\int_x^{x+t} \frac{d}{dz}\ln(s(z))dz$$

De donde se sigue que:

$$g_X(t) = -\frac{s'(x+t)}{s(x)}$$

$$-\int_t^{x+t} \frac{d}{dz}\ln(s(z))dz = \ln(s(x+t)) - \ln(s(x)) = \ln\left(\frac{s(x+t)}{s(x)}\right) = \ln({}_t p_x)$$

Por lo tanto,

$$ {}_t p_x = e^{-\int_x^{x+t}\mu(z)dz}$$

$$ {}_t q_x = 1 - e^{-\int_x^{x+t}\mu(z)dz}$$

Y haciendo el cambio de variable $s = z - x$ se tiene:

$$ {}_t p_x = e^{-\int_0^{t}\mu(x+s)ds}$$

$$ {}_t q_x = 1 - e^{-\int_0^{t}\mu(x+s)ds}$$

Despejando y derivando se deduce:

$$\mu(x+t) = -\frac{d}{dt}\ln({}_t p_x)$$

Funciones de supervivencia clásicas

Para un rango de edades no extenso existen múltiples funciones básicas que se pueden utilizar. La principal utilidad de estas funciones está en permitir estimar la mortalidad anual mediante su uso en las hipótesis de mortalidad intraintervalo. Con las estimaciones para cada año de edad se obtiene la tabla de mortalidad. Ésta utiliza valores enteros de x para los que se calcula su correspondiente valor según $S(x)$. La falta de valores intermedios para valores no enteros de x se resuelve estableciendo hipótesis de mortalidad o métodos de interpolación entre valores enteros consecutivos que permiten considerar el modelo completamente especificado para todos los valores positivos de x.

Algunas distribuciones de supervivencia clásicas coherentes con la evidencia empírica más utilizadas en la práctica son:

Ley de Moivre

Supone un comportamiento lineal, con la edad, de la función de supervivencia según una progresión aritmética no negativa pero decreciente:

$$l_x = a - b_x \quad con \quad b>0, \quad a = l(0), \qquad w = \frac{l(0)}{b}, \qquad , x \le \frac{l(0)}{b}$$

La fuerza de mortalidad que corresponde a la expresión anterior será:

$$\mu(x) = \frac{b}{l(0) - bx}$$

Se tiene una fuerza de mortalidad siempre creciente con la edad, lo que restringe su utilidad a los tramos altos de edad.

La probabilidad de muerte se obtendrá como $nqx = n \ \mu(x)$, esto es, directamente proporcional al tanto instantáneo de mortalidad o fuerza de mortalidad.

Primera ley de Dormoy

Supone una determinada forma de variación de la función de supervivencia, lo que equivaldrá a una función de supervivencia exponencial no negativa, decreciente y convexa respecto de la variable edad:

$$l(x+1) = b\ (x) \quad \text{con:} \quad 0 < b < 1 \quad \Rightarrow$$

$$l(x) = a\ b^x \quad \text{con:} \quad a = l(0) \ \ y \ \ b^x \to 0 \quad \text{si} \quad x \to w$$

La fuerza de mortalidad que corresponde a la expresión anterior será: $\mu(x) = -lnb$

Se tiene una fuerza de mortalidad constante respecto de la edad, lo que restringe su utilidad a intervalos cortos (interpolación entre dos edades enteras consecutivas, por ejemplo). Según las expresiones anteriores, se llega a probabilidades de muerte y de supervivencia de la forma:

$$_nq_x = 1 - b^n \quad \text{y} \quad _np_x = b^n$$

Que sólo dependen de la amplitud del intervalo considerado.

Segunda ley de Dormoy

Se modifica la primera ley para que aparezca la variable edad en la fuerza de mortalidad. Se elige un polinomio de primer grado que conduce a una fuerza de mortalidad creciente con la edad (no aplicable a personas jóvenes): $\mu(x) = a + b\,x$, con $b > 0$.

La función de supervivencia que corresponde a la expresión anterior será:

$$l(x) = l(0)e^{-\alpha}\; e^{\frac{b}{2}x^2}$$

Esto es, no negativa, decreciente y cóncava. Según las expresiones anteriores, se llega a probabilidades de muerte y de supervivencia que dependen de la amplitud del intervalo y de la edad considerada.

Tercera ley de Dormoy

Se modifica la primera ley para que aparezca la variable edad en la fuerza de mortalidad.

Se elige un polinomio de segundo grado**:** $\mu(x) = a + bx + cx^2$

La función de supervivencia que corresponde a la expresión anterior será:

$$l(x) = l(0)e^{-\alpha}\; e^{-\frac{b}{2}x^2} e^{-\frac{c}{3}x^3}$$

Las expresiones anteriores permiten más posibilidades aunque complican los cálculos de probables estimaciones.

Ley de Sang

Supone un comportamiento de la función de supervivencia geométrico respecto de la edad, junto con la existencia de otro factor diferente a la edad:

$$l(x) = a + k\, b^{x}$$

con: $0 < b < 1$, $a = -\dfrac{l(0)\, b^{w}}{1 - b^{w}}$, $k = \dfrac{l(0)}{1 - b^{w}}$

La fuerza de mortalidad que corresponde a la expresión anterior será:

$$\mu(x) = -\frac{b^{x} \ln b}{b^{x} - b^{w}} = -\frac{\ln b}{b^{w-x} - 1}$$

Se observa cómo la función de supervivencia es decreciente y convexa respecto de la edad. En realidad, supone una modificación de la primera ley de Dormoy que se consigue añadiendo un término constante en la función de supervivencia para recoger la influencia en la mortalidad de un factor distinto de la edad.

Ley de Gompertz

Se fundamenta en un determinado comportamiento del incremento de la fuerza de mortalidad:

$$\Delta\mu(x) = k\mu(x)\Delta x + O(\Delta x)$$

con $k = cte$, $O(\Delta x)$ $\inf init.$ si $\Delta x \to 0$

Se llega a una fuerza de mortalidad de la forma:

$$\mu(x) = c\, e^{kx}$$

La función de supervivencia que corresponde a la expresión anterior será:

$$l(x)=l(0)e^{\frac{c}{k}}e^{-\frac{c}{k}e^{kx}}$$

Las expresiones anteriores consideran la edad como la única causa de muerte (no incluye factores accidentales), siendo la fuerza de mortalidad siempre creciente con la edad, aspecto más relevante a edades altas.

Primera ley de Makeham

Se fundamenta en un determinado comportamiento del incremento de la fuerza de mortalidad que manifiesta la posible existencia de factores accidentales:

$$\Delta\mu(x)=k1\,\mu(x)\Delta x+k2\Delta x+O(\Delta x)$$

Se llega a una fuerza de mortalidad nunca decreciente, de la forma:

$$\mu(x)=-\frac{k_2}{k_1}+c\,e^{k_1\bullet x} \quad \text{con} \quad c>0, \quad k_1>0$$

La función de supervivencia que corresponde a la expresión anterior será:

$$l(x)=l(0)e^{\frac{c}{k_1}}e^{\frac{c}{k}e^{g}}e^{\frac{k_2}{k_1}x} \qquad \text{con} \qquad g=k_1x$$

Segunda ley de Makeham

Se fundamenta en la anterior, pero añadiendo a la fuerza de mortalidad otro sumando proporcional a la edad:

$$\mu(x)=-\frac{k_2}{k_1}+b\,x+c\,e^{k_1x}$$

La función de supervivencia que corresponde a la expresión anterior será:

$$l(x)=l(0)e^{\frac{c}{k_1}}e^{\frac{c}{k_1}e^{g}}e^{\frac{k_2}{k_1}x}e^{\frac{b}{2}x^2} \qquad \text{con} \qquad g=k_1x$$

Las expresiones anteriores permiten más posibilidades, aunque complican los cálculos de probables estimaciones.

Ley de Lazarus

Se introduce otro término en la primera ley de Makeham para ampliar su utilidad en edades no necesariamente altas:

$$\mu(x) = -\frac{k_2}{k_1} + c\ e^{k_1 x} + d\ e^{k_d x} \qquad \text{con} \qquad e^{k_d} < 1$$

La función de supervivencia que corresponde a la expresión anterior será:

$$l(x) = l(0)\, e^{\frac{c}{k_1}+\frac{d}{k_d}}\, e^{\frac{c}{k_1}e^{g}}\, e^{\frac{d}{k_d}e^{h}}\, e^{\frac{k_2}{k_1}x} \qquad g = k_1 x$$

con $g = k_1 x$, $h = k_d x$

Las expresiones anteriores permiten más posibilidades, aunque complican los cálculos de probables estimaciones.

Ley de Weibull

Se basa en la siguiente forma que, supone, sigue la fuerza de mortalidad:

$\mu (x) = kxn$ con: $k > 0, n > 0$

La función de supervivencia que corresponde a la expresión anterior será:

$$l(x) = l(0)\, e^{-\frac{k}{n+1}x^{n+1}}$$

Ley exponencial

Esta ley se basa en la suposición de que el tanto instantáneo de mortalidad es constante

$$\mu(x) = \mu x \geq 0$$

Teniendo en cuenta que la lógica nos impulsa a afirmar que la fuerza de mortalidad aumenta con la edad, esta ley sólo tendría validez en periodos cortos. La función de supervivencia asociada a esta ley será:

$$s(x) = e^{-\int_0^x \mu dz} = e^{-\mu x}$$

En cuanto a la vida residual, tenemos:

$$G_X(t) = {}_tq_x = 1 - e^{-\mu t}$$

Y su función de densidad:

$$g_X(t) = \frac{d}{dt} G_X(t) = \mu e^{-\mu t}$$

Tablas de mortalidad

Un hecho patente es que la probabilidad de que un individuo fallezca a una determinada edad depende no sólo de su edad, aspecto que hemos tratado previamente, sino también de otros aspectos como el sexo, su estado de salud general, sus antecedentes genéticos, el medio ambiente en el que desarrolla su vida, etc. Es evidente que la mortalidad aumenta con la edad, salvo para las edades infantiles. También se ha comprobado que la mortalidad femenina es menor que la masculina, cuando los demás factores son iguales. Las estadísticas y censos relativos a una población suelen agrupar la población por edades y sexo, pero no tienen en cuenta otros factores como el estado de salud o las condiciones generales de vida (exposición a factores de riesgo, antecedentes genéticos, entre otros). Sin embargo, si la población es suficientemente grande, el principal factor determinante de la mortalidad es la edad, por lo que previamente sólo se ha considerado la edad como factor determinante de la mortalidad. Se denomina población homogénea a una población que verifica esta propiedad, es decir, en la que el factor determinante de la mortalidad es la edad. En adelante consideraremos que las poblaciones con las que tratamos son homogéneas, como por ejemplo la población masculina o femenina en un determinado país o región. Una tabla de mortalidad, o de supervivencia, si se prefiere, contiene los aspectos fundamentales que permiten calcular las probabilidades de muerte y supervivencia en una población homogénea, a partir de los cuales se llevan a cabo los cálculos actuariales.

Resultados de la obtención de funciones de supervivencia al caso de México

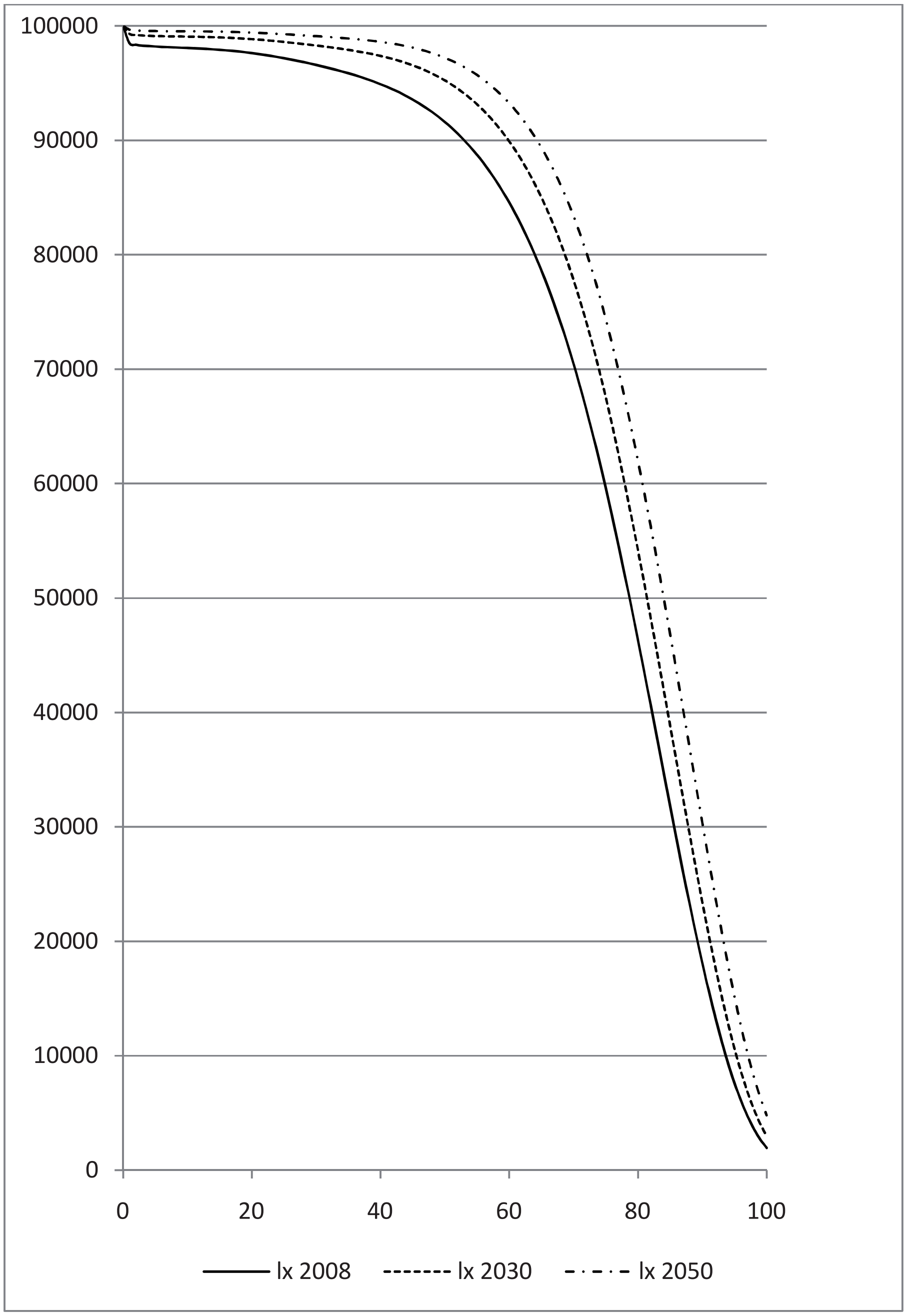
En el cuadro 1 y en la gráfica 1 se presentan las esperanzas de vida obtenidas, previa adquisición de las funciones de supervivencia, con base en las tablas de mortalidad conseguidas a partir de las proyecciones de los parámetros de las funciones de supervivencia para los años 2010, 2020, 2030, 2040 y 2050.

CUADRO 1
ESPERANZA DE VIDA PARA LA POBLACIÓN DE MÉXICO, 2008, 2010, 2020, 2030, 2040 Y 2050

	Esperanza de vida a edad x					
Edad x	2008	2010	2020	2030	2040	2050
0	74.91	75.23	76.89	78.62	80.20	81.65
5	71.27	71.50	72.83	74.31	75.70	77.01
10	66.36	66.58	67.89	69.35	70.73	72.03
15	61.46	61.68	62.95	64.39	65.76	67.05
20	56.63	56.84	58.07	59.49	60.83	62.10
25	51.88	52.08	53.26	54.63	55.94	57.19
30	47.18	47.36	48.48	49.80	51.06	52.28
35	42.52	42.68	43.72	44.98	46.20	47.38
40	37.92	38.06	39.01	40.21	41.38	42.52
45	33.43	33.55	34.41	35.53	36.63	37.72
50	29.09	29.19	29.95	30.98	32.01	33.04
55	24.94	25.02	25.67	26.62	27.57	28.52
60	21.04	21.09	21.63	22.48	23.34	24.20
65	17.43	17.46	17.88	18.62	19.37	20.13
70	14.15	14.16	14.48	15.10	15.74	16.39
75	11.25	11.33	11.50	12.00	12.52	13.05
80	8.74	8.76	8.93	9.32	9.72	10.14
85	6.58	6.62	6.72	7.00	7.29	7.59
90	4.72	4.74	4.80	4.98	5.16	5.35
95	3.01	3.02	3.04	3.12	3.20	3.28

Fuente: cálculos propios.

GRÁFICA 1
MÉXICO, FUNCIONES DE SUPERVIVENCIA 2008, 2030 Y 2050



Fuente: elaboración del autor.

Conclusiones

Las funciones de supervivencia son una herramienta útil en la descripción del impacto de la mortalidad. Con ellas se puede resumir en pocos parámetros a la tabla de mortalidad, en especial a la serie de sobrevivientes a edad exacta *x (lx)*, lo que adicionalmente permite, una vez que la tendencia histórica de dichos parámetros se tiene, proyectar el impacto de la mortalidad, obteniéndose las tablas de mortalidad a corto y largo plazo, pudiendo cuantificar las ganancias en las esperanzas de vida que en el futuro se tendrán, lo que sirve, entre otras cosas, para la legislación sobre las edades de retiro de la población económicamente activa y la legislación sobre la conveniencia de ampliarla, y hasta qué edad realmente hacerlo.

Anexo 1

Antecedentes históricos

Durante el siglo XVII la actividad comercial en Europa experimentó un extraordinario apogeo que propició una serie de innovaciones en el campo financiero-actuarial: valoración financiera a interés compuesto, aseguramiento de las naves y de sus cargas, seguros de vida, rentas de supervivencia, etcétera.

Durante los siglos XVII y XVIII se desarrollaron las bases fundamentales sobre las que se sustenta la matemática actuarial vida. Al respecto, destacamos como aportaciones más significativas las llevadas a cabo por los siguientes autores:

J. Graunt publicó en 1662 la primera tabla de supervivencia. Su trabajo tuvo una enorme repercusión y sus métodos estadísticos y análisis demográficos fueron adoptados de inmediato en Inglaterra, Francia, Holanda y Alemania.

E. Halley (1693) publicó un trabajo de gran repercusión, en donde proponía una metodología para construir una tabla de supervivencia a partir de una determinada experiencia. Además, introdujo un método de valoración actuarial de rentas de supervivencia que, en esencia, es el mismo que se utiliza en la actualidad.

A. de Moivre (1725), produjo el primer texto de matemática actuarial vida moderna. En él se proponen métodos de aproximación de tablas de supervivencia mediante funciones lineales definidas a tramos, así como métodos recurrentes de valoración actuarial de rentas de supervivencia.

A. J. Dodson (1755) le es atribuida la paternidad de la matemática actuarial. Su aportación principal consistió en valorar seguros de fallecimiento e introducir el concepto de provisión matemática.

N. Bernoulli estudió en 1709 la esperanza matemática de vida de un colectivo de asegurados y del último superviviente del mismo.

I. Graaf representó gráficamente por primera vez, en 1729, una función de supervivencia: *lx*.

N. Struyck (1740) construyó tablas de vida, por primera vez, separadas por sexos.

W. Kersseboom y A. Deparcieux elaboraron en 1746, por primera vez, una tabla de vida en Francia a partir de una experiencia observada.

P. Wargentin (1766) realizó un análisis de la mortalidad de la población sueca, a partir de la información recogida del periodo 1755-1763, en el cual llegaba a la conclusión que el colectivo femenino tenía menos mortalidad que el formado por la población masculina.

R. Price (1783) siguiendo la metodología iniciada por el anterior autor, elaboró unas tablas de mortalidad de hombres y mujeres a partir de la experiencia recogida entre los años 1757 y 1775. Posteriormente amplió su estudio al riesgo de invalidez. Su obra *Observations of Reversionary Payments* fue considerada como el texto de matemática actuarial vida más importante del momento.

E. Wigglesworth (1793) publicó la primera tabla de supervivencia en Estados Unidos.

J. D'Alembert (1761), D. Bernoulli (1766) y P. S. Laplace de (1812) estudiaron la tasa de inoculación de la enfermedad de la viruela y de la mortalidad.

Modelo de múltiples decrementos

A principios del siglo XIX persistían problemas que en el transcurso del mismo periodo se solucionaron, como:

- Hallar expresiones de las fuerzas de transición a las que se debe ajustar la experiencia observada para facilitar el proceso de inferencia estadística, y definir expresiones numéricas de las fuerzas de decrementos a partir de las observaciones de la población.

- Obtener una expresión generalizada aplicable a una operación con múltiples estados cualesquiera. Durante el siglo XIX se propusieron diferentes fórmulas matemáticas de la fuerza de fallecimiento, cuya utilización posterior se generalizó a otros decrementos. Citamos las aportaciones más relevantes.

B. Gompertz (1825) estableció que la fuerza de mortalidad crece exponencialmente. Su aportación, más conocida como ley de Gompertz, significó el inicio de una nueva era en la ciencia actuarial.

$$\mu_x = B \cdot C^x$$

W. M. Makeham (1867) propuso una ampliación de la fórmula de Gompertz que llevó por nombre primera ley de Makeham.

$$\mu_x = A + B \cdot C^x$$

Posteriormente añadió un término lineal a la anterior expresión, obteniendo como resultado una expresión conocida con el nombre de segunda ley de Makeham.

$$\mu_x = A + B \cdot x + C \cdot D^x$$

D. Lazarus, con la finalidad de mejorar la bondad de ajuste de las edades más jóvenes, agregó (en 1867) a la primera ley de Makeham un segundo término que respondía a una fórmula de Gompertz negativa.

$$\mu_x = A + B \cdot C^x + D \cdot E^{-x}$$

T. Thiele, matemático danés que en 1872 propuso una modificación de la ley de Makeham, sugirió una expresión con tres sumandos: una curva de Gompertz decreciente ($0 < B1 < 1$) para mejorar el ajuste de la mortalidad en la infancia, una curva normal para representar la mortalidad en las edades medias y una curva de Gompertz creciente ($B3 > 1$) para ajustar la mortalidad de las personas de edad más avanzada.

$$\mu_x = B_1 \cdot C_1^x + B_2 \cdot \exp\left(-\tfrac{1}{2} \left(\frac{x - C_2}{D_2} \right)^2 \right) + B_3 \cdot C_3^x$$

Con la finalidad de obtener valores observados de las fuerzas de decremento a partir de una experiencia determinada, T. B. Sprague (1879) desarrolló el siguiente estimador:

$$\mu_x \cong \frac{d}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)}$$

A mitad del siglo XIX, A. Cournot (1843), conjuntamente con el actuario inglés W. M. Makeham (1875), generalizó el modelo propuesto anteriormente por D'Alembert de dos causas de fallecimiento: por viruela, por otra causa distinta, a *n* causas de fallecimiento, estableciendo las relaciones fundamentales del modelo de múltiples decrementos.

$$\mu_x^k = (a\mu_x^k), \forall k = 1, \ldots, n$$

$$\left(a\mu_x^k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu_x^k$$

$$(ap)_x = \prod_{j=1}^{k}\left(1 - q_x^j\right) = \prod_{j=1}^{k} p_x^j$$

Obteniendo la función de supervivencia:

$$l_x = l_{x_0} \cdot e^{-\sum_{j=1}^{n}\int_{x_0}^{x}\mu_{x+t}^{j}\,dt}$$

E. Levi (1973) propone la siguiente expresión, que permite obtener las probabilidades independientes a partir de las dependientes:

$$q_x^j = \frac{\left(aq_x^j\right)}{1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\left(aq_x\right) - \left(aq_x^j\right)\right)}$$

Donde $\left(aq_x^j\right)$

representa la probabilidad anual y dependiente de fallecimiento entre las edades x y $x + 1$ por la causa j. Por su parte, $a\,q\,x$ representa la probabilidad dependiente de salida por cualquier causa entre las edades x y $x + 1$.

P. J. Richard (1946), H. Seal (1977) y H. U. Gerber (1990) establecen que la ley multiplicativa de probabilidades sólo es aplicable si las transiciones consideradas son mutuamente excluyentes entre sí, como, por ejemplo, sucede en una operación con múltiples causas de fallecimiento.

La modelización de operaciones con múltiples estados mediante el método de los decrementos permite generar tablas de decrementos. Al respecto, destacamos el trabajo de P. F. Hooker (1957) quien elaboró una tabla de múltiples causas de salida y de E. Zwinggi (1958), quien recogió las probabilidades asociadas a múltiples causas de salida de un colectivo. Por su parte, C. W. Jordan (1967) estudió las funciones actuariales correspondientes a los modelos con múltiples causas de salida, y S. Haberman (1983) introdujo la reversibilidad, para lo cual añade al modelo tradicional el tratamiento de los incrementos o entradas procedentes de otros estados de la operación.

J. Finlaison (1829) fue el primer actuario inglés empleado en la oficina de deuda pública de Inglaterra desde 1821 hasta 1851. Durante este periodo llevó a cabo el estudio de mortalidad más importante realizado hasta entonces, que abarcaba el periodo comprendido entre 1695 y 1789. Su estudio se plasmó en tablas de supervivencia, tanto simples como de varias cabezas, vigentes hasta finales del siglo XIX.

K. Hattendorff (1868) demostró que la varianza de la pérdida total de una póliza de vida se obtiene como suma de las varianzas de las pérdidas anuales sucesivas.

W. Woolhouse introdujo en 1869 un modelo actuarial continuo en el que los seguros por fallecimiento y las rentas de supervivencia se pagan de forma continua en el tiempo.

Anexo 2

La función de supervivencia

En las tablas anteriores sólo aparecen los valores de lx para valores enteros de x, pero lx podría definirse para cualquier valor real de x, denominándose a esta función la función de supervivencia. Se trata pues de una función real de variable real decreciente que corta al eje de ordenadas en l_0 y al eje de abscisas en w.

Previamente hemos denominado función de supervivencia a $s(x)$, que es la probabilidad de que un recién nacido alcance con vida la edad x.

Aunque esto parece una contradicción, el hecho es que l_x depende de la elección que se haga de lo (en la tabla l_0 = 100 000), luego en realidad lo que tendremos no es una función sino una familia de funciones, todas ellas proporcionales de entre las que $s(x)$ será una de ellas, concretamente aquélla para la que $l_0 = 1$ (recuérdese que $l_x = l_0\, s(x)$).

Veamos ahora lo que ocurre con el tanto instantáneo o fuerza de mortalidad en relación con la función de supervivencia. Hemos visto que: $\mu(x) = -s'(x)/s(x)$ y como:

$$s(x) = \frac{l_x}{l_0} \Rightarrow s'(x) = \frac{l'_x}{l_0}$$

De donde:

$$\mu(x) = -\frac{l'_x}{l_x} = -\frac{d}{dx}\ln(l_x)$$

Así pues, conocida la función de supervivencia, puede calcularse la fuerza de mortalidad, y recíprocamente, si se conoce la fuerza de mortalidad $\mu(x)$, se deduce que:

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^\infty \mu(z)dz}$$

Así, por ejemplo, en el caso de la ley exponencial, en el que la fuerza de mortalidad se supone constante, se tiene:

$$l_x = l_0 e^{-\mu x}$$

Si pensamos ahora en el caso de la ley de De Moivre, se tomaba:

$$\mu(x) = \frac{1}{\omega - \mathrm{x}}$$

De modo que:

$$l_x = l_0\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)$$

En lo que respecta a la ley de Makeham, se tiene que $\mu(x) = A + Bc^x$ con

$B > 0$, $c > 1$, $A \geq B$. La función de supervivencia s(x) era:

$$s(x) = s^x g^{c^x - 1}$$

con $s = e^{-A}$, $g = e^{-\frac{B}{\ln c}}$

Por lo tanto, la función de supervivencia tiene la expresión:

$$l_x = l_0 s^x g^{c^x - 1}$$

O lo que es lo mismo,

$$l_x = k s^x g^{c^x}$$ donde: $k = \dfrac{l_0}{g}$

Bibliografía

AYYUB, B.M., and R. H. MCCUEN, 2003, *Probability, statistics,reliability for engineers and scientists*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.

BAIZABAL, J. M., M. FURLAN-MAGARIL, J. SANTA-OLALLA, B. BENJAMIN y J. H. POLLARD, 1980, *The analysis of mortality and other actuarial Statistics*, Heinemann, Londres.

BORTZ, W. M., 2002, *A conceptual framework of frailty: a review,* J. Gerontol. Ser. A 57, M283–M288.

CARGILL, Sh. L., J. R. CAREY, H. G. MULLER, and G. ANDERSON, 2003, *Age of ovary determines remaining life expectancy in old ovariectomized mice*, Aging Cell 2.

COVARRUBIAS, L., 2003, “Neural stem cells in development and regenerative medicine”*,* en *Arch. Med. Res*., núm. 34.

D'ALEMBERT, 1761, *Sur l'application du calcul des probabiltiés à l'inoculation de la petite vérole*, Opuscules mathématiques 2, París.

GOMPERTZ, B., 1825, *On the nature of the fuction expressive of the law of human mortality, and on a New Mode if deternining the value of life contingencies*, Philosoplhical Transactions of Royal Society, vol. 115.

JORDAN, C. W., 1967, *Life contingencies.* The Society of Actuaries, Chicago.

MAKEHAM, W. M., 1867, “On the law of mortality”, en *Journal of hte Institute of Actuaries,* núm. 13.

MAKEHAM, W. M., 1875, “On an application of the theory of the composition of decremental forces”, en *Journal of the Institute of the Actuaries*, núm. 18.

MOIVRE DE, A., 1725, *Annuities on lives or the valuation of annuities upon any number*.

NAVARRO, E., 1991, *Tablas de mortalidad de la población 1982. Metodología y fuentes.* Editorial Mapfre, Madrid.

LISTNER, P. A., K. M. SAKANO *et al*., 2002, "Stochastic and genetic factors influence tissue-specific decline in ageing C. elegans", en *Nature*, núm. 419.

PELEG, M., M. D. NORMAND, y O. H. CAMPANELLA, 2003, "Estimating microbial inactivation parameters from survival curves obtained under varying conditions. The linear case", en *Bull. Math. Biol.*, núm. 65.

POLLARD, J. H., 1971, "The application of the Chi-Square test of goodness-of-fit to mortality data graduated by summation formulae", en *Journal of the Institute of Actuaries*, núm. 97.

RAUSAND, M., y A. HOYLAND, 2003, *System reliability theory: models, statistical methods, and applications*, Wiley-Interscience, Hoboken.

RICKLEFS, R. E., and A. Scheuerlein, 2002, *Biological implications of the Weibull and Gompertz models of aging*, J. Gerontol. Ser. A 57, B69–B76.

RIGDON, S. E., and A. P. BASU, 2000, *Statistical methods for the reliability of repairable systems*, John Wiley, Nueva York.

SCOTT, W. F., 1996, *Life contingencies*, Department of Actuarial Mathematics.

SPRAGUE, T.B., 1879, "On the construction of a combined marriage and mortality table from observations made as to the rates of marriage and mortality among any body of men", en *Journal of the Institute of Actuaries*, núm. 31.

WALLACE, W. H., and T.W. KELSEY, 2004, "Ovarian reserve and reproductive age may be determined from measurement of ovarian volume by transvaginal sonography", en *Human Reproduction*, núm. 19.

WEIBULL, W.A., 1939, "A statistical theory of the strength of materials", en *Ingeniorsvetenskapsakademiens Handlingar*, núm. 151.

WEIBULL, W.A., 1951, *A statistical distribution function of wide applicability*, J. Appl. Mech. 18.

WOOLHOUSE, W. S. B., 1867, "On the construction of tables of mortality", en *Journal of Institute of Actuaries*, vol. 13.

Alejandro MINA VALDÉS

Actuario y matemático por la Universidad Nacional Autónoma de México, maestro en Demografía por El Colegio de México. Profesor-Investigador de tiempo completo del Centro de Estudios Demográficos Urbanos y Ambientales de El Colegio de México de 1979 a la fecha, coordinador de la Maestría en Demografía de 2006 al 2009 en el Centro de Estudios Demográficos y de Desarrollo Urbano de El Colegio de México. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Entre sus publicaciones más importantes destaca: "Las causas de muerte en México y sus ganancias en las esperanzas de vida", en *Población, Ciudad y Medio Ambiente en el México Contemporáneo*, El Colegio de México, 2006. pp. 115-148.
Correo electrónico: amina@colmex.mx