Presentación
Educación alternativa: matemáticas y práctica social

Ricardo Cantoral*

Introducción

Aunque se acepta en el mundo académico que la matemática es universal, debemos enfatizar que su enseñanza no lo es. Ésta, la enseñanza de las matemáticas, se sitúa en escenarios sociales y culturales específicos que habrán de tomarse en cuenta al momento de elaborar propuestas pedagógicas viables. Ello exige de enfoques alternativos que partan de la realidad de quien aprende y de los contextos de su enseñanza. Esto fue lo que nos propusimos hacer conjuntamente con los colegas de la Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca en su programa de posgrado denominado Maestría en Enseñanza de las Matemáticas para la Educación Secundaria cuando, en un acuerdo de colaboración institucional, decidimos elaborar una propuesta alternativa para el caso de las matemáticas a partir de prácticas socialmente compartidas en las comunidades de dicho estado. Para ello resultó fundamental asumir que en estas propuestas de desarrollo educativo se tendrían que considerar tanto las realidades del que aprende como las de quienes enseñan, y que habrían de estructurarse atendiendo al escenario donde se contextualizan los saberes específicos.

Esta postura permitió al grupo de Matemática Educativa que se ocupa de la socioepistemología, esto es, del estudio sobre la *construcción social del conocimiento*, el posicionarse en una esquina un tanto distante de aquella que tienen las visiones clásicas o *platonistas* del conocimiento matemático, las cuales lo reducen a sus aspectos instrumentales y formales y hacen que pierda su naturaleza funcional, su *valor de uso*.

Estos esfuerzos descansaron en un marco teórico emergente para la investigación y el diseño educativo en el ámbito de las matemáticas escolares que denominamos *teoría socioepistemológica de la matemática educativa*. Constituye un programa de investigación de largo aliento que se apoya en la socioepistemología como sistema de razón, y se ocupa del problema que plantea la constitución del saber matemático entre la población. Se trata, entonces, de una teoría cuyos constructos son elaboraciones con base empírica que no nace de la yuxtaposición de teorías existentes, sino que se nutre del análisis sistemático de la realidad educativa nacional. Bajo este enfoque socioepistemológico se asume la legitimidad de toda forma de saber,

* Investigador del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV), del Instituto Politécnico Nacional (México) y coordinador de este número especial dedicado al tema de la matemática educativa y la práctica social.

sea éste popular, técnico o culto, pues todas ellas en su conjunto constituyen la sabiduría humana. Otros enfoques contemporáneos examinan sólo alguna de las formas del saber (Cantoral *et al.*, 2015).

Veamos algunos asuntos de delimitación teórica sobre el enfoque: la palabra socioepistemología plantea en sí misma una relación con el saber, una metáfora que ubica al saber como construcción social del conocimiento. Ahora bien, dado que el saber matemático se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares, su introducción al sistema didáctico le obliga a una serie de modificaciones sobre su estructura y su funcionamiento, lo cual afecta también a las relaciones que se establecen entre estudiantes y profesor. Al dar al objeto de saber una forma didáctica se producen discursos que facilitan la comunicación de conceptos y procedimientos matemáticos y, en consecuencia, el saber se despersonaliza y descontextualiza. Dichos consensos se alcanzan a costa de una pérdida del sentido y del significado original, y reducen el saber a temas aislados y secuenciados, a menudo denominados "contenidos" o "unidades temáticas" de una asignatura. Los discursos que validan la introducción del saber matemático al sistema didáctico, y que legitiman un nuevo sistema de razón, reciben el nombre genérico, en esta teoría, de *discurso matemático escolar*, y son vistos como medio para lograr una participación en el ámbito didáctico. El consenso, de este modo, es logrado a través de ciertas pérdidas que son la antesala de formas de exclusión derivadas de la propia hegemonía que conlleva.

El programa socioepistemológico se ha propuesto el rediseño del discurso matemático escolar como una forma de atender problemas sociales y culturales que acompañan la actividad didáctica en matemáticas. Por ejemplo, interesa atender al fenómeno de masificación de los sistemas educativos sin considerarlo, *a priori*, un rasgo negativo de la educación contemporánea. Incursionamos también en el análisis del impacto que produce la traducción de obras educativas de una cultura o una lengua a otras, más ampliamente al estudio de los procesos de subordinación colonia-metrópoli. Se investiga al empoderamiento docente relativo al saber para enfrentar la exclusión que produce el discurso matemático escolar y las que se derivan también de cuestiones de género, etnia, condición física, social o laboral.

Bajo este programa de investigación, los conceptos y procesos matemáticos que se ponen en funcionamiento en un acto didáctico pueden no ser objetos matemáticos en el sentido clásico, es decir, formas de saber culto aceptados por la comunidad matemática o por la noosfera educativa expresados en el currículo oficial, ya sea explícita o tácticamente. Pueden ser nociones, preconceptos, ideas en su fase germinal, acciones, actividades y prácticas que participan de otros ámbitos de la actividad humana, como la construcción de artefactos, las innovaciones tecnológicas, diseños de ingeniería; o también, del ámbito de las ciencias, las técnicas, las artesanías, las actividades comerciales y así un largo etcétera.

Esto es así porque las matemáticas, desde la mirada socioepistemológica, son consideradas parte esencial de la cultura, un elemento "vivo" que se crea "fuera" del aula, pero se recrea "dentro" de ella: las matemáticas no se inventaron para ser enseñadas y sin embargo se enseñan; se las usa en distintos escenarios, digamos que "viven" a través de las acciones más básicas de toda actividad humana: construcción de vivienda, siembra y tejido, elaboración de protocolos para el empleo de fármacos o de tóxicos, elaboración de recetas de cocina, diseño de depósitos de vino, cálculo de dosis médicas, explicitación de conjeturas matemáticas, coordinación de movimientos de un piloto al aterrizar en una pista complicada, matematización de fenómenos biológicos, toma de decisiones para inversiones financieras, interpretaciones de la opinión pública, simulación de flujos continuos, trueque en mercados tradicionales, estudio de la consolidación de suelos finos saturados, de mecanismos regulatorios de temperatura en la industria química… Están presentes también en la educación formal, en las aulas de ciencias, física, química, biología, tecnología, taller, lectura y comprensión… y, por supuesto, en la clase de matemáticas. Están presentes en las prácticas cotidianas de todos los seres humanos cuando clasifican, predicen, narran, comparan, transforman, estiman, ajustan, distribuyen, representan, construyen, interpretan, justifican, localizan, diseñan, juegan, explican, cuentan o miden.

Este escrito se basa en las primeras contribuciones de los años noventa (Cantoral, 2013) relativas a tres prácticas específicas: predicción, estabilidad y acumulación, desarrolladas por Cantoral (1990), Farfán (1993) y Cordero (1994), respectivamente. Dichas prácticas se han utilizado para diseñar intervenciones didácticas que modifican la comprensión de nociones teóricas clásicas en matemática educativa, así como las nociones de *aprendizaje* o *contrato* se amplían hacia un ámbito didáctico no escolarizado donde puede no corresponderles un saber matemático institucional (aula extendida). El aprendizaje es una noción polisémica que igual es utilizada por el programa conductista (aprendizaje como cambio de conducta), los enfoques cognitivos (aprendizaje como cambio de representación) o los encuadres socioculturales (aprendizaje como cambio de práctica). El contrato, por su parte, concierne a las relaciones explícitas o implícitas entre profesor y alumno cuando un saber escolar está en curso de constitución; se incluyen ahora consideraciones de orden social y cultural que contemplan circunstancias históricas, culturales e institucionales para la construcción y difusión de significados.

Thomas Kuhn influyó en nuestro enfoque al modificar nuestra mirada sobre la noción de *cambio científico*, o más específicamente, sobre la idea de *progreso*. En el origen del programa socioepistemológico nos preguntamos sistemáticamente qué significa mejorar los procesos de aprendizaje matemático, cuáles son las condiciones que los favorecen y cuáles las que los obstaculizan. Así emergió la noción de *discurso*, primero como discurso matemático para la escuela (Ímaz, 1987) y como discurso matemático escolar (Cantoral, 1987); en ambos casos como forma de articular, problematizando, las nociones de progreso y aprendizaje que brindaron la posibilidad de intervención educativa. También influyeron en nuestra mirada P. Freire, J. Piaget, F. Varela, C. Ímaz y M. Artigue; y con la misma fuerza Struik, Koyré, Lakatos, Toulmin y Bachelard, por su enfoque de la historia y la filosofía de las matemáticas, o más ampliamente de la epistemología de las ciencias, centrado en aspectos contextuales, conceptuales y procedimentales, más que en logros y progresos en el terreno conceptual. Estos autores resultaron cruciales para el desarrollo del programa socioepistemológico. Nos ayudaron a explorar cómo entender el aprendizaje matemático sin atribuir un sentido de verdad absoluto y universal (programa deductivista) o una única racionalidad válida (racionalidad positivista).

Pronto se planteó, en el programa socioepistemológico, la necesidad de una reconstrucción racional del saber matemático que se apoyase en una racionalidad contextualizada de quien aprende, que acompañase al programa del relativismo epistemológico acerca del qué, cómo, cuándo y por qué lo aprende. De este modo se articuló la noción de cambio con una concepción del aprendizaje relativa a los contextos y *prácticas de referencia*. La noción de práctica de referencia se extrae de las investigaciones impulsadas por Farfán (1993, 2012) sobre los procesos de matematización de la ingeniería en el siglo XVIII. La práctica de referencia está estructurada y estructura al quehacer matemático y científico de una época que va de la conformación de la *École Polytechnique* en la Francia napoleónica, hasta el surgimiento de la figura del matemático profesional tras la Primera Guerra Mundial. Con estos hallazgos, y mediante una gran cantidad y variedad de evidencia empírica, el programa socioepistemológico fortalece su mirada crítica hacia la tradición formalista y el enfoque constructivista de aquellos años. Ni la tradición formalista, con su énfasis en el problema del conocimiento desde el punto de vista de los fundamentos o de la estructura formal, ni el enfoque constructivista, que si bien relativiza el asunto de la lógica de la demostración e indica las heurísticas del descubrimiento, no abandona su predilección por el conocimiento matemático como centro de metáforas teóricas, parecieron entonces adecuados.

Origen de la teoría y de sus dimensiones

La socioepistemología nace en la escuela mexicana de Matemática Educativa a fines de los ochenta y se extiende hacia Latinoamérica y otras latitudes durante los noventa con el objetivo de atender colectivamente un problema mayor: explorar formas de pensamiento matemático, fuera y dentro de la escuela, que pudiesen difundirse socialmente y ser caracterizadas para su uso efectivo entre la población. Sabíamos que la manera de enseñar está estructurada por la institución que lleva a cabo la enseñanza (la acción didáctica en el aula, la familia, la comunidad, la escuela o la vida cotidiana) y que esto, a su vez, es estructurante de la socialización del conocimiento y, en consecuencia, de los procesos de pensamiento involucrados. En Cantoral y Farfán (2003; 2004) se proclama aquello que se tornaría en consigna: no más una didáctica sin alumnos, pero menos aún una didáctica sin escenarios socioculturales. El nuevo reto era pasar la mirada del concepto a las prácticas. Si bien comenzamos con el estudio de fenómenos didácticos de manera sistémica, tomando los tres polos básicos del triángulo didáctico —el contenido de la enseñanza, el sujeto que aprende y el que enseña, regulados por un medio didáctico controlado—, pronto advertimos la necesidad de realizar sucesivas reconstrucciones a nivel teórico. A las situaciones de aprendizaje había que incorporarles dimensiones socioculturales que significasen aquello que originó al conocimiento matemático, pero, sobre todo, que sigue de algún modo vivo mediante *su uso* en los entornos de los que aprenden. Ampliamos las ideas de aula, saber y sociedad para aceptar, sobre la base de evidencia empírica acumulada, que tal reformulación requería de incorporar una cuarta dimensión: la dimensión social y cultural. Con su inserción, las demás dimensiones se transformaron y se abrió el estudio sistémico de la constitución del saber matemático desde una perspectiva socioepistemológica, es decir, enfatizando los procesos de construcción social del conocimiento y de su difusión institucional. El programa quedó finalmente conformado por cuatro dimensiones: epistemológica, didáctica, cognitiva y socio-cultural. Ejemplos del modelo ampliado se encuentran en Reyes-Gasperini (2016), donde el empoderamiento se incorpora a la socioepistemología; Carrillo (2006), donde se incorporan factores afectivos en la construcción social del conocimiento matemático; y Covián (2005), quien analiza el carácter normativo de las prácticas sociales y da un paso más hacia una caracterización del aprendizaje que vincula al individuo con su colectividad.

Actualmente se postula que para atender la complejidad de la naturaleza del saber y su funcionamiento a nivel cognitivo, didáctico, epistemológico y social (Cantoral, 2013), se debe de problematizar al saber situándolo en el entorno de la vida del aprendiz, lo que exige un rediseño compartido, que oriente y estructure el discurso matemático escolar con conciencia de la alta valoración dada a las prácticas sociales. Las matemáticas, además, se han desarrollado bajo un estigma que las vincula con objetos abstractos, anteriores a la praxis social y externos al individuo; en nuestro programa se revierte esta idea: las matemáticas, como parte de la cultura, se desarrollan por mecanismos sociales de producción de significado. Las lenguas, las leyes, la moral y la religiosidad son emergentes sociales que no podrían ser creados por sujetos individuales, sino por colectivos normados en el curso de su evolución. Por tanto, surge la pregunta clave sobre qué produce la norma. La norma es en sí misma un emergente social que regula el desarrollo colectivo. Esta idea es la que empleamos al afirmar que la práctica social es un emergente social con nuevas funciones de tipo normativo, identitario, pragmático y discursivo-reflexivo. La noción de *práctica social* con funciones delimitadas es un emergente teórico que aparece al incorporar la dimensión social al sistema "epistemológico-didáctico-cognitivo" de la didáctica fundamental y, hoy en día, es una noción integral que sustenta a la teoría misma. Dado que las distintas acepciones que fuimos usando para la práctica social no conseguían explicar toda la complejidad de lo estudiado, se planteó entonces a la propia noción de práctica social como objeto de estudio. Quisimos ubicar con rigor el papel de la práctica social en el paso del conocimiento al saber para hablar con sentido de una socioepistemología, y no de una epistemología en sí. Al respecto, resultó útil asociar "uso" a "conocimiento" para dar lugar al "saber"; surgió así una noción de aprendizaje situacional, o aprendizaje en contexto.

Sostenemos que el conocimiento matemático, aun aquel que consideramos avanzado, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de actividades prácticas socialmente valoradas y normadas. Esto no significa que todo conocimiento obedezca a una necesidad de naturaleza práctica inmediata, a una cuestión concreta. Los historiadores de la ciencia han documentado suficientemente que algunas nociones matemáticas no provienen de sucesivas abstracciones o generalizaciones de lo empírico. Más bien, nuestra hipótesis tiene una orientación socioepistemológica puesto que establece una filiación entre la naturaleza del conocimiento que los seres humanos producen, y las actividades mediante las cuales —y en razón de las cuales— dichos conocimientos son producidos. Bajo este enfoque, las matemáticas están en la base de la cultura humana igual que lo están el juego, el arte o el lenguaje. Nuestras investigaciones han mostrado, durante los últimos años, la pertinencia y consolidación de esta postura de acuerdo con los resultados obtenidos y la elaboración teórica. Se ha seguido una aproximación sistémica a la investigación que articula las cuatro dimensiones del saber (construcción social del conocimiento): su naturaleza epistemológica (forma en que conocemos), su tesitura sociocultural (énfasis en el valor de uso), los planos de lo cognitivo (funciones adaptativas) y los modos de transmisión vía la enseñanza (herencia cultural).

El saber, como construcción social del conocimiento, se constituye mediante procesos deliberados para el uso compartido de conocimiento. Se trata de mecanismos constructivos, altamente sofisticados y de carácter social, que producen interacciones, explícitas o implícitas, entre mente, conocimiento y cultura. Para el análisis del saber, éste debe problematizarse. Específicamente, el saber trata de la polifonía entre procesos avanzados de pensamiento, la epistemología de las matemáticas y las prácticas humanas especializadas. Así, el saber matemático (*saber sobre algo*), no puede reducirse a una definición formal, declarativa o relacional; a un conocimiento matemático (*conocimiento de algo*), sino que habrá de ocuparse de su historización y dialectización como mecanismos fundamentales de constitución.

Ejemplifiquemos con problemáticas ligadas al análisis matemático que resultaron útiles para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (PyLV) (Cantoral y Farfán, 1998). Con base en la elaboración de cuatro tareas, que buscaban reconocer los ceros de las derivadas hasta el orden tres de una función analítica dada gráficamente, se llevaron a cabo proyectos de posgrado a fin de mostrar que a pesar del dominio que un estudiante pueda tener de la derivación como proceso y del cálculo de derivadas simples y complejas, aunque sea capaz de reproducir el significado geométrico de la derivada como pendiente de la recta tangente en un punto, o conozca algunos teoremas relativos a las derivadas de funciones reales de variable real, como aquel que señala que "si f es derivable en a, entonces es continua en a", aun con todo ello tendrá dificultades para articular e interpretar las derivadas sucesivas. Teóricamente anticipé que en la enseñanza del cálculo se produciría un singular fenómeno ligado al aprendizaje, con estudiantes y profesores. Diríamos que el discurso matemático escolar, en tanto sistema de razón, estructura a los actores educativos a través de una costumbre didáctica, produciendo un escaso entendimiento conceptual para la transferencia de significados. Sintéticamente produce una ausencia de noesis (aprensión conceptual del objeto) derivada de una falta de praxis (proceso de conocimiento y toma de conciencia). La noesis representa a la experiencia vivida en conjunto, mediante actos de comprensión enfocados sobre el objeto de la experiencia como la percepción, la imaginación, la conciencia o el recuerdo. Al respecto, el enunciado socioepistemológico en versión corta diría que *no hay noesis sin praxis.*

Sin el desarrollo del PyLV (praxis), es imposible que un estudiante aborde exitosamente un conjunto de tareas como las que veremos a continuación. Tendrá dificultades en asignar los significados asociados al tipo de relaciones f y f' o f y f'' (noesis), pues el discurso matemático escolar induce un énfasis mayor en las derivadas consecutivas o relaciones del tipo $f^{(n)} \leftrightarrow f^{(n+1)}$, pero no analiza las del tipo $f^{(n)} \leftrightarrow f^{(n+2)}$ y menos aún $f^{(n)} \leftrightarrow f^{(n+3)}$. La razón de este hecho está ligada a la forma en que se introduce al aula el tema de la derivada de una función real. La presentación escolar utiliza al límite del cociente incremental, y de existir le denomina derivada de f en a. La segunda derivada de la función f se define como la derivada de la función derivada, la tercera como la derivada de la función derivada segunda, y así sucesivamente.

El concepto a definir es la primera derivada de una función, de manera que las derivadas quedan anidadas: $((((f)')')\ldots)'$. Esto explica el encadenamiento entre una derivada y su consecutiva $f^{(n)} \leftrightarrow f^{(n+1)}, f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$. De ahí la hipótesis de que la derivada sólo podrá ser utilizada en escenarios diversos cuando se articulen las derivadas sucesivas hasta establecer relaciones de subida y bajada: $f \rightarrow f' \rightarrow f'' \rightarrow f''' \ldots$ y $\ldots f''' \rightarrow f'' \rightarrow f' \rightarrow f$. Tras el estudio relatado en Cantoral (1990; 2013), se problematizó al saber y se produjo una ruta de solución didáctica: la noción matemática de derivada, que acompaña a la práctica de predecir, será estabilizada entre los estudiantes sólo cuando la derivada sea usada como una articulación conveniente de las derivadas sucesivas.

Sostuvimos desde esos años que la razón principal por la que no era posible articular las derivadas sucesivas en el aula obedecía a la ausencia de escenarios socioculturales de intermediación que trataran con procesos de cambio y variación, puesto que la limitante de orden fisiológico plantea al ser humano una incapacidad funcional: no estamos dispuestos fisiológicamente para percibir variaciones de orden grande; particularmente dicha limitación se da desde el orden tres. Nos es imposible entender a cuatro personas hablando simultáneamente; no podemos "recordar" corporalmente movimientos con aceleración variable; en la esfera del habla, usamos tres estados para describir adverbios de tiempo: antes – ahora – después.

Concluimos que, ante la incapacidad de percibir variaciones a voluntad, debemos articular a las variaciones de orden menor y asumir como constantes a las de orden mayor. Por ello, en la interacción verbal, solemos reducir las expresiones comparativas a dos variaciones con tres estados. El conjunto de estados $\{E_i\}_{i=1,2,3}$ y el conjunto de variaciones $\{v_j\}_{j=1,2}$ se relacionan entre sí: $E_1 \overset{v_1}{\leftrightarrow} E_2 \overset{v_2}{\leftrightarrow} E_3$. Si los estados no son consecutivos, se requiere una articulación de variaciones: $E_1 \xleftrightarrow{v_1 \oplus v_2} E_3$. Ambas formas de variación quedan ilustradas como sigue:

$$\overbrace{E_1 \overset{v_1}{\leftrightarrow} E_2 \overset{v_2}{\leftrightarrow} E_3}^{v_1 \oplus v_2}$$

Ejemplifiquemos lo anterior con un caso sencillo. Consideremos que E_1 representa la altura actual de un árbol y E_2 su altura un año después; v_1 muestra entonces el incremento de la altura, su variación de crecimiento. Si E_3 es la altura del árbol dos años después, v_2 exhibe el incremnto en la altura durante el segundo año. De modo que $v_1 \oplus v_2$, en nuestro modelo, es el cambio del cambio: el cambio de los incrementos. En términos dinámicos esto se expresaría como una función del tiempo, localmente lineal: $v_1 \oplus v_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$. Este objeto formal, si bien perceptible y calculable, resulta complicado de tratar para variaciones de orden mayor: $[v_1 \oplus v_2] \oplus [v_2 \oplus v_3]$. Mientras que resulta ininteligible para estudiantes si consideramos un orden mayor al anterior: $[[v_1 \oplus v_2] \oplus [v_2 \oplus v_3]] \oplus [[v_2 \oplus v_3] \oplus [v_3 \oplus v_4]]$.

Cabe preguntarse si dichas limitaciones sobre la interpretación de las variaciones de orden superior tienen una contraparte cultural localizable en prácticas cotidianas. Esto fue confirmado experimentalmente, pues las comparaciones de "tres estados" caracterizan a nuestras habituales formas discursivas, culturalmente aceptadas, para una comunicación. Estas formas tripartitas de estados vecinos se construyen colocando invariablemente dos estados extremos, el uno y su opuesto, a fin de comparar la evolución de una magnitud o un atributo. Se le nombra E_1 al menor de los estados y E_3 al mayor. Se construye entonces un estado intermedio de transición, E_2, con características ambivalentes al participar de características de los estados extremos. Ejemplos de la vida cotidiana sirven para comparar estados: para comparar temperaturas utilizamos los vocablos frío, tibio y caliente, correspondientes respectivamente con E_1, E_2 y E_3. Para identificar estados intermedios y dar variabilidad al proceso tratando con estados y posiciones intermedias, usamos adverbios de cantidad: muy, mucho, bastante, poco, demasiado, más, menos, tan, tanto… Algo caliente puede estar aún "más caliente", y se dice "está muy caliente"; algo "por debajo" de frío es muy frío. No tan caliente es "apenas caliente", "casi caliente" o de plano tibio. Así, en nuestros discursos empleamos sistemáticamente el PyLV. Las alturas de las personas se distinguen entre bajo, medio y alto; las posiciones de cercanía relativas entre cerca, aquí y lejos; etcétera. Mediante el uso cotidiano de la lengua natural se han ido construyendo adverbios de modo, tiempo, ubicación, cantidad o grado para tratar con situaciones variacionales: a) adverbios de modo (bien, regular, mal); b) adverbios de tiempo (ayer, hoy, mañana); y c) adverbios de cantidad o grado (nada, poco, mucho).

Todos estos adverbios poseen una estructura simétrica y reversible que permite al discurso una flexibilidad mayúscula. Las relaciones grande-pequeño o pequeño-grande se traducen de inmediato en relaciones de crecimiento, decrecimiento o estabilidad. El uso del lenguaje ordinario antecede o acompaña al uso de las variaciones en matemáticas, pues el estudiante en un curso de cálculo ha desarrollado previamente un sistema discursivo para tratar con el cambio y la variación. Sin embargo, en la enseñanza este acontecimiento de orden sociocultural no forma parte del contenido escolar por las restricciones debidas al discurso matemático escolar. Si acaso en su discurso didáctico el docente será quien vehicule estrategias y esquemas variacionales, como reporta experimentalmente Reséndiz (2004).

Utilicemos una analogía entre las flexiones adverbiales y la variación de funciones matemáticas. Llamamos a cada una de estas variaciones, tanto lingüística como matemática, como variaciones de forma I y II. Las variaciones de la forma I siguen un patrón de crecimiento secuencial, paso a paso: dado un estado se continúa con el siguiente estado o con su antecesor; mientras que las variaciones de la forma II siguen un patrón de saltos no unitarios: dado un estado se pasa hacia algún estado posterior o anterior no consecutivo. La dificultad para el análisis de las variaciones del tipo II radica en la no existencia de un sistema apriorístico de referencia, un sitio que sirva de origen para medir la variación; el cambio como tal no existe sin referenciales, por lo que ha de ser construido en cada caso. El problema es quién construye el origen y el sistema de referencia, esto es, ¿respecto de qué? Decidir qué cambia no basta para estudiar el cambio. Quizá por la ausencia de dicho origen en el sistema de referencia no dispongamos de palabras para hablar de la tercera o cuarta o quinta… derivada. ¿Por qué razón no existe palabra para describir al cambio de la aceleración? La posición corresponde a f, la velocidad a f' y la aceleración a f'', pero no hay palabra que acompañe a la tercera derivada: ¿qué concepto es f'''? Algo semejante ocurre con el significado gráfico de las derivadas. La función f representa a la ordenada, f' la pendiente de la recta tangente y f'' la concavidad de la curva, pero ¿cuál es el significado para f'''?

Esta dificultad se asoma ya desde el manejo de la lengua misma, pues usamos calentar para dos variaciones distintas: $\text{Frío} \xrightarrow{entibiar} \text{Tibio}$, $\text{Tibio} \xrightarrow{calentar} \text{Caliente}$, $\text{Frío} \xrightarrow{calentar} \text{Caliente}$.

Equivalentemente, tendremos la misma situación para la relación inversa: $\text{Tibio} \xleftarrow{templar} \text{Caliente}$, $\text{Frío} \xleftarrow{enfriar} \text{Tibio}$. En la física clásica se entiende que no usaran una tercera variación, pues la segunda ley de Newton estipula que en el sistema masa-aceleración, masa y aceleración son constantes, por lo que no se precisa de la tercera derivada. No obstante, debe buscarse una respuesta en el marco del discurso matemático escolar. Para encarar esta tarea se han realizado multitud de experimentos bajo la perspectiva socioepistemológica.

En todos ellos, el interés ha sido explorar cómo los estudiantes comparan, secuencian y articulan variaciones de orden mayor. Por motivos de espacio no indico las numerosas referencias que convendría incluir al respecto.

Consideraciones finales

Podemos decir, sin temor a equivocarnos, que el PyLV ha sido la fuente de inspiración empírica del programa socioepistemológico; la gran cantidad de investigaciones realizadas por el grupo de trabajo lo constata. Sin embargo, no han sido los únicos; más recientemente los trabajos sobre lo periódico, lo proporcional, lo analítico, lo lúdico, lo profesional, lo cultural y lo artesanal, entre otros que se llevan a cabo en la socioepistemología, muestran una ruta nueva de pesquisa, pues a la par que incorporan dimensiones claramente sociales como el empoderamiento o la exclusión, centran su atención en la proporcionalidad como práctica de referencia para un conjunto amplio de saberes (Arrieta y Díaz, 2015; Reyes-Gasperini, 2013). Del mismo modo encontramos desarrollos innovadores al analizar procesos de desescolarización del saber en prácticas como el malabar circense, y la siembra y el tejido en comunidades originarias (Espinoza, 2014; Yojcóm, 2013; respectivamente).

Este capítulo tuvo la intención de presentar al lector interesado en los procesos de construcción social del conocimiento elementos de una teoría emergente: la socioepistemología de la matemática educativa. Este encuadre teórico surge, como dijimos, en un cruce de caminos en un intento por explicar las relaciones entre mente, saber y cultura en el campo de las matemáticas apoyándonos en la noción de *práctica social*. La práctica social no se filma, se infiere, pues como constructo teórico sirve para explicar la construcción del conocimiento basado en prácticas; se trata, en consecuencia, de un constructo desde una perspectiva pragmática del significado. La existencia de prácticas diversas, aunque semejantes entre sí, en pueblos y culturas, épocas y regiones, escenarios y circunstancias, exige de una explicación sustentada en las acciones de los sujetos (individual, colectivo, histórico) y en las actividades humanas mediadas por la cultura.

Un buen ejemplo de lo que quiero decir lo constituye el "juego". Se tiene la certeza de que jugar es una actividad característica del niño, aunque lo es también, en un sentido más amplio, de todos los seres humanos. Lo que resulta sorprendente de esta afirmación no es el hecho en sí de que el juego esté presente en todas las culturas, sino que los tipos de juego llevados a cabo en distintas culturas tengan estructuras tan semejantes entre ellos: hay juegos de competencia, de estrategia, de fuerza o velocidad, de participación cooperativa… y así un largo etcétera; juegos que son practicados por igual en la India o en Guatemala, tanto en la Edad Media como en años recientes. Se practican en parques, plazas públicas, llanos, calles, casas… por infantes que, por supuesto, no conocieron a "los otros niños" de China o de la Edad Media que practicaron juegos semejantes. ¿Cómo pudieron compartir sus reglas si están tan distantes en el tiempo o el espacio? Si bien estos juegos tienen denominaciones diferentes de una región a otra y se practican bajo pequeñas variantes, poseen siempre la característica común de ser juegos estructurados. La norma que estructura al juego, caracteriza al género o tipo de juego y estructura a su vez las prácticas del jugador. Es decir, el juego está estructurado y es estructurante. La pregunta teórica fundamental que nos plantea la socioepistemología, no referida al juego, es la siguiente: ¿qué produce la norma en la construcción social del conocimiento matemático?

Si bien en el terreno de las ciencias sociales la idea de práctica normada ha sido aceptada por diversos enfoques teóricos y se suele utilizar para explicar asuntos diversos, no ocurre así en el campo de las ciencias exactas; en las matemáticas, como ciencia formal, menos aún. Es usual que, en tanto campo especializado del saber humano, se asuma en la comunidad de matemáticos que la creatividad que caracteriza a la inventiva y al aprendizaje sean de carácter individual, atribuibles a las capacidades del inventor o del aprendiz; son, por tanto, explicables sobre la base de estructuras mentales del talento o del llamado libre albedrío de quien ejerce la acción. Es usual, por ejemplo, escuchar que Gauss abrió un campo, Euler consolidó una rama, Newton extendió una teoría, de modo que son los individuos dotados de talento extraordinario quienes logran dichas metas. La pregunta central en este ámbito de ideas es si podríamos construir una explicación alternativa a la invención individual; una explicación centrada en los procesos de construcción social del conocimiento matemático, pues de ser esto posible, tendríamos con ello un camino para democratizar el aprendizaje de las matemáticas entre la población. Es decir, si logramos entender a las matemáticas, así como al juego, como parte de la cultura, aceptaríamos también que se guían por normativas específicas. En tal caso, tendremos que mostrar, empíricamente, que los distintos ejemplos desarrollados bajo el programa socioepistemológico pueden ser explicados con base en la existencia de prácticas anidadas, normadas por una práctica social. Más específicamente debemos mostrar la existencia de mecanismos específicos de la práctica social que explican por qué hacemos lo que hacemos; norman y estructuran al aprendiz.

Estos son nuestros nuevos retos: consolidar la socioepistemológica mediante diseños para la intervención didáctica con impacto en los sistemas educativos, así como alcanzar un mayor rigor teórico y, en consecuencia, su estabilización entre el resto de los enfoques teóricos del campo. Esta fue la intención que unió dos proyectos: la educación alternativa en Oaxaca y la mirada socioepistemológica. Una más detallada visión de este programa puede consultarse en diversas publicaciones del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME), el *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* y en artículos de la *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* (*Relime*), pero también, y con mayor fuerza, en las aulas de la educación oaxaqueña.

Nota. Queremos agradecer a la ENSFO y a los dos grupos de profesores quienes cursaron la Maestría, antes de que las autoridades educativas decidieran cancelar el programa…

Referencias

Arrieta Vera, Jaime y Leonora Díaz Moreno (2015), "Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 18, núm. 1, pp. 19-48.

Cantoral, Ricardo (1987), "Historia del cálculo y su enseñanza: el concepto de límite a través de los textos y de su historia", en Fernando Hitt, Elisa Bonilla y Olimpia Figueras (eds.), México, *Memorias de la Primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*, Mérida, UADY, pp. 231-235.

Cantoral, Ricardo (1990), *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas. Simbiosis y predación entre las nociones de "el prædiciere" y "lo analítico"*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Cantoral, Ricardo (2013), *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*, Barcelona, Gedisa.

Cantoral, Ricardo y Rosa María Farfán (1998), "Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis", *Epsilon 42,* vol. 14, núm. 3, pp. 353-369.

Cantoral, Ricardo y Rosa María Farfán (2003), "Mathematics Education: A vision of its evolution", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 53, núm. 3, pp. 255-270.

Cantoral, Ricardo y Rosa María Farfán (2004), "La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 24, núms. 2 y 3, pp. 137-168.

Cantoral, Ricardo, Gisela Montiel y Daniela Reyes-Gasperini (2015), "El programa socioepistemológico de investigación en matemática educativa: el caso de Latinoamérica", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 18, núm. 1, pp. 5-17.

Carrillo, Carolina (2006), *¿Saber sin sentir? Una introducción al dominio afectivo*, Tesis de Maestría, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Covián, Olda (2005), *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: el caso de la cultura maya,* Tesis de Maestría, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Cordero, Francisco (1994), *Cognición de la integral y la construcción de sus significados: un estudio del discurso matemático escolar*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Espinoza, Lianggi (2014), *La desescolarización del saber: su construcción social desde el malabarismo y las artes circenses*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Farfán, Rosa María (1993), *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería. Estudio de caso*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Farfán, Rosa María (2012), *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización*, Barcelona, Gedisa.

Ímaz, Carlos (1987), "¿Qué es la matemática educativa?", en Fernando Hitt, Elisa Bonilla y Olimpia Figueras (eds.), *Memorias de la Primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*, Mérida, UADY, pp. 267-272.

Reséndiz, Evelia (2004), *La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Reyes-Gasperini, Daniela (2013), *La transversalidad de la proporcionalidad*, México, Secretaría de Educación Pública.

Reyes-Gasperini, Daniela (2016), *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para el cambio y la mejora educativa*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Yojcóm, Domingo (2013), *La epistemología de la matemática maya: una construcción de conocimientos y saberes a través de prácticas*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.