El papel del consumo y el Estado en la reproducción
Una formalización de la teoría Torrens-Benetti

The role of consumption and the State in reproduction
A formalization of the Torrens-Benetti theory

*Salvador Ferrer Ramírez**

Resumen

Robert Torrens, economista clásico contemporáneo de David Ricardo, tiene una teoría de la reproducción con un alto grado de inestabilidad. En esta visión hay una estructura especial donde los insumos en cada uno de los sectores de la economía son proporcionales a la producción. Un sistema con esta estructura es lo que Torrens llama las "buenas proporciones". Este autor le asigna un papel importante porque es el único caso en que el sistema se reproduce en el largo plazo; en cualquier otra situación el sistema tiende a la crisis de sobreproducción. Para que el sistema pueda retomar una senda de crecimiento, Torrens propone la intervención de un agente central. En este trabajo construimos un modelo matemático, apoyados en la formalización que hace Carlo Benetti del concepto de demanda efectiva, en el cual incorporamos la actuación de un agente central que a través del consumo y un impuesto en especie elimina el excedente en la producción con el objetivo de que la economía pueda retomar una senda de crecimiento.

Palabras clave: crisis, reproducción, demanda efectiva, consumo, intervención.

Abstract

Robert Torrens, contemporary classical economist of David Ricardo, has a theory of reproduction with a high degree of instability. In this vision there is a special structure where the inputs in each of the sectors of the economy are proportional to production. A system with this structure is what Torrens calls the "good proportions". This author assigns him an important role because it is the only case in which the system reproduces in the long term; in any other situation the system tends to the crisis of overproduction. In order for the system to resume a path of growth Torrens proposes the intervention of a central agent. In this work we build a mathematical

* Profesor-investigador en el Departamento de Producción Económica, UAM-Xochimilco, México [sferrer@correo.xoc.uam.mx].

model, supported by Carlo Benetti's formalization of the concept of effective demand, in which we incorporate the action of a central agent that through consumption and a tax in kind eliminates the surplus in production with the objective that the economy can resume a path of growth.

Key words: crisis, reproduction, effective demand, consumption, intervention.

Artículo recibido: 12/02/2018
Apertura del proceso de dictaminación: 19/03/2018
Artículo aceptado: 31/ 07/2018

INTRODUCCIÓN

Uno de los temas que más se han discutido en la economía clásica y marxista es la crisis. Una obra que marcó el inicio de esta discusión fue el *Tratado de economía política*, de Jean Baptiste Say, cuya primera edición apareció en 1803. En el capítulo llamado "De los mercados", Say expresa –en forma muy imprecisa y a veces contradictoria– su idea sobre la sobreproducción y las crisis. Plantea que la producción engendra ingresos con los cuales se pueden comprar las mercancías; por tanto, la demanda total de la economía es igual a la oferta total, y solamente se pueden presentar sobreproducción de una mercancía y escasez de otra. La disminución de los precios en una industria y el incremento en otra, induciría a las empresas a desplazar la producción y los desequilibrios se corregirían automáticamente. Esta idea es conocida como la ley de Say.

David Ricardo acepta la ley de Say, argumentando que todo hombre produce para consumir o para vender y nunca vende si no es para comprar otra mercancía que le sea útil. De esta forma, los desajustes que se presentan en la oferta y la demanda de un producto se corrigen en el mercado. Este razonamiento niega la existencia de crisis generales de sobreproducción en el sistema.

Robert Malthus, contemporáneo de Ricardo, sostenía que la crisis era un fenómeno que se presentaba en el capitalismo y sus causas eran el exceso de ahorro de los capitalistas y el subconsumo de los trabajadores, cuyo salario era de subsistencia. Para absorber este excedente de mercancías proponía el incremento de la renta de los terratenientes para destinarla a gasto improductivo o contratar trabajadores. Los argumentos de Malthus fueron rebatidos por Ricardo, quien señalaba que toda renta, ya sea consumida o invertida, produce siempre una demanda igual de mercancías, aunque no se trate de la misma clase de mercancías; en consecuencia, la oferta y la demanda se ajustan globalmente.

Otro crítico de la ley de Say menos conocido es Robert Torrens, quien considera que el origen de la sobreproducción no es un problema de exceso de ahorro o de subconsumo como afirmaba Malthus. En el supuesto de que toda la producción se acumula, Torrens mide –a partir del concepto de *demanda efectiva*– la intensidad con la cual se realizan los intercambios de las mercancías en el mercado. La idea de reproducción de Torrens corresponde a una situación en donde los capitalistas pueden obtener los insumos necesarios para ampliar su proceso productivo en el periodo siguiente. Argumenta que las proporciones de la producción de las diferentes ramas son fundamentales para la reproducción; es decir, para que se pueda reiniciar el proceso productivo en el periodo siguiente. En cada periodo se determinan las tasas de acumulación, las cantidades y los precios para el periodo siguiente. Este enfoque plantea un marco único para el análisis del equilibrio y el desequilibrio, a diferencia de Ricardo, quien acepta la idea smithiana de la gravitación, la cual implica una ley distinta para el estudio de ambas situaciones.

En la perspectiva de Torrens, la oferta es igual a la demanda efectiva cuando los insumos totales de la economía son proporcionales a la producción de todos los sectores. Esto corresponde a una tasa de acumulación uniforme para todas las ramas. Un sistema con esta estructura se encuentra en lo que Torrens llama las “buenas proporciones”. Este autor les asigna un papel importante porque es el único caso en que el sistema se reproduce en el largo plazo; en cualquier otra situación el sistema tiende a la crisis de sobreproducción. Para que el sistema pueda retomar una senda de crecimiento, Torrens propone la intervención de un agente central, pero con una intervención mínima.

En este trabajo realizamos una exposición de los principales conceptos de la reproducción y la crisis de Robert Torrens; posteriormente exponemos su idea de intervención de agente central en la economía.

En su artículo “La teoría de la demanda efectiva en Torrens”,[1] Carlo Benetti formaliza las ideas de Robert Torrens, mismas que tomamos como punto de partida para, en el segundo apartado, explicar los resultados de las hipótesis de este trabajo, en particular, la formalización del caso homotético y las condiciones que garantizan que los factores de acumulación sean positivos.

En tercer término, se amplía el modelo de Benetti: suponemos aquí que una parte de la producción se acumula y otra se destina al consumo improductivo de los capitalistas. Esto, con el propósito de extraer una parte de la producción que se destina a la acumulación y, evitar así, la crisis de superproducción.

[1] Carlo Benetti, “La teoría de la demanda efectiva en Torrens”, *Análisis económico*, UAM-Azcapotzalco, 1985, pp. 21-60.

Para que el consumo desempeñe este papel, se requiere una coordinación de los agentes para decidir su propensión al ahorro, lo cual contradice el hecho de que éstos actúan de manera independiente. Por esta razón se requiere la intervención de un agente central que tome decisiones para evitar la crisis de sobreproducción. En este contexto, se propone el cobro de un "impuesto en especie" a los capitalistas. Como se conoce la técnica y los niveles de la producción, entonces se puede decidir el impuesto que se requiere para que el sistema se reproduzca el periodo siguiente. Finalmente, incluimos la actuación de un agente central, cuya única función es llevar el sistema hacia un crecimiento regular. La actuación de este agente, en estos dos casos, conduce a dos ideas diferentes de intervención en la economía. La primera, evita la crisis a partir de la imposición de un impuesto y su crecimiento no es máximo; la segunda, después de ubicar al sistema en el crecimiento regular, se retira, y el crecimiento que se obtiene es máximo por ser el caso homotético.

LA DEMANDA EFECTIVA EN TORRENS

Robert Torrens fue precisamente uno de los críticos de la ley de Say. Durante muchos años sus contribuciones fueron desconocidas, entre otras razones, por el impacto que tuvo David Ricardo en la disciplina y porque sus trabajos conocidos no eran los más relevantes. Por otra parte, Marx discute sobre su visión de la teoría del valor, pero no consideró su idea de la reproducción. Torrens presenta sus principales ideas sobre la reproducción a manera de ejemplos. Por estas razones, Joseph Schumpeter señala que hace falta un intérprete de los trabajos de Torrens para reconocer su importancia: "Torrens necesita un intérprete que haga por él lo que los ricardianos de 1890 hicieron por Ricardo. Mientras no aparezca un intérprete así y consiga realizar su tarea, será prematuro, por hablar cautamente, clasificarlo en la misma línea que Ricardo y que Malthus".[2]

Como las contribuciones de Torrens sobre la reproducción, la crisis y la intervención de un agente central son poco conocidas, a continuación se desarrollan las ideas relacionadas con la reproducción y la intervención. En la sección VI de *Sobre los principios de la oferta y la demanda*,[3] Torrens desarrolla un concepto que es central para la construcción de su idea de la reproducción: "La demanda efectiva consiste en el poder y la inclinación de dar por otra mercancía, ya sea de manera directa o por circuito de intercambio,

[2] Joseph Schumpeter, *Historia del análisis económico*, España, Ariel, 1982, pp. 550-551.
[3] Robert Torrens, *An Essay of the Production of Wealth*, Nueva York, A.M. Kelley, 1956.

una cantidad de las otras mercancías requeridas en su producción mayor que lo que realmente cuesta su producción".[4]

A partir de este concepto, Torrens deduce las condiciones de la crisis, entendida como la sobreproducción de mercancías. Un aspecto fundamental para la reproducción en un periodo, es que los capitalistas obtengan los insumos necesarios para realizar el proceso de producción en el periodo siguiente. Con la demanda efectiva se pretende medir qué tanto los capitalistas pueden adquirir los insumos para realizar su plan de producción. Esto significa que los capitalistas de una rama deben recurrir a los de otras para adquirir y vender sus productos.

La oferta es la cantidad de mercancías llevadas al mercado y susceptibles de ser vendidas. El crecimiento de una rama exige el de las demás, puesto que son éstas las que proveen los insumos necesarios. La demanda es la expresión de esta interdependencia, sin embargo, cada capitalista no conoce más que las condiciones de producción de su propia mercancía. En consecuencia, la demanda efectiva no puede ser anticipada. Por otra parte, Torrens señala el caso en el que el sistema puede reproducirse en el largo plazo: "La demanda efectiva y la oferta están en relación de igualdad cuando los ingredientes de capital ofrecidos en intercambio para las mercancías excedentes, por la tasa de ganancia acostumbrada y los ingredientes de capital gastados en su producción, también lo están".[5]

Cuando la oferta es igual a la demanda efectiva, el sistema se encuentra en "buenas proporciones". Esta estructura desempeña un papel central en su análisis, porque es el único caso en que el sistema se reproduce en el largo plazo. En cualquier otra situación, el sistema sólo se puede reproducir en algunos periodos y la dinámica conduce al sistema inevitablemente a la crisis de sobreproducción, lo cual muestra la inestabilidad del sistema. Por esta razón, Torrens propone la intervención de un agente central para evitar los cambios repentinos que pueden bloquear la reproducción de dicho sistema. En la medida en que el sistema se reproduce en el largo plazo sólo en el caso de las "buenas proporciones", el papel del agente central es intervenir para que el sistema se ubique en esta estructura.

La idea de Torrens no es limitar la iniciativa de los capitalistas ni la de una intervención excesiva, sino que propone una intervención mínima que evite los cambios repentinos para que el sistema pueda funcionar.

[4] *Ibid.*, p. 342.
[5] *Ibid.*, p. 360.

EL MODELO DE CARLO BENETTI

Durante mucho tiempo, los trabajos de Torrens sobre la reproducción eran prácticamente desconocidos. Es Carlo Benetti quien retoma hacia la década de 1980 el concepto de la demanda efectiva y construye una teoría dinámica de la reproducción. A partir de este concepto formaliza la idea de Torrens en la que el único caso donde el sistema se reproduce en el largo plazo es el homotético; en cualquier otra situación, el sistema tiende a la crisis de sobreproducción.

Por otra parte, Benetti considera que el sistema de precios de producción clásico no es el adecuado para estudiar la reproducción del sistema, porque una vez que la técnica de producción ha sido dada y se ha fijado una norma de distribución del excedente (uniformidad de la tasa de ganancia), los precios no cambian cualesquiera que sean las proporciones de las diferentes ramas productivas. Un sistema de esta naturaleza, que asocia a diferentes proporciones los mismos precios, está excluido de una teoría de los precios construida con base en la demanda efectiva.

En este contexto, Benetti formaliza y desarrolla las ideas de la reproducción de Torrens; podríamos decir que es el intérprete que le hacía falta a Torrens y uno de los primeros en reconocer la importancia de sus contribuciones. Además, construye un modelo único para el equilibrio y el desequilibrio, donde los precios dependen de las condiciones técnicas y del mercado.

En la idea de reproducción de Benetti, la gravitación de las magnitudes del mercado alrededor de su nivel natural está excluida porque, si el sistema se encuentra fuera de las "buenas proporciones", se tiende a la sobreproducción y el proceso dinámico diverge. En este sentido, el modelo que construye, siguiendo las indicaciones de Torrens, sólo tiene dos situaciones: reproducción equilibrada o la aparición de la crisis de sobreproducción en algunos periodos.

Esta situación no la pueden modificar los capitalistas porque, la conducta que ellos tienen es la de obtener su máxima acumulación y no tienen mecanismos de corrección que les permita pasar de una situación a otra.

• Desarrollo del modelo de Carlo Benetti

Hipótesis generales:

- La técnica de producción está dada y permanece invariable. Sea $A = (\alpha_{ij})$, donde α_{ij} es la cantidad de la mercancía i que se requiere para producir una unidad de la mercancía j.

- Los salarios que se suponen dados e invariables, están comprendidos como parte de los medios de producción.
- Todas las mercancías son medios de producción o medios de consumo, para las cuales la utilización productiva es el único uso posible.
- Todo el capital es circulante.
- El horizonte económico de los productores está limitado al periodo unitario y comprende tanto la producción como el intercambio.
- Hay rendimientos constantes a escala.

El periodo unitario comprende la producción y el intercambio. Podemos pensar que durante el día se lleva a cabo el proceso productivo y en la noche se realizan los intercambios. Con el resultado de los intercambios se inicia el proceso productivo al día siguiente.

La descripción de la actividad económica del periodo es como sigue. El vector

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \cdot \\ a_{ni} \end{pmatrix} q_i \quad i = 1, 2 \ldots n$$

representa los insumos de cada uno de los sectores que se requieren para producir q_i. Con q_i, el capitalista asiste al mercado ese mismo día en la noche. La intención es obtener una mayor cantidad de insumos que le permitan aumentar su capacidad productiva. Esto es:

$$(1+g_i)\begin{pmatrix} a_{1i}q_i \\ a_{2i}q_i \\ \cdot \\ a_{ni}q_i \end{pmatrix}$$

Donde g_i es la tasa de acumulación y $G_i = (1+g_i)$ es el factor de acumulación de los capitalistas de la rama *i*. El punto central es la determinación de los factores de acumulación G_i. Si $G_i > 0$. Si para cada rama *i*, el sistema se reproduce en el periodo. Si $G_i < 0$ para alguna rama *i*, habrá crisis de sobreproducción en el periodo.

Las tasas g_i son obtenidas como solución del siguiente sistema:

$$q_1 = a_{11}q_1(1+g_1) + a_{12}q_2(1+g_2) + ... + a_{1n}q_n(1+g_n)$$

$$q_2 = a_{21}q_1(1+g_1) + a_{22}q_2(1+g_2) + ... + a_{2n}q_n(1+g_n) \qquad (1)$$

$$q_n = a_{n1}q_1(1+g_1) + a_{n2}q_2(1+g_2) + ... + a_{nn}q_n(1+g_n)$$

Donde q_i es la producción y constituye la oferta, que es igual a los insumos que se requieren para la producción en el periodo siguiente y constituyen la demanda efectiva de todo el sistema.

Este sistema expresa únicamente la configuración de las cantidades al cerrarse el mercado en un periodo. En el sistema (1), como la técnica y las cantidades están dadas, las incógnitas del sistema son $(1+g_i)$; $i = 1, 2 \ldots n$..

Una vez que las g_i son conocidas, la condición de igualdad entre ingresos y compras en cada rama permite obtener los precios de mercado como sigue:

$$p_1 = (1+g_1)(p_1a_{11} + p_2a_{21} + ... + p_na_{n1})$$

$$p_2 = (1+g_2)(p_1a_{12} + p_2a_{22} + ... + p_na_{n2}) \qquad (2)$$

$$p_n = (1+g_n)(p_1a_{1n} + p_2a_{2n} + ... + p_na_{nn})$$

Como todo el excedente se acumula, entonces todas las ganancias se canalizan a la compra de insumos. Por otra parte, la técnica está dada y los rendimientos son constantes, por tanto, los nuevos insumos que cada capitalista va a adquirir son proporcionales a los utilizados en el periodo precedente. En consecuencia, las ganancias del capitalista de la rama i (i = 1, 2.., n) le permiten incrementar sus insumos a la tasa g_i que es, por tanto, igual a r_i.

El sistema homotético

Cuando los insumos son proporcionales a la producción se conoce como el sistema homotético. Esta condición es equivalente a tener una tasa de acumulación uniforme para todo el sistema. Este comportamiento se expresa en el siguiente sistema.

$$q_1^* = (1+g^*)(a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^* + \ldots..a_{1n}q_n^*)$$
$$q_2^* = (1+g^*)(a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^* + \ldots..a_{2n}q_n^*) \qquad (4)$$
$$q_n^* = (1+g^*)(a_{n1}q_1^* + a_{n2}q_2^* + \ldots..a_{nn}q_n^*)$$

Matricialmente lo expresamos como:

$$\overline{q^*} = (1+g^*)A\overline{q^*}$$

El vector $\overline{q^*}$ es precisamente el vector de Frobenius asociado con la matriz *A* y el valor propio es:

$$\lambda = \frac{1}{1+g^*}$$

Esta estructura de producción es fundamental, porque es el único caso en que se garantiza la reproducción permanente.

La condición de igualdad entre las ganancias y las compras de cada rama, para toda *i*, es como sigue:

$$(1+r^*)(p_1^*a_{1i} + p_2^*a_{2i} + \ldots. + p_n^*a_{ni}) = p_i^* = (1+g^*)(p_1^*a_{1i} + p_2^*a_{2i} + \ldots. + p_n^*a_{ni}) \quad (5)$$

De donde se deduce que los sistemas (4) y (5) son la formalización que hace Benetti de la igualdad entre la oferta y la demanda efectiva. La producción es "debidamente proporcionada" cuando hay tasa uniforme de acumulación. Cuando esto no sucede, una mercancía *i* no es demandada suficientemente; lo que significa que no existe precio positivo al cual toda su producción pueda ser vendida. La reproducción de la mercancía *i* para el periodo siguiente no es posible. Esto repercute en que los productores que venden a la rama *i*, no podrán hacerlo porque dicha rama no tiene ingreso. Por ello, la imposibilidad técnica de intercambio se transmite a otras mercancías y, de periodo en periodo, al conjunto de la economía: la sobreproducción se generaliza.

El aspecto central es ubicar el momento en que la desigualdad entre la oferta y la demanda efectiva engendra una evolución que desemboca en la sobreproducción de al menos una mercancía. Esta situación se analiza a partir del signo de los factores de acumulación. Si el factor de acumulación $G_1 < 0$, diremos que la rama no podrá vender toda su producción a un precio positivo, por tanto, la rama uno tiene sobreproducción. Si, $G_2 < 0$, la situación se presenta en la rama dos. A continuación se expone el análisis que hace Benetti para el caso de dos ramas.

El modelo para dos ramas

El sistema (1) reducido a dos mercancías es:

$$q_1 = a_{11}q_1(1+g_1) + a_{12}q_2(1+g_2) \qquad (6)$$

$$q_2 = a_{21}q_1(1+g_1) + a_{22}q_2(1+g_2)$$

Si, $q = \frac{q_1}{q_2}$, tenemos:

$$\begin{aligned} q &= a_{11}q(1+g_1) + a_{12}(1+g_2) \\ 1 &= a_{21}q(1+g_1) + a_{22}(1+g_2) \end{aligned} \qquad (7)$$

La solución del sistema (7) es:

$$(1+g_1) = \frac{qa_{22} - a_{12}}{q(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

$$(1+g_2) = \frac{a_{11} - qa_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Ahora, si se establece

$\beta_1 = \frac{a_{11}}{a_{21}}$; $\beta_2 = \frac{a_{12}}{a_{22}}$ y $G_i = (1+g_i)$; i = 1, 2 se obtiene:

$$G_1 = \frac{q-\beta_2}{qa_{21}(\beta_1-\beta_2)} \qquad (8)$$

$$G_2 = \frac{q-\beta_1}{a_{22}(\beta_2-\beta_1)}$$

Como la técnica de producción no cambia, los factores de acumulación de las dos mercancías dependen únicamente de la proporción q. Una vez que las tasas de acumulación son conocidas, el precio y la tasa de ganancia están determinados.

La reconstitución de las condiciones de producción y con ello la continuación de la actividad en el periodo siguiente, exige que los factores de acumulación sean positivos. Para ello, la solución del sistema (7) debe cumplir:

$$G_1 > 0 \qquad y \qquad G_2 > 0 \qquad (9)$$

Analizando los distintos casos de (8), para garantizar que se cumpla (9), tenemos:

$$i) \quad (q-\beta_2) > 0 \quad y \quad (\beta_1-\beta_2) > 0$$

$$ii) \quad (q-\beta_2) < 0 \quad y \quad (\beta_1-\beta_2) < 0$$

$$iii) \quad (q-\beta_1) > 0 \quad y \quad (\beta_2-\beta_1) > 0$$

$$iv) \quad (q-\beta_1) < 0 \quad y \quad (\beta_2-\beta_1) < 0$$

De (*i*) y (*iv*) obtenemos:

$$\beta_2 < q < \beta_1$$

De (*ii*) y (*iii*):

$$\beta_1 < q < \beta_2$$

Por tanto, las condiciones para que se cumpla (9) son:

$$a)\ \beta_2 < q < \beta_1 \qquad o \qquad b)\ \beta_1 < q < \beta_2 \qquad (10)$$

¿Qué pasa fuera del intervalo? Por ejemplo, en (*b*), si $q > \beta_2$, de (8) tenemos que $G_1 < 0$. En este caso diremos que la rama uno se encuentra en sobreproducción, lo cual significa que no hay precio positivo al cual toda su producción pueda ser vendida. Si $q < \beta_1$ de (8) tenemos que, $G_2 < 0$, entonces la sobreproducción ahora es en la rama dos. Analicemos con más detalle la condición (α):

$$\beta_2 < \beta_1 \quad \Leftrightarrow \frac{a_{12}}{a_{22}} < \frac{a_{11}}{a_{21}} \Leftrightarrow a_{12}a_{21} < a_{11}a_{22} \Leftrightarrow |A| > 0$$

Esto es, la condición (α) es equivalente a establecer que el determinante de la matriz A sea positivo; esto corresponde cuando la composición orgánica de la rama dos es menor que la de la rama uno, de manera análoga, la condición (*b*) es equivalente a pedir que el determinante sea negativo. Ahora analizaremos qué pasa con la estabilidad de los precios en los dos casos.

Si ambos factores de acumulación son positivos, los intercambios se realizan a un precio $\bar{p}$. Vamos a analizar qué pasa alrededor de este precio. Si para p cercanos a $\bar{p}$ hay una convergencia hacia $\bar{p}$, diremos que el precio es estable; en caso contrario, diremos que es inestable.

El proceso de ajuste de los precios es estable en el periodo, cuando el determinante de la matriz es negativo, porque si $\beta_1 < q < \beta_2$, los factores de acumulación son positivos y los intercambios se realizan con el precio $\bar{p}$. Sea p_1 el precio unitario de los bienes de la rama uno. Si $p_1 > \bar{p}$, la producción de la rama uno aumentará, pero los capitalistas de la rama dos no lo podrán absorber, por lo tanto, p_1 tendrá que bajar al nivel de $\bar{p}$. Si $p_1 < \bar{p}$, implica que la demanda de la rama uno es mayor que la oferta, por tanto, el precio sube al nivel de $\bar{p}$. En el caso del determinante positivo, el proceso de ajuste de los precios es inestable, porque si $p_1 > \bar{p}$, tenemos una disminución en la rama uno y un aumento de la producción de la rama dos; la oferta es menor que la demanda, por tanto, el precio p_1 aumenta. En vez de que el precio se aproxime al precio $\bar{p}$, se aleja. Por esta razón, en el análisis que realizaremos en los apartados siguientes, nos centraremos únicamente en el caso del determinante negativo.

El modelo dinámico

Si definimos $q_i\,(t+1) = q_i\,(t)\,(1+g_i(t))$; $i=1, 2$; el sistema (1) se transforma en:

$$q_1(t) = a_{11}q_1(t+1) + a_{12}q_2(t+1)$$

$$q_2(t) = a_{21}q_1(t+1) + a_{22}q_2(t+1) \qquad (11)$$

El sistema (11) matricialmente se escribe, como:

$$\bar{q}(t) = A\bar{q}(t+1)$$

La proporción de las producciones para el periodo $t+1$ está dada por:

$$\bar{q}(t+1) = \bar{q}(t)\frac{G_1(t)}{G_2(t)} \qquad (12)$$

Cuando, $G_1(t) = G_2(t)$, las dos ramas crecen a la misma tasa, por tanto, estamos en las "buenas proporciones" y

$$\bar{q}(t+1) = \bar{q}(t) = \overline{q^*}$$

para toda t. Esto corresponde al sistema homotético; donde $\bar{q}^*$ es el vector de Frobenius de la matriz A que tiene asociado el valor propio máximo

$$\lambda = \frac{1}{G^*}$$

Benetti demuestra que si el vector de producción inicial $q(0)$ se encuentra en la misma dirección que el vector de Frobenius q^*, el sistema se encuentra en crecimiento equilibrado, fuera de este caso, el sistema tiende a la sobreproducción.

EL MODELO CON CONSUMO

Como hemos visto, si toda la producción se destina a la acumulación, salvo en el caso homotético, el sistema tiende a una crisis de sobreproducción. Esto significa que tenemos un sistema inestable. Una posibilidad para disminuir la inestabilidad es incorporar el consumo improductivo. En este apartado incorporamos el consumo capitalista como una vía para extraer una parte de la producción de la acumulación. Esto se hace como una posibilidad para evitar la crisis de sobreproducción en el periodo siguiente.

Suponemos que el producto de los capitalistas está distribuido de la siguiente manera.

$$q_i(t) = \alpha_i(t)q_i(t) + (1-\alpha_i(t))q_i(t) \quad i = 1,2$$

Donde $\alpha_i\,(t)$ es la propensión al ahorro de los capitalistas de la rama i en la fecha t, y $(1 - \alpha_i\,(t))$ es la propensión al consumo; $0 \leq \alpha_i(t) \leq 1$.

El primer sumando de la igualdad anterior, representa la parte del producto que los capitalistas de la rama i destinan a la acumulación; el segundo, la parte que se destina al consumo improductivo. El sistema que obtenemos cuando sólo una parte del producto se destina a la acumulación es:

$$\alpha_1 q_1 = a_{11}q_1\overline{G}_1 + a_{12}q_2\overline{G}_2 \qquad (13)$$

$$\alpha_2 q_2 = a_{21}q_1\overline{G}_1 + a_{22}q_2\overline{G}_2$$

Si $\alpha_i = 1$, no hay consumo improductivo; en este caso, todo lo que se produce se acumula. Si $\alpha_1 = 0$, implica que $a_{11} = a_{12} = 0$ y tendríamos una sola ecuación con dos grados de libertad, lo que implica una infinidad de soluciones para el sistema (13). Sucede lo mismo para el caso de $\alpha_2 = 0$. Por esta razón se supone que $0 < \alpha_i \leq 1$, para $i = 1, 2$. Económicamente esto significa que los dos bienes son de doble uso, a la manera clásica y no al modo de Marx. En el modelo con consumo, una parte de la producción se retira de la acumulación, por lo tanto, la tasa de acumulación g_i es menor que la tasa de ganancia r_i; $i = 1, 2$.

La solución del sistema (13) es:

$$\overline{G_1} = \frac{q\alpha_1 a_{22} - a_{12}\alpha_2}{q(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$
$$\overline{G_2} = \frac{a_{11}\alpha_2 - q\alpha_1 a_{21}}{q(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \qquad (14)$$

Si hacemos las siguientes sustituciones en (14):

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}; \beta_1 = \frac{a_{11}}{a_{21}} \text{ y } \beta_2 = \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

Obtenemos:

$$\overline{G_1} = \frac{\alpha_2(q\bar{\alpha} - \beta_2)}{qa_{21}(\beta_1 - \beta_2)} \qquad (15)$$

$$\overline{G_2} = \frac{\alpha_2(q\bar{\alpha} - \beta_1)}{a_{22}(\beta_2 - \beta_1)}$$

Ahora, tenemos que garantizar las condiciones bajo las cuales $\overline{G_1}$, $\overline{G_2}$ de (15) sean positivos. O sea:

$$\overline{G_1} > 0 \quad y \quad \overline{G_2} > 0 \qquad (16)$$

Esta condición implica los siguientes casos:

$$i) \quad (q\bar{\alpha} - \beta_2) > 0 \quad y \quad (\beta_1 - \beta_2) > 0$$

$$ii) \quad (q\bar{\alpha} - \beta_2) < 0 \quad y \quad (\beta_1 - \beta_2) < 0$$

$$iii) \quad (q\bar{\alpha} - \beta_1) > 0 \quad y \quad (\beta_2 - \beta_1) > 0$$

$$iv) \quad (q\bar{\alpha} - \beta_1) < 0 \quad y \quad (\beta_2 - \beta_1) < 0$$

De (i) y (iv) obtenemos:

$$\beta_2 < q\bar{\alpha} < \beta_1 \qquad (17)$$

De (ii) y (iii)

$$\beta_1 < q\bar{\alpha} < \beta_2 \qquad (18)$$

Como se ha mostrado antes, en el modelo de Benetti el ajuste de precios es estable en el periodo cuando el determinante es negativo; esto se cumple en la condición (18).

El papel del consumo en el intervalo con tasas de acumulación positivas

Analicemos el papel del consumo en (18). Tenemos que

$$\bar{\alpha}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

donde α_i es la proporción del producto que los capitalistas destinan a la acumulación de la rama i y $(1-\alpha_i)$ es la proporción que se destina al consumo improductivo; $i = 1, 2$. Si α_1 es cercano a uno, el consumo capitalista es muy pequeño en la primera rama; para α_1 cercano a cero, el consumo es muy grande. De igual forma, se presenta el consumo improductivo en la segunda rama. Esto significa que si conocemos la parte del producto que los capitalistas destinan a la acumulación, el consumo está determinado. Por esta razón, haremos el análisis sobre el consumo en términos de α_i.

Hay varias situaciones que se presentan con la incorporación del consumo en el modelo de Benetti. Como el sistema es inestable, realizaremos nuestro análisis para q cercanos a q^*, que es la proporción de crecimiento equilibrado de V. Neumann.

Veamos: si $\beta_1 < q < \beta_2$, queremos saber qué pasa con $\beta_1 < \bar{\alpha}q < \beta_2$.

Si α_1 es cercano a uno, tendremos un consumo bajo en la primera rama; si α_2 es cercano a cero, tendremos un consumo alto en la segunda rama, entonces $\bar{\alpha}$ será muy grande y por lo tanto $\bar{\alpha}q > \beta_2$, de (15) deducimos que $\bar{G}_1 < 0$. En consecuencia, en la primera rama se genera una sobreproducción. Si α_1 es cercano a cero, tendremos un consumo alto en la primera rama y si α_2 es cercano a uno, tendremos un consumo bajo en la segunda rama; por consiguiente $\bar{\alpha}$ sería pequeño y tendríamos $q\bar{\alpha} < \beta_1$ de (15), entonces, podemos deducir que $\bar{G}_2 < 0$ y habría sobreproducción en la segunda rama. Si en una de las ramas hay consumo bajo y en la otra hay consumo alto, se genera la sobreproducción en la rama del consumo bajo. Entonces, para que $\bar{\alpha}q$ se mantenga dentro del intervalo donde los factores de acumulación son positivos, necesitamos que la proporción que destinan los capitalistas a la acumulación en las dos ramas cumpla la siguiente condición:

$$\frac{\beta_1}{q} < \bar{\alpha} < \frac{\beta_2}{q} \qquad (19)$$

Esto significa que el consumo de los capitalistas puede evitar la crisis en el periodo siguiente, siempre y cuando haya una coordinación entre ellos para decidir qué parte del producto destinan a la acumulación y cuál al consumo.

Ahora analizaremos qué ocurre cuando $q(t) < \beta_2$, pero es cercano a β_2. Esto significa que $q_1(t)$ es mayor relativo a $q_2(t)$, y si toda la producción se acumula, habría crisis de sobreproducción en la segunda rama en el periodo siguiente, porque tendríamos $q(t+1) < \beta_1$.

Para evitar la crisis, los capitalistas de la rama uno deberían sacar una parte de su producción a través del consumo improductivo y los capitalistas de la rama dos destinar toda su producción a la acumulación. Para representar esta situación, tenemos que $(1 - \alpha_1(t))q_1(t)$ es la parte de la producción que los capitalistas de la rama uno destinan al consumo improductivo en el periodo t y $\alpha_2(t) = 1$. Esto significa que los capitalistas de la rama uno sí realizan un consumo improductivo y los de la rama dos, no. Entonces, los capitalistas de la rama uno deberían realizar un consumo improductivo $(1 - \alpha_1(t))q_1(t)$ para que el sistema se reproduzca al periodo siguiente; esto es: $\beta_1 < q(t+1)$.

De la misma forma, si $\beta_1 < q(t)$ y cercano a β_1, tendríamos que $q_2(t)$ es mayor que $q_1(t)$, y si todo se acumula habría crisis de sobreproducción en el periodo, $t+1$ en la rama uno, porque $q(t+1) > \beta_2$. Para evitar la crisis, los capitalistas de la rama dos tendrían que sacar una parte de la producción y decidir un consumo $(1 - \alpha_2(t))q_2(t)$, tal que $q(t+1) < \beta_2$.

Entonces, si $q(t)$ se encuentra cercano a q^* del sistema homotético, se necesita que el consumo improductivo de ambas ramas cumpla con (19). Si $\beta_1 < q(t)$, sólo se requiere el consumo improductivo de la segunda rama para evitar la crisis en el periodo siguiente; si $q(t) < \beta_2$, se necesita el consumo improductivo sólo de la rama uno.

En resumen, para que el consumo improductivo desempeñe de manera efectiva su papel de evitar la crisis en el periodo siguiente, se requiere una coordinación entre los capitalistas de ambas ramas para decidir la parte del producto que destinan a la acumulación y aquella que destinan al consumo; lo cual es incompatible con la descentralización, ya que ellos toman sus decisiones de manera independiente.

Concluimos este apartado señalando que, para evitar la crisis en el periodo siguiente, se necesita la actuación de un agente central que tome decisiones sobre la producción.

EL MODELO CON UN "IMPUESTO EN ESPECIE"

Un sistema donde la conducta de los agentes está basada en obtener la máxima acumulación, salvo el de las "buenas proporciones", conduce a la crisis de sobreproducción. Esto significa que tenemos un excedente de mercancías que no son demandadas. Por tanto, para que el sistema se pueda reproducir, se necesita destinar una parte de ese excedente a fines distintos de la acumulación y de esta forma el sistema se pueda reproducir. Para que el consumo improductivo desempeñe ese papel se necesita una coordinación entre los capitalistas de ambas ramas pero, nuevamente, esto contradice el hecho de que ellos actúan de manera independiente. Por tanto, se necesita un agente central que pueda tomar esa decisión. Proponemos un "impuesto en especie" que el agente central cobra a los capitalistas.

En este contexto, la producción tiene la siguiente estructura:

$$q_i = (1-\mu_i)q_i + \mu q_i \quad i = 1,2$$

$$\text{Con } 0 \leq \mu_i \leq 1$$

Donde el primer sumando de la igualdad representa la parte del producto que se destina a la acumulación; el segundo, el "impuesto en especie" que aplica el agente central a los capitalistas de la rama *i*. El sistema que obtenemos con la parte de la producción que se destina a la acumulación es:

$$(1-\mu_1)q_1 = a_{11}q_1(1+g_1) + a_{12}q_2(1+g_2) \qquad (20)$$

$$(1-\mu_2)q_2 = a_{21}q_1(1+g_1) + a_{22}q_2(1+g_2)$$

Si, $\mu_i = 0$, no hay impuesto en especie; todo lo que se produce se acumula.

Si $\mu_i = 1$, el sistema tendría una infinidad de soluciones, por esto pedimos que $0 \leq \mu_i < 1$; $i = 1, 2$.

Recordando:

$$\beta_1 = \frac{a_{11}}{a_{21}} \text{ y } \beta_2 = \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

La solución de (20) es:

$$\overline{G_1} = (1-\mu_1)\frac{(q-\beta_2)}{qa_{21}(\beta_1-\beta_2)} \qquad (21)$$

$$\overline{G_2} = (1-\mu_2)\frac{(q-\beta_1)}{a_{22}(\beta_2-\beta_1)}$$

Como podemos observar, son las mismas soluciones que obtiene Benetti en su modelo, modificadas por el factor $(1-\mu_i)$; $i = 1, 2$.

El papel del "impuesto en especie" para evitar la crisis

Hay varias situaciones que se presentan con la incorporación del impuesto. Si tenemos:

$$\beta_1 < q(t) < \beta_2$$

Como el agente central conoce la técnica y los niveles de producción de ambas ramas, puede saber si en el periodo siguiente se produce crisis de sobreproducción en una de las ramas. Entonces, el agente central puede calcular el impuesto que le tendría que aplicar a una de las ramas en el periodo t, para que en el periodo $t+1$ no haya crisis.

Si $\beta_1 < q(t) < \beta_2$ y q_1 es relativamente mayor a q_2, entonces el agente central podría calcular el impuesto μ_1 que tendría que aplicar en el periodo t a la rama uno, para que al periodo siguiente no haya crisis. Esto significa que, $\beta_1 < q(t+1) < \beta_2$.

$$\text{Si} \qquad \bar{q}(t) = \frac{\mu_1(t)q_1(t)}{q_2(t)} = \mu_1(t)q(t)$$

entonces el problema que tiene que resolver el agente central es calcular μ_1, para que cumpla con:

$$\bar{q}(t+1) = \bar{q}(t)\frac{\overline{G_1}(t)}{\overline{G}_2(t)} = \mu_1(t)q(t)\frac{\overline{G}_1(t)}{\overline{G}_2(t)} \qquad (22)$$

$$\text{tal que} \qquad \bar{q}(t+1) > \beta_1$$

Por tanto, el agente central necesita calcular los factores de acumulación para $\bar{q}(t)$ y se cumpla $\bar{q}(t+1) > \beta_1$. Sustituyendo $\bar{q}(t) = \mu_1(t)q(t)$, en (22) obtenemos:

$$\bar{q}(t+1) = \bar{q}(t)\frac{\overline{G_1}}{\overline{G_2}} = \mu_1(t)q(t)\left[\frac{\dfrac{\mu_1 q(t) - \beta_2}{\mu_1 q(t) a_{21}(\beta_1 - \beta_2)}}{\dfrac{\mu_1 q(t) - \beta_1}{a_{22}(\beta_2 - \beta_1)}}\right] \Leftrightarrow$$

$$\bar{q}(t+1) = \mu_1(t)q(t)\frac{(\mu_1(t)q(t) - \beta_2)a_{22}(\beta_2 - \beta_1)}{\mu_1(t)q(t)a_{21}(\beta_1 - \beta_2)(\mu_1(t)q(t) - \beta_1)}$$

Simplificando tenemos:

$$\bar{q}(t+1) = \frac{a_{22}(\beta_2 - \mu_1(t)q(t))}{a_{21}(\mu_1(t)q(t) - \beta_1)}$$

Ahora queremos:

$$\bar{q}(t+1) > \beta_1$$

$$\frac{a_{22}(\beta_2 - \mu_1(t)q(t))}{a_{21}(\mu_1(t)q(t) - \beta_1)} > \beta_1 \Leftrightarrow$$

$$a_{22}(\beta_2 - \mu_1(t)q(t)) > \beta_1 a_{21}(\mu_1(t)q(t) - \beta_1) \Leftrightarrow$$

$$a_{22}\beta_2 + a_{21}\beta_1^2 > \mu_1(t)q(t)a_{22} + \beta_1 a_{21}\mu_1(t)q(t) \quad \Leftrightarrow$$

$$\mu_1(t) < \frac{\beta_2 a_{22} + \beta_1^2 a_{21}}{q(t)(\beta_1 a_{21} + a_{22})}$$

Con el cálculo de $\mu_1(t)$ por parte del agente central, se puede garantizar $\bar{q}(t+1) > \beta_1$.

Si ahora $q_2(t)$ es relativamente mayor a $q_1(t)$, entonces el impuesto se carga a la rama dos. El agente central puede calcular $\mu_2(t)$, tal que si

$$\bar{q}(t) = \frac{q_1(t)}{\mu_2(t)q_2(t)} = \frac{q(t)}{\mu_2(t)}$$

entonces queremos que:

$$q(t+1) = \frac{q(t)}{\mu_2(t)} \frac{\bar{G}_1(t)}{\bar{G}_2(t)}$$

tal que $q(t+1) < \beta_2$. De la misma manera que en el caso anterior, despejando $\mu_2(t)$ obtenemos:

$$\mu_2(t) < \frac{q(t)(\beta_2 a_{21} + a_{22})}{\beta_2(a_{22} + \beta_1 a_{21})}$$

Así, cuando tenemos $\beta_1 < q(t) < \beta_2$, la función del agente central es evitar la crisis imponiendo el "impuesto en especie" a la rama que la causa. Los recursos que el agente central obtiene por el "cobro" de este impuesto los puede destinar a gasto social como escuelas, hospitales, vivienda, etcétera. Dado que el sistema es inestable y fuera del caso homotético se presenta la sobreproducción, el agente central debe actuar sobre $q(t)$, que se encuentra dentro del intervalo donde las tasas de acumulación son positivas, para que en el periodo siguiente no haya crisis.

En conclusión, una economía que está orientada hacia la obtención de la máxima acumulación tiene como resultado la crisis de sobreproducción. El papel del agente central es evitar la crisis sacando una parte de la producción por medio del impuesto y destinar estos recursos al gasto social.

Ejemplo numérico

Sea una economía con dos sectores: el primero produce trigo (*t*) y el segundo hierro (*h*). La estructura productiva de la economía es la siguiente:

$$2t \oplus 3h \rightarrow 10t$$
$$4t \oplus 1h \rightarrow 5h$$

Esto significa que el primer sector requiere 2 unidades de trigo y 3 unidades de hierro para producir 10 unidades de trigo; el segundo sector requiere 4 unidades de trigo y una unidad de hierro para producir 5 unidades de hierro. Con esta información construimos la matriz de insumos unitarios.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{10} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$|A| = -\frac{2}{10}; \quad q(t) = \frac{4}{5}; \quad \beta_1 = \frac{2}{3}; \quad \beta_2 = 4$$

$q(t)$ es la proporción en el periodo t. De (21), tenemos que los factores de acumulación son:

$$G_1 = \frac{16}{5} \quad G_2 = \frac{1}{5}$$

Si toda la producción se acumula tenemos:

$$q(t+1) = \frac{4}{5}\frac{G_1}{G_2} = \frac{4}{5}\left(\frac{\frac{16}{5}}{\frac{1}{5}}\right) = \frac{64}{5}$$

Tenemos $q(t+1) > \beta_2$, lo cual significa crisis de sobreproducción en la rama dos. Esto lo conoce el agente central y decide actuar imponiendo un impuesto a la rama dos en el periodo t. Entonces el impuesto que tiene que aplicar es:

$$\mu_2(t) = \frac{\frac{4}{5}\left[4\left(\frac{3}{10}\right) + \frac{2}{10}\right]}{4\left[\frac{2}{10} + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{10}\right)\right]} = \frac{\frac{4}{5}\left(\frac{14}{10}\right)}{4\left(\frac{4}{10}\right)} = \frac{\frac{4}{5}\left(\frac{7}{5}\right)}{\left(\frac{16}{10}\right)} = \frac{\frac{4}{5}\left(\frac{7}{5}\right)}{\left(\frac{8}{5}\right)} = \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{7}{10}$$

$$\text{Con} \quad \mu_2(t) < \frac{7}{10}$$

Si el agente central aplica un impuesto a la rama dos con:

$$\mu_2(t) < \frac{7}{10} \text{ a } q_2 = 5$$

tendremos:

$$\frac{q_1}{q_2\mu_2} = \frac{4}{5\left(\frac{7}{10}\right)} < \frac{40}{35} = \frac{8}{7}$$

Esto significa que para

$$q(t) < \frac{8}{7} \qquad q(t+1) < 4$$

Con esta intervención del agente central en el periodo t, se puede evitar la crisis en el periodo $t+1$.

Como el sistema es inestable y casi en todos los casos se llega a la crisis de sobreproducción, el agente tendría que aplicar el impuesto a cada momento para evitar una nueva crisis. A menos que decida un "impuesto" que permita llegar al caso homotético; pero esto corresponde a otra idea de agente central.

LA INTERVENCIÓN DEL AGENTE CENTRAL PARA GARANTIZAR EL CASO HOMOTÉTICO EN EL CASO DE DOS RAMAS

En el apartado anterior se justificó la intervención de un agente central para evitar la crisis. Este proceso se realiza mediante un ajuste a partir del "cobro" de impuestos a los capitalistas. Como el sistema tiene una tendencia hacia la sobreproducción, se tendría que hacer el ajuste cada vez que se requiera. La única forma de evitar esta situación es que el agente central, desde el principio, haga un ajuste para llegar a las "buenas proporciones". Igual que en los apartados anteriores, se implementa una política de "impuestos" en especie. En el caso de dos ramas, se trata de imponer un impuesto a la rama con mayor tasa de excedente físico. Con este procedimiento obtenemos una tasa uniforme y de esta forma llegar a las "buenas proporciones". Esto se mostrará primero con un ejemplo numérico y después en general para una economía con n ramas.

Un ejemplo numérico

Tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 2t \oplus 3h &\Rightarrow 10t \\ 4t \oplus 1h &\Rightarrow 5h \end{aligned} \qquad (23)$$

La tasa de excedente físico se calcula como el cociente entre producto neto y los insumos totales. Esto es:

$$TEF = \frac{PT - IT}{IT}$$

Donde *PT* es "producción total" e *IT* son los "insumos totales". Calculemos la tasa de excedente físico para cada una de las ramas.

$$TEF_1 = \frac{10-6}{6} = \frac{2}{3}$$

$$TEF_2 = \frac{5-4}{4} = \frac{1}{4}$$

En este caso, la tasa de excedente físico de la primera rama es 2/3 y para el segundo 1/4; por lo que tenemos un sistema que no es homotético.

Si se construye la matriz de coeficientes técnicos del sistema (23), se obtiene:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (0.4)\lambda - 0.2 = 0$$

los valores propios son:

$$\lambda_1 = 0.6898$$

$$\lambda_2 = -0.5797$$

λ_1 es el valor propio de Frobenius. Con este valor propio se obtiene el vector de Frobenius de la matriz A.

$$\overline{q^*} = \begin{pmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6329 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las "buenas proporciones" es precisamente el cociente de las componentes del vector de Frobenius.

$$q^* = \frac{q_1^*}{q_2^*} = 1.6329$$

En el sistema (23), $q_2 = 5$; entonces, para estar en las "buenas proporciones" el nuevo $\overline{q}_1$, tendría que satisfacer la condición:

$$\frac{\overline{q_1}}{5} = 1.6329 \Rightarrow \overline{q_1} = 8.1646$$

8.1646 equivale a 81.64% de q_1 del sistema (23). Como queremos llegar al sistema homotético, reducimos los insumo en 18.36% de la rama uno y construimos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 1.632t \oplus 2.4492h &\Rightarrow 8.1646t \\ 4t \oplus 1h &\Rightarrow 5h \end{aligned} \qquad (24)$$

Este nuevo sistema es homotético, porque:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{8.1646}{5} = 1.6329$$

Las tasas de excedente físico son iguales en ambos sectores.

$$TEF_1 = \frac{8.1646 - 5.6328}{5.6328} = 0.449$$

$$TEF_2 = \frac{5 - 3.4492}{3.4492} = 0.449$$

De aquí se deduce que el "impuesto" por parte del agente central para el rama uno, será de μ_1 = 18.36%. Con este impuesto para la rama uno, se obtienen las "buenas proporciones". Este resultado se puede generalizar para una economía de *n* ramas.

El caso general

Ahora se tiene una economía con n sectores. La tabla de insumos es:

$$a_{11} \oplus a_{21}, \; .... \oplus a_{n1} \Rightarrow 1$$

$$a_{12} \oplus a_{22}, ..., \oplus a_{n2} \Rightarrow 1$$

$$..........................$$

$$a_{1n} \oplus a_{2n}, ..., . \oplus a_{nn} \Rightarrow 1$$

donde α_{ij} es la cantidad de la mercancía *i* que se requiere para producir una unidad de la mercancía *j*.

Se inicia el análisis con un sistema con tasas de excedente físico diferentes. La idea es que a artir de un "impuesto en especie" que imponga un agente central a los agentes, el sistema se transforme en uno homotético. Es decir, un sistema donde haya una tasa uniforme de excedente físico.

Partimos de un sistema que no es homotético. Sea m_i el impuesto que se cobra a los capitalistas de la rama *i*; su tasa de excedente físico es:

$$TEF_i = \frac{m_i - (m_1 a_{i1} + m_2 a_{i2} + ...+ m_n a_{in})}{(m_1 a_{i1} + m_2 a_{i2} + ...+ m_n a_{in})} \qquad i = 1,2..n$$

Como queremos un sistema con tasa de excedente físico uniforme, entonces todas las tasas de excedente físico deben ser iguales, esto es:

$$TEF_i = \frac{m_i - (m_1 a_{i1} + m_2 a_{i2} + ...+ m_n a_{in})}{(m_1 a_{i1} + m_2 a_{i2} + ...+ m_n a_{in})} = R \qquad i = 1,2...n$$

Esta condición, traducida a un sistema de ecuaciones, la expresamos como:

$$(a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + \dots\dots + a_{in}m_n)(1+R) = m_1$$
$$(a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + \dots\dots + a_{2n}m_n)(1+R) = m_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(a_{n1}m_1 + a_{n2}m_2 + \dots\dots + a_{nn}m_n)(1+R) = m_n$$

En términos matriciales, tenemos:

$$(1+R)A\bar{m} = \bar{m}$$

El problema planteado se reduce a encontrar el valor y vector de Frobenius de la matriz *A*. Cómo *A* > 0 y por el teorema de Frobenius para matrices positivas, sabemos que hay un único vector propio positivo que es el asociado con el valor propio de módulo máximo. Por tanto, el valor propio

$$\frac{1}{(1+R)}$$

y el vector propio $\overline{m}$ son múltiplos del valor y vector propios de Frobenius. Para obtener "el impuesto" que se debe imponer a las diferentes ramas, hay que fijarse en la coordenada máxima de $\overline{m}$ y dividir todas las entradas entre este número positivo. Así se tendría una coordenada con uno y todas las demás menores que uno. Las coordenadas que son menores que uno son los "impuestos" que el agente central tendría que imponer a los capitalistas de cada una de las ramas para obtener el sistema homotético.

CONCLUSIÓN

Un aspecto relevante en el modelo de Benetti, es la formalización que hace del concepto de demanda efectiva de Torrens. Demuestra que el único caso donde el sistema se puede reproducir en el largo plazo es el homotético. En cualquier otro, el sistema se reproduce algunos periodos, pero finalmente se llega a la crisis de sobreproducción.

Benetti considera que todo el excedente se acumula. Por nuestra parte, inicialmente incluimos el consumo improductivo como una fracción de la producción. Dado que el sistema tiene una tendencia a la sobreproducción, la idea es retirar una parte de la producción de la acumulación para que el sistema se pueda reproducir. El problema que se presenta es que se necesita una coordinación de los capitalistas sobre la decisión de su propensión al ahorro y por lo tanto sobre su consumo; pero este comportamiento no lo pueden lograr los agentes, porque ellos deciden su consumo de manera independiente. Por esta razón necesitamos la actuación de un agente central que intervenga a partir de la imposición de un "impuesto en especie" a los capitalistas de las diferentes ramas.

Los resultados obtenidos muestran que el agente central puede decidir el "impuesto en especie", para evitar la crisis en el periodo siguiente. De este razonamiento se desprende la necesidad de la intervención del agente central cuya función es retirar una parte de la producción por medio del impuesto; en consecuencia, el crecimiento no será máximo. Como el sistema es inestable y se tiende a la sobreproducción, el agente central tendría que intervenir de manera permanente. Otra forma de actuación del agente central es intervenir para obtener el crecimiento equilibrado; después de lograr este objetivo, el agente central se retira.

Hay dos ideas de política económica que se desprenden de la actuación del agente central. En la primera, el agente central sacrifica el crecimiento máximo y privilegia una redistribución de los recursos a partir del cobro de impuestos que destina al gasto social. La segunda, privilegia el crecimiento máximo. El dilema que se presenta para el agente central es: crecimiento máximo o redistribución del ingreso.