Reflexión sobre el significado de qué es un buen problema en la formación inicial de maestros

Albert Mallart Solaz* | Vicenç Font Moll**
Uldarico Malaspina***

El objetivo principal de esta investigación es desarrollar la reflexión didáctica en futuros profesores de matemáticas de primaria sobre lo que es un buen problema. La muestra fue de 36 alumnos universitarios de la asignatura de Didáctica de la Geometría para Educación Primaria. Para ello se diseñaron e implementaron cuestionarios, lecturas de expertos, discusiones en grupo, resolución de problemas y análisis didácticos de los mismos. Los instrumentos para recoger la información fueron de registro escrito. Se concluye que para aplicar la lista de criterios de un buen problema de manera efectiva se debe de tener una buena técnica en análisis didáctico de la actividad matemática y también competencia en la resolución de problemas.

Palabras clave

Creación de problemas
Resolución de problemas
Formación del profesorado
Didáctica de las matemáticas
Competencia matemática

The main objective of this investigation is to develop didactic reflection in future primary school mathematics teachers regarding what makes a good problem. The sample consisted of 36 university students from the class on the Didactics of Geometry for Primary School Education. Surveys, expert article readings, group discussions, problem solving and didactic analysis of problems were designed and implemented. Written instruments were used for data collection. In conclusion, in order to effectively adopt the list of criteria for a good problem a teacher must use good techniques for analytical and didactic approaches to mathematics, as well as problem solving competencies.

Keywords

Problem posing
Problem solving
Teacher training
Didactics of mathematics
Mathematical competencies

Recepción: 25 de febrero de 2015 | **Aceptación:** 5 de mayo de 2015

* Profesor asociado al Departamento de Didáctica de Matemáticas de la Universidad de Barcelona. Profesor de secundaria del Instituto Público Príncep de Girona. Doctor en Matemáticas. Líneas de investigación: resolución de problemas, creatividad matemática, formación del profesorado, matemática recreativa. Publicaciones recientes: (2016), "Estudio de indicadores de creatividad matemática en la resolución de problemas", *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (en prensa); (2012), "Loss of Interest in Reasoning and Thinking", *Science, Mathematics, and Technology Learning*, pp. 39-50. CE: albert.mallart@ub.edu

** Profesor titular del Departamento de Didáctica de Matemáticas de la Universidad de Barcelona. Doctor en Matemáticas. Líneas de investigación: formación del profesorado, didáctica del análisis. Publicación reciente: (2015), "Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile", *Praxis Educacional*, vol. 11, núm. 19, pp. 55-75. CE: vfont@ub.edu

*** Profesor titular del Departamento de Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Doctor en Matemáticas. Líneas de investigación: resolución de problemas, creación de problemas, formación del profesorado. Publicación reciente: (2015), "La función cuadrática. Una experiencia didáctica en la perspectiva de la creación de problemas", *Revista Iberoamericana de Educación Matemática - UNIÓN*, núm. 41, pp. 136-141. CE: umalasp@pucp-pe

Introducción[1]

En las tres últimas décadas se han propuesto reformas curriculares que asumen que la resolución de problemas es la actividad central en la construcción del conocimiento matemático de los alumnos. Dos ejemplos relevantes son: 1) la propuesta de estándares y principios del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), la cual contempla como uno de los cinco estándares de procesos del pensamiento matemático la resolución de problemas; y 2) los currículos por competencias que se están elaborando actualmente en diferentes países, influenciados por el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés) (OCDE, 2003), los cuales contemplan, como una de las principales, la competencia en la resolución de problemas.[2] Si bien hay muchas líneas diferentes en la investigación sobre la resolución de problemas, una de las más productivas es la que se ha interesado en responder a la pregunta sobre la relación que hay entre la resolución de problemas y la creación de problemas. La acción de crear problemas complementa la de resolverlos, pues estimula la creatividad, contribuye a precisar la situación, el lenguaje y los conceptos, las proposiciones, procedimientos y argumentos (Malaspina, 2011b).

Una de las tareas profesionales del profesor de matemáticas es proponer problemas a sus alumnos; éstos pueden haber sido creados por otros, pueden ser modificaciones que el profesor hace de problemas que fueron elaborados anteriormente, e incluso pueden ser creados por él mismo. El profesor es el que mejor conoce la realidad de su aula, y por ello es el único que puede calibrar adecuadamente los estímulos y retos que puede plantear a sus alumnos.

En el caso de la formación de profesores, la conexión entre crear problemas y su relación con el proceso de resolución de problemas ha introducido en la educación matemática una nueva agenda de investigación que se ha interesado, entre otros aspectos, en el estudio de la incorporación de la creación de problemas en los programas de formación inicial del profesorado de matemáticas (Ellerton, 2013; Tichá y Hošpesová, 2013; Salazar, 2014). La investigación que se expone en este artículo se sitúa en esta temática; su objetivo principal es desarrollar la reflexión didáctica en futuros profesores de matemáticas de primaria sobre lo que es un buen problema.

La estructura del artículo es la siguiente: después de esta introducción, en la que se explican el problema y el objetivo de la investigación que se presenta, en el segundo capítulo se expone el marco teórico utilizado y se hace una revisión de la literatura sobre la competencia en análisis didáctico de procesos de instrucción, el diseño de tareas y la creación de problemas. En el tercer capítulo se detallan los objetivos planteados en este estudio: desarrollar la reflexión didáctica en futuros profesores de matemáticas de primaria sobre lo que es un buen problema, así como determinar su competencia en resolución de problemas y en análisis didáctico de la actividad matemática. En el cuarto capítulo se explica la metodología cualitativa seguida. En el quinto se describe la implementación de la secuencia de tareas y en el sexto se efectúa el análisis de datos. El artículo termina con unas consideraciones finales.

Marco teórico y revisión de la literatura

A continuación se comentan los elementos teóricos considerados: la competencia en análisis didáctico de procesos de instrucción, el diseño de tareas y la creación de problemas.

1 Trabajo realizado en el marco del proyecto EDU2015-64646-P del Ministerio de Economía y Competitividad de España.

2 PISA define la competencia matemática como la capacidad de los individuos para formular, emplear e interpretar las matemáticas en diferentes contextos.

Competencia en análisis didáctico de procesos de instrucción

Recientemente, ha aumentado el interés por investigar el conocimiento y las competencias que necesitan los profesores de matemáticas para alcanzar una enseñanza eficaz. Sin pretender ser exhaustivos queremos resaltar las investigaciones siguientes:

1. Las que consideran que el profesor debe desarrollar la competencia "mirar con sentido". Esta competencia posibilita ver las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional, que es distinta de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas (Mason, 2002).
2. Las que consideran que una de las competencias profesionales clave que debe tener el profesor de matemáticas es la competencia en análisis didáctico del proceso de instrucción. Es la que le permite el diseño, la implementación, la valoración y la mejora del proceso de instrucción (Font, 2011; Giménez *et al*., 2013).

Para realizar este tipo de análisis se utilizan algunas herramientas teóricas propuestas por el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) (Godino *et al*., 2007), en particular los niveles de análisis didáctico propuestos. En el EOS se proponen cinco niveles para el análisis didáctico de procesos de instrucción, cada uno de ellos con sus respectivas herramientas: a) análisis de las prácticas matemáticas realizadas en el proceso de instrucción; b) análisis de objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas; c) análisis de las interacciones realizadas en el proceso de instrucción; d) identificación del sistema de normas y metanormas que regulan el proceso de instrucción; e) utilización de criterios de idoneidad didáctica para la valoración del proceso de instrucción con el fin de mejorarlo.

Diseño de tareas

Últimamente ha aumentado el interés sobre el diseño de tareas porque se le considera un aspecto clave para conseguir una enseñanza de calidad (Margolinas, 2012). Las tareas son las situaciones que el profesor propone (problema, investigación, ejercicio, etc.) a los alumnos; éstas son el punto de partida de la actividad del alumno y son, a la vez, las que se producen como resultado de su aprendizaje. La investigación sobre el diseño de tareas se interesa por diferentes aspectos: por ejemplo, Swan (2007) estudió la naturaleza y tipología de tareas; Charalambous (2010) el papel que tiene el profesor en la implementación de la tarea a fin de lograr un proceso cognitivo relevante en los alumnos; y Giménez *et al.* (2013) se centraron en el diseño de tareas en la formación de futuros profesores de matemáticas de secundaria.

Creación de problemas

El National Council of Teachers of Mathematics sostiene que el currículo debería facilitar a los alumnos oportunidades para formular problemas interesantes basados en una amplia variedad de situaciones, dentro y fuera de las matemáticas (NCTM, 2000). También recomienda que los estudiantes deberían hacer e investigar conjeturas matemáticas y aprender cómo generalizar y extender problemas; por ello propone preguntas emergentes para implicar a los estudiantes más extensivamente en la resolución de problemas. Para el NCTM los alumnos deberían combinar en actividades matemáticas complejas el uso de problemas abiertos, la proposición de problemas, el pensamiento divergente, la reflexión y la persistencia. Ellerton (2013) ha encontrado que la capacidad de proponer problemas y la de resolverlos están relacionadas.

Da Ponte (2007) señala que el aprendizaje basado en la investigación mejora la calidad del mismo al proveer a los aprendices de diversas oportunidades de alcanzar y comprobar conjeturas, ya que implica el uso de múltiples ejemplos y un rápido *feedback*, así como el uso de múltiples representaciones y el involucramiento en procesos de modelización. La presente investigación se desarrolló en un contexto de geometría, donde las actividades incluyen la experimentación (para conseguir una conjetura), la elaboración de conjeturas, la comprobación de las conjeturas y la aprobación o el rechazo de las mismas. Para llevar a cabo en una clase de geometría una investigación llena de significado, los maestros deben elegir problemas adecuados que faciliten la experimentación, el descubrimiento, el conjeturar y el comprobar las conjeturas aceptándolas o rechazándolas (Leikin y Grossman, 2013). Basándose en experiencias de diferentes niveles educativos, Malaspina (2012) ha identificado algunas características que los buenos problemas deberían tener desde el punto de vista didáctico, considerando los criterios de idoneidad propuestos en el EOS: la solución se intuye como alcanzable (idoneidad cognitiva); favorece intuir un camino para obtener la solución o conjeturar una (idoneidad interaccional, emocional y cognitiva); favorece hacer algunas verificaciones (calculadoras u ordenadores) para mantener o rechazar las conjeturas (idoneidad interaccional y mediacional); la resolución es interesante o útil (idoneidad emocional y ecológica); favorece establecer conexiones matemáticas (idoneidad epistémica y ecológica); se intuye en qué consiste el problema (idoneidad interaccional y cognitiva); favorece el uso de relaciones lógicas antes que la aplicación de algoritmos mecánicamente (idoneidad epistémica); y favorece crear nuevos problemas mediante variaciones (idoneidad epistémica).

En la escuela los alumnos aprenden a centrarse en los resultados de sus propias resoluciones de problemas sin examinar otras resoluciones (Mallart, 2014) y raras veces tienen la oportunidad de verse implicados en algún proceso de formulación de problemas. De este modo tiene lugar un proceso de culturización sobre la aceptación de que los problemas que otros crean son los que necesitan resolver (Ellerton, 2013). Pero los alumnos de magisterio tienden a asumir que ellos siempre dispondrán de otras fuentes (libros de texto o Internet) para proveerse de problemas para plantear a sus futuros alumnos.

El proponer problemas en la formación del profesorado de matemáticas puede percibirse tanto como el objetivo como el medio para ayudar a desarrollar modelos mentales, modelar los fenómenos y aplicar varias representaciones. Crespo (2003) comenta que mientras se ha focalizado la atención en la habilidad para resolver problemas matemáticos de los maestros, se ha dejado de lado su habilidad para construir y proponer problemas a sus alumnos. Muchos maestros no parecen haber desarrollado habilidades en la proposición de problemas (Pelczer y Gamboa, 2011; Singer *et al*., 2011). Rowland *et al.* (2003) consideran que en la práctica de la enseñanza, los maestros deberían trabajar la competencia de proponer problemas, como mínimo, en la reformulación de un enunciado dado, para poder adaptarlo a un propósito educativo. Salazar (2014) señala la importancia de tener en cuenta una fase previa a la variación y creación de problemas, en la que, dado un problema, se piense en la intención que tuvo su autor al crearlo. Según esta investigadora, en el contexto de la formación inicial de futuros profesores de matemáticas, esta actividad resulta tanto o más útil que la misma variación de problemas.

Objetivos

La pregunta que nos hemos planteado en esta investigación es ¿qué aspectos son necesarios para que un futuro maestro sea capaz de proponer buenos problemas? Una primera respuesta parcial es que son necesarios ciertos criterios para determinar qué se puede considerar un buen problema, lo cual nos lleva a otras preguntas como las siguientes: ¿cuáles son estos criterios?, ¿cómo y cuándo se usan de manera efectiva?, etc. Para responder a estas preguntas hemos formulado dos primeros objetivos: a) conocer sus ideas previas sobre lo que es un "buen problema"; b) determinar los cambios que produce en sus ideas previas la reflexión didáctica sobre qué se debe considerar como buen problema.

Dado que el conocimiento y uso de criterios para seleccionar y crear buenos problemas está relacionado con la competencia en el análisis didáctico de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y con la competencia de resolución de problemas, también nos hemos propuesto los objetivos: c) determinar su competencia en resolución de problemas; d) determinar su competencia en análisis de la actividad matemática.

Para conseguir estos cuatro objetivos, hemos: 1) diseñado e implementado una secuencia de tareas profesionales cuya finalidad es propiciar, en los futuros maestros de primaria, la reflexión sobre las características que debe tener un buen problema de matemáticas, a fin de que ellos puedan llegar a proponerlos a sus futuros alumnos; y 2) investigado cómo el proceso de resolución de esta secuencia de tareas se relaciona con la competencia matemática y con la de análisis didáctico de futuros profesores que, según orientaciones curriculares, son competencias clave en la formación de maestros de primaria.

Metodología

Participantes. La muestra escogida fue una clase de 36 estudiantes de la asignatura de Didáctica de la Geometría de segundo curso del Grado de Maestro de Educación Primaria en la Universidad de Barcelona. Al comenzar el curso la mayoría de los alumnos manifiestan la necesidad de aprender a enseñar matemáticas, pero confiesan poca simpatía hacia éstas. Se trata de alumnos con diferente nivel de competencia matemática, aunque mayoritariamente el nivel es bajo. El nivel de comprensión lectora es excelente. Esta investigación se llevó a cabo durante el curso académico.

Instrumentos de recolección según el tipo de información. En esta investigación se utilizaron diferentes instrumentos de registro escrito para recopilar diferentes tipos de información: hojas de trabajo con tareas propuestas, diario de campo, producciones de los alumnos y registros en el *moodle* de la asignatura.

Fases de la investigación. Las fases de la investigación fueron básicamente tres: diseño de la secuencia de tareas profesionales, implementación y análisis de las producciones de los futuros maestros.

Para el diseño se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos:

1. La longitud de la secuencia (hojas de trabajo) fue de siete tareas.
2. El tipo de requerimiento fue diferente según la tarea: a) expresión de opiniones sobre qué es un buen problema (tareas 1, 3, 5 y 7); b) creación de problemas del ciclo superior de primaria (tareas 1, 3, 6 y 7); c) resolución de problemas, creados por ellos o por alguno de sus compañeros (tareas 1, 3, 4, 6 y 7); d) análisis de la actividad matemática necesaria para resolver un problema (tareas 4 y 7); e) lectura y comentario de artículos (tarea 5).
3. Desde la perspectiva de las competencias profesionales, además de la competencia matemática se tuvo en cuenta la competencia de comunicación y la de análisis y valoración de la actividad matemática.
4. El entorno matemático de las tareas fue la geometría plana del último ciclo de primaria y los procesos de creación y resolución de problemas.
5. La organización fue trabajo individual (tareas 1-6), trabajo en pequeño grupo (tarea 7) y discusión en gran grupo (tareas 2, 4 y 5).

Descripción de la implementación de la secuencia de tareas

El primer objetivo era diseñar e implementar una secuencia de tareas profesionales cuya finalidad fuese propiciar la reflexión sobre las características que debe tener un buen problema de matemáticas. En este apartado se explica su implementación.

La primera tarea consistió en un cuestionario inicial cuyo objetivo era hacer aflorar las ideas previas de los estudiantes de profesorado sobre lo que se podía considerar un buen problema. Se les preguntaba sobre: características de los buenos problemas; ventajas de proponerlos en la clase de Primaria y en la de Didáctica de las Matemáticas; diferencias entre resolver y proponer problemas; en qué se complementa la resolución con la proposición de problemas; requisitos que ellos consideraban que debían tener para proponer buenos problemas a sus futuros alumnos y qué aspectos se deben considerar para proponer buenos problemas; su opinión sobre si es más difícil crear o resolver problemas; relación entre crear problemas y evaluar. El cuestionario inicial también proponía plantear y resolver dos problemas geométricos atendiendo a la consigna de que en ambos debían aparecer un triángulo y otra figura plana.

La segunda tarea consistió en presentar al gran grupo los resultados a la primera pregunta del cuestionario 1 (Tabla 1).

Tabla 1. Características de un buen problema según los alumnos

Nº	Criterios	F.A.
1	Datos claros	16
2	Datos suficientes	11
3	Adecuados a los conocimientos que tienen	12
4	Objetivo inteligible	16
5	Coherencia entre los datos y lo que se pide	14
6	Admite varias resoluciones	3
7	Lenguaje claro y familiar	19
8	No resoluble en poco tiempo	1
9	No directamente resoluble mediante una fórmula o algoritmo	1
10	Representa un reto	4
11	Permite un trabajo experimental inicial	1
12	Ha de proponer situación familiar y la respuesta ha de ser real	6
13	Orden de los datos	1
14	Ha de tener solución (al menos una)	5
15	Frases cortas y precisas	3
16	Resultados exactos (no decimales)	1
17	Enunciado sencillo	2
18	Se debe haber trabajado algún problema similar con anterioridad	1
19	Relaciona conceptos trabajados	1

A continuación los criterios 14 y 16 se eliminaron después de que el profesor argumentase que no eran válidos. Un problema no debe necesariamente tener solución y, en muchos casos, la solución no es exacta. Por último, el profesor les hizo observar (Tabla 2) que los otros criterios se podían agrupar en cuatro bloques: a) el bloque I tiene que ver con que el que resuelve el problema tenga los conocimientos matemáticos necesarios para poder hacerlo, así como el conocimiento sobre algunas estrategias generales de resolución de problemas, de manera que el problema no le presente una dificultad insalvable; b) el bloque II consta de las ideas relativas a la estructura de los enunciados (información y requerimiento); c) el bloque III se relaciona con la distinción entre ejercicio y problema; d) el bloque IV se relaciona con procesos matemáticos implicados en la resolución del problema.

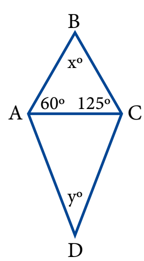
Tabla 2. Agrupación en bloques de las características de un buen problema

Bloque	Ideas nucleares	Criterio propuesto
I	La dificultad no es demasiado grande y se percibe que la solución es alcanzable. Los contenidos que se tratan y/o las estrategias resolutivas se conocen.	3, 19, 10 (contenidos), 18 (procesos=estrategias)
II	Se percibe claramente en qué consiste el problema (determinar algo, demostrar, mostrar…).	1, 2, 4, 5, 7, 13, 15, 17
III	Se intuye un camino para conjeturar u obtener la solución. Favorece el uso de relaciones lógicas antes que el uso mecánico de algoritmos.	6, 8, 9, 10
IV	Permite experimentar para aceptar/rechazar conjeturas. Permite establecer conexiones matemáticas. Se conocen otros problemas similares y se puede repetir la manera de proceder.	11 (ensayo y error) 12 (contextualizar, conjeturar…) 18

Figura 1. Los tres problemas seleccionados

1.- Dibuja un triángulo isósceles que tenga como base el segmento AB:

2.- En el dibujo, la figura de vértices ABC es un triángulo equilátero, y la de vértices ADB es un triángulo isósceles. Si el ángulo CBD es de 125º, ¿cuánto mide x+y? Dato: el ángulo del vértice A en el triángulo equilátero mide 60º.



3.- Dentro de un círculo de 6.8cm de longitud se encuentra un hexágono regular cuya apotema mide 3cm. Calcula el área de uno de los triángulos equiláteros que se forman al unir dos vértices contiguos y el centro.

La tercera tarea consistió en devolver a cada alumno la pregunta número 10 del cuestionario inicial donde tenían que redactar dos problemas y solucionarlos. El objetivo era que justificasen, según el listado confeccionado entre todos (Tabla 2), que los dos problemas que habían propuesto se podían considerar "buenos". En el caso contrario, debían variarlos (o crear otros) y justificar por qué ahora sí se podían considerar "buenos".

Los investigadores seleccionaron tres problemas (Fig. 1), entre los propuestos por los alumnos, de manera que exigieran para su resolución diversos grados de riqueza de actividad matemática (alto, medio y bajo), entendida ésta en términos de presencia de procesos matemáticos relevantes. La consigna de la cuarta tarea fue que primero resolvieran estos tres problemas, después analizaran y describieran individualmente la actividad matemática realizada para resolverlos y, por último, que expusieran al gran grupo las razones por las que habían asignado el grado (alto, medio o bajo) a cada problema.

Tal como se esperaba, los alumnos tuvieron dificultades para entender la consigna y preguntaron qué se debía entender por actividad matemática. El profesor se limitó a hacer algunos comentarios sobre que convenía distinguir entre la tarea y la actividad matemática realizada para resolverla; comentó que ésta consistía en una secuencia de acciones (prácticas) en la que se utilizaban representaciones, definiciones, procedimientos; que si había representaciones era porque se había realizado un proceso de representación, y si había un argumento había un proceso de argumentación. También comentó otros procesos, como el de resolución de problemas y el de modelización. El profesor escribió en la pizarra cuatro términos: representaciones, definiciones, procedimientos y procesos. El objetivo era dar alguna herramienta para el análisis de la actividad matemática, pero sin llegar al extremo de dar un modelo explícito para el análisis de dicha actividad (en concreto, no se citó explícitamente la categoría "proposición" o "propiedad").

La quinta tarea consistió en proporcionar a los alumnos dos documentos, elaborados por expertos en la creación de problemas, sobre las características que debe tener un buen problema (Xavier de Mello, 2000; Malaspina, 2012). A partir de estas lecturas se les solicitó que ampliasen (si lo consideraban necesario) las características de un buen problema que se habían consensuado en la segunda tarea. Como resultado de la puesta en común se añadieron seis nuevos criterios: a) resulta interesante, atractivo o útil resolverlo; b) permite crear nuevos problemas haciendo variaciones, trabajando otros aspectos matemáticos o didácticos; c) facilitan la comprensión de los conceptos trabajados; d) son auto corregibles; e) su planteamiento y resolución posibilitan la adquisición/construcción de nuevos conocimientos; f) inducen a plantearse buenas preguntas que con sus respuestas llegan a la solución.

Estos criterios se incorporaron a los bloques de la Tabla 2, con lo que se obtuvo un nuevo listado de características de un buen problema (Tabla 3).

Tabla 3. Listado final de características de un buen problema

Ideas
Bloque 1
La dificultad no es demasiado grande y se percibe que la solución es alcanzable Los contenidos que se tratan y/o las estrategias resolutivas se conocen
Se debe haber trabajado algún problema similar con anterioridad
Relaciona conceptos trabajados anteriormente
Adecuados a los conocimientos que tienen
Resulta interesante, atractivo o útil resolverlo
Facilitan la comprensión de los conceptos trabajados anteriormente
Bloque 2
Se percibe claramente en qué consiste el problema (determinar algo, demostrar, mostrar…) Se puede intuir un camino para conjeturar u obtener las soluciones
Datos suficientes
Lenguaje claro y familiar
Objetivo inteligible
Coherencia entre los datos y lo que se pide
Orden de los datos
Frases cortas y precisas
Enunciado sencillo
Inducen a plantearse buenas preguntas que con sus respuestas llegan a la solución

Tabla 3. Listado final de características de un buen problema (continuación)

Ideas
Bloque 3
Se intuye un camino para obtener la solución o conjeturar una solución Se pueden establecer conexiones matemáticas entre varios temas (matemáticos o no) Favorece el uso de relaciones lógicas antes que el uso mecánico de algoritmos
Admite varias resoluciones
No resoluble en poco tiempo
No directamente resoluble mediante una fórmula o algoritmo
Son auto corregibles
Bloque 4
Permite hacer verificaciones (experimentar) para mantener o rechazar las conjeturas Permite establecer conexiones matemáticas, ya sea entre varios temas matemáticos con situaciones reales o con otros campos del conocimiento Se conocen otros problemas similares y se puede repetir la manera de proceder
Permite un trabajo experimental inicial
Ha de proponer una situación cercana/familiar y la respuesta ha de ser real
Permite crear problemas haciendo variaciones, trabajando otros aspectos matemáticos
El planteamiento y resolución posibilitan la adquisición/construcción de conocimientos

Fuente: elaboración propia.

La sexta tarea consistió en que cada alumno recuperase los dos problemas que había creado en la tarea 2 (propuestos primero por ellos en la tarea 1 y modificados, o no, en la tarea dos) y se les dio la consigna de que justificasen que eran buenos problemas según este nuevo listado de características (Tabla 3). En caso contrario, debían reformularlos.

La séptima tarea consistió en un trabajo en grupo. Primero, en pequeños grupos, se les pidió que crearan dos problemas de geometría para uno de los seis cursos de educación primaria (6-12 años), de manera que: a) entre todos los grupos se cubrieran los seis niveles; b) los contenidos necesarios para su resolución fueran coherentes con el currículo oficial; y c) los problemas propuestos fueran buenos problemas de acuerdo a los criterios de la Tabla 3. A continuación, cada grupo presentó los resultados al gran grupo.

Análisis de datos

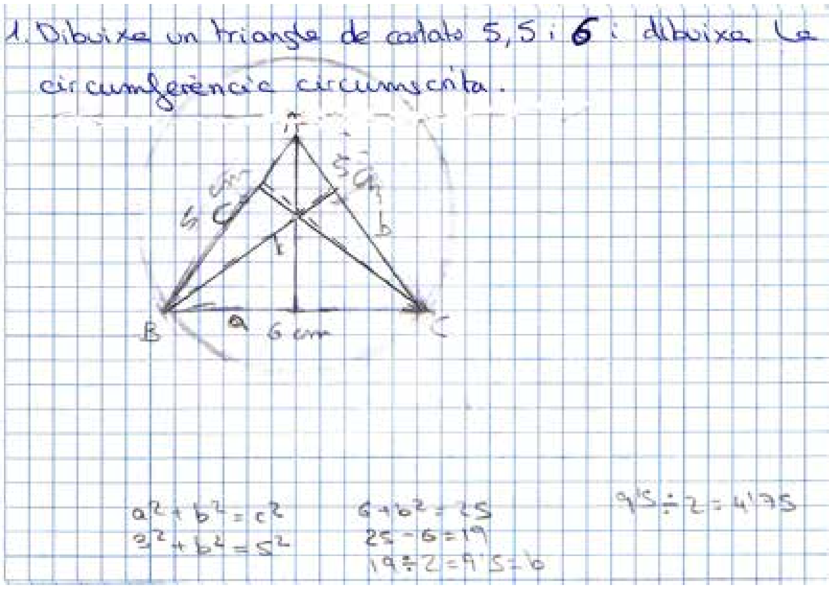
Con relación a la primera tarea hay que resaltar que los alumnos de magisterio en España tienen una formación matemática diversa y su nivel de competencia matemática es bajo. El grupo de alumnos que participaron en esta experiencia cumple estas características. Muchos de estos alumnos resolvieron mal algunos de los problemas que ellos mismos habían propuesto, como se puede observar en el ejemplo (Fig. 2).

Las ideas previas que tenían los futuros maestros sobre lo que se debe entender por un buen problema se pueden agrupar en cuatro aspectos: 1) tiene que estar en la zona de desarrollo próximo del alumno para que éste lo pueda resolver;[3] 2) debe de tener un enunciado coherente con una pregunta clara; 3) debe de ser un problema, y no un ejercicio; y 4) en su resolución se deben realizar procesos matemáticos. La mayoría priorizó el segundo aspecto, como se evidencia en las frecuencias absolutas de la Tabla 1. También hay que resaltar que algunos alumnos propusieron características que la comunidad interesada en la educación matemática no considera propias de los "buenos" problemas (ha de tener solución y ésta ha de ser un número exacto).

Otro aspecto a resaltar con relación a la tercera tarea es que el hecho de establecer una lista común de criterios, en la que se habían suprimido criterios mencionados por alguno de los alumnos, y aplicar esta lista a los problemas que ellos habían propuesto, produjo, entre otros aspectos, que alumnos que habían

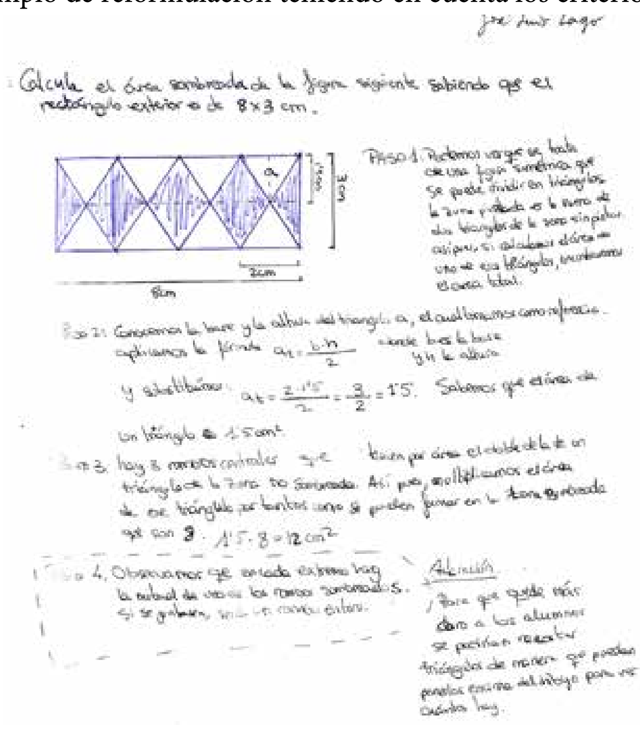
3 Según Vygotsky (1999), es la distancia entre el nivel real de desarrollo determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema y el nivel de desarrollo potencial, determinado por la capacidad de resolver un problema con la colaboración de otra persona más capaz.

Figura 2. Ejemplo de problema mal resuelto



utilizado alguno de los criterios eliminados, además de modificar los problemas, modificaron el criterio eliminado. Este es el caso del siguiente alumno que, si bien en su respuesta al cuestionario inicial no había considerado explícitamente el criterio "resultado exacto" como uno de los criterios que debe cumplir un buen problema, sí lo había utilizado implícitamente. A continuación se expone la reformulación y resolución inicial (Fig. 3):

Figura 3. Ejemplo de reformulación teniendo en cuenta los criterios eliminados



Reflexión primera:

> Aunque el resultado es un número exacto, uno de los datos es decimal. Aun así, no debería suponer un gran problema. De todas formas, podrían cambiarse los valores para que no hubiera ningún número decimal.

Reflexión segunda:

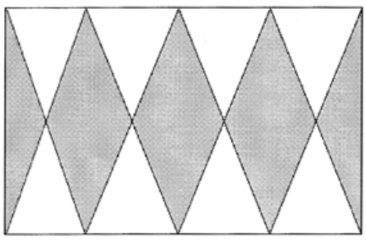
> …he cambiado los valores porque seguramente hay pocas cenefas que tengan una altura de 3cm. Aunque teniendo la cenefa en clase, deberían utilizarse valores reales…

Reformulación y resolución final (Fig. 4):

Figura 4. Ejemplo de reformulación y resolución final

El enunciado final podría ser algo parecido a:

1. **Calcula el área de las figuras azules de la cenefa de la pared de clase sabiendo que tiene una altura de 8 centímetros y una longitud de 13 cm.**



A continuación,

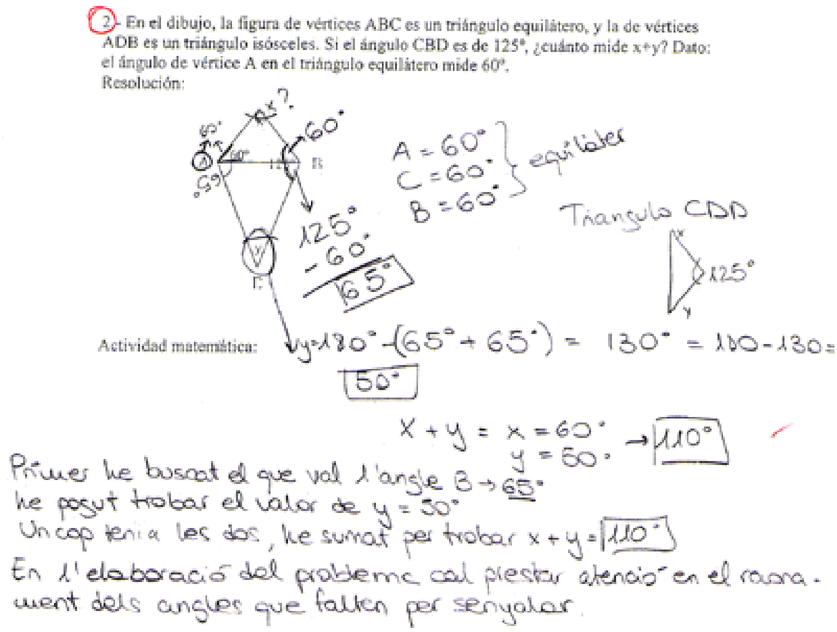
A) Combina la colocación de los triángulos azules y crea una nueva cenefa sin cambiar el área utilizado por los triángulos azules.
B) Utilizando polígonos regulares, crea tu propia cenefa y calcula su área.

Con relación a la cuarta tarea, lo primero que hay que resaltar es que dos terceras partes del grupo no tienen un nivel de competencia matemática que les permita resolver un problema dirigido a alumnos de primaria que había propuesto un compañero suyo. En concreto no pudieron resolver el problema 3 (calcular el área de uno de los seis triángulos que forman parte de un hexágono inscrito en una circunferencia). Esta dificultad se consideró una evidencia de falta de competencia matemática de estos futuros maestros de primaria, que corroboró lo ya observado en la tarea 1.

Al observar la competencia en análisis didáctico de la actividad matemática realizada para resolver los tres problemas propuestos, podemos afirmar que las producciones de los alumnos muestran niveles de análisis muy diferentes: en un extremo tenemos el alumno que no hace ninguna descripción de la actividad matemática y se limita a escribir la respuesta (correcta o incorrecta) del problema; después tenemos el alumno que, además de escribir su resolución, realiza una descripción donde el énfasis se pone en narrar las acciones que realizó, pero sin categorizarlas en términos de definiciones, procedimientos, etc.[4] Este último caso sería el caso del alumno siguiente (Fig. 5):

4 Según PISA (OCDE, 2003), existen tres procesos diferentes: a) formulación matemática de situaciones; b) empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos; c) interpretación, aplicación y valoración de los resultados matemáticos. Las capacidades matemáticas que ayudan a interpretar, aplicar y valorar los resultados matemáticos que subyacen a los procesos anteriores son: comunicación, matematización, representación, razonamiento y argumentación, diseño de estrategias para resolver problemas, utilización de operaciones y lenguaje simbólico, y uso de herramientas matemáticas.

Figura 5. Ejemplo de resolución y descripción sin categorización


2- En el dibujo, la figura de vértices ABC es un triángulo equilátero, y la de vértices ADB es un triángulo isósceles. Si el ángulo CBD es de 125°, ¿cuánto mide x+y? Dato: el ángulo de vértice A en el triángulo equilátero mide 60°.

Resolución:

A = 60°
C = 60°
B = 60° } equilàter

Triangulo CDB

125° − 60° = 65°

Actividad matemática:

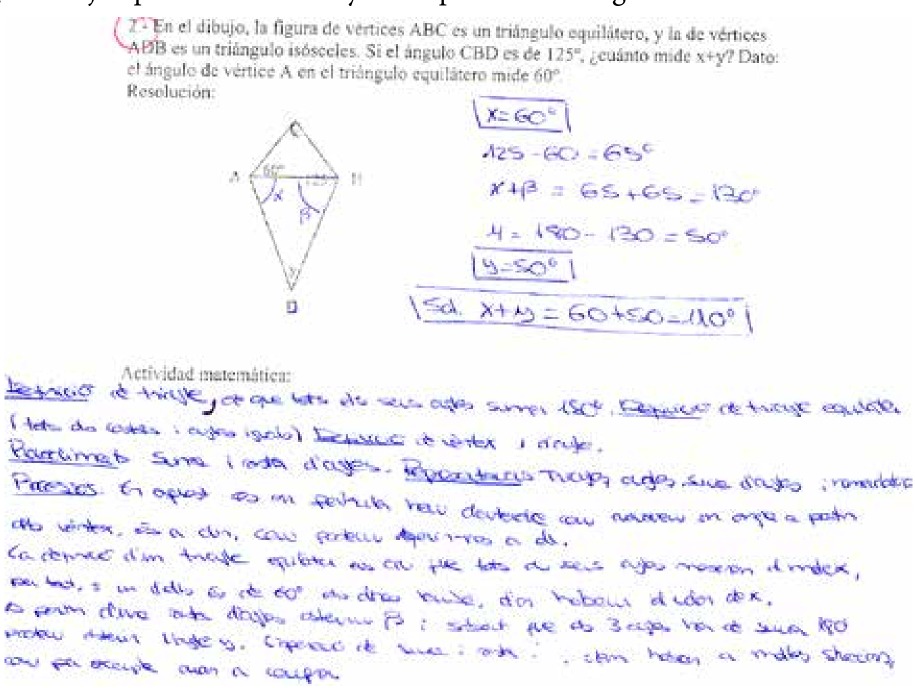
y = 180° − (65° + 65°) = 130° = 180 − 130 = 50°

x + y = x = 60°
y = 50° → 110°

Primer he buscat el que val l'angle B → 65°
he pogut trobar el valor de y = 50°
Un cop tenia les dos, he sumat per trobar x + y = 110°
En l'elaboració del problema cal prestar atenció en el norma-
ment dels angles que falten per senyalar.

Otro tipo de análisis es el que realizan los alumnos que estuvieron atentos a la explicación que dio el profesor. Ellos utilizaron las categorías que el profesor comentó y escribió en la pizarra (representaciones, procedimientos, definiciones y procesos). Los alumnos que utilizaron estas cuatro categorías cuando consideraron el proceso de argumentación lo describen mediante una secuencia de acciones. Es el caso del siguiente alumno (Fig. 6):

Figura 6. Ejemplo de resolución y descripción con categorización indicada en clase


2- En el dibujo, la figura de vértices ABC es un triángulo equilátero, y la de vértices ADB es un triángulo isósceles. Si el ángulo CBD es de 125°, ¿cuánto mide x+y? Dato: el ángulo de vértice A en el triángulo equilátero mide 60°.

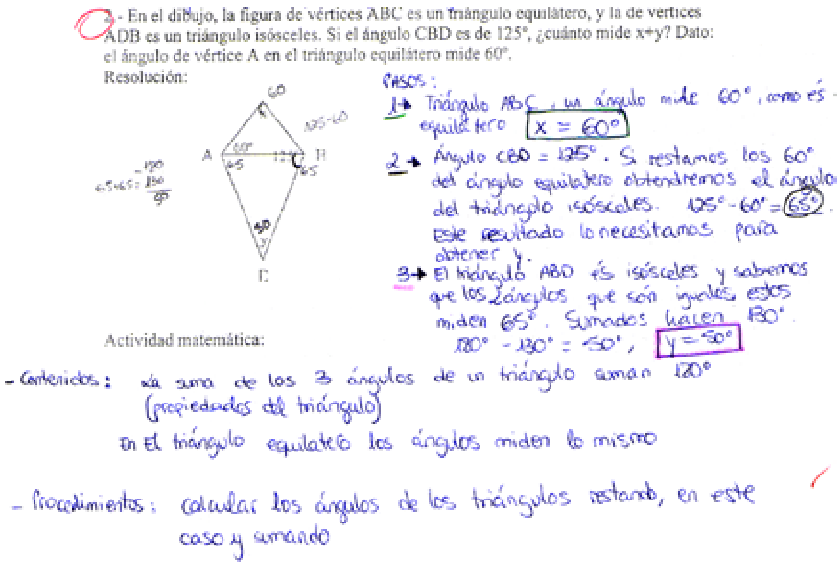
Resolución:

x = 60°
125 − 60 = 65°
α + β = 65 + 65 = 130°
y = 180 − 130 = 50°
y = 50°
Sol. x + y = 60 + 50 = 110°

Actividad matemática:

Otros alumnos utilizaron categorías de los documentos curriculares (por ejemplo, como se muestra en la Fig. 7, realizaron el análisis con tres categorías: contenido, procedimiento y pasos):

Figura 7. Ejemplo de resolución y descripción con categorización no indicada en clase



En general, se observa que los alumnos utilizan constructos diversos y muestran niveles de análisis de la actividad matemática muy diferentes, aunque mayoritariamente se trata de análisis poco detallados, lo cual es lógico si se tiene en cuenta que no han recibido una instrucción en la que se les haya enseñado una técnica específica para describir la actividad matemática.

La tarea 5, tal como se explicó en el apartado anterior, permitió que la lista de criterios consensuada en la tarea 2 se ampliase con seis nuevos criterios. Por otra parte, el uso de esta nueva tabla de criterios en la tarea 6, llevó a algunos alumnos a considerar que los problemas que habían dado por "buenos" en la tarea 3 podían ser mejorados si se tenían en cuenta estos nuevos criterios. Este es el caso de la alumna siguiente:

> […]
> Problema 1:
> Estos son los ítems que considero que no cumple mi problema: lenguaje claro y familiar, objetivo inteligible, no resoluble en poco tiempo (depende del alumno), auto corregible, inducen a plantearse buenas preguntas que con sus respuestas llegan a la solución. Por lo tanto, he realizado la siguiente modificación del enunciado, con el propósito de cumplir estas ideas y mejorar así el problema:
>
> Divide un cuadrado de 20cm de lado en cuatro partes iguales de manera que obtengas 4 cuadrados más pequeños que el inicial. Ahora traza una diagonal de uno de estos cuadrados para obtener 2 triángulos. ¿Cuál es el área (en dm) de uno de ellos y cuánto miden sus lados? ¿Qué fracción corresponde a esta porción con respecto al cuadrado inicial?

En la séptima tarea cada grupo de alumnos propuso dos problemas, los resolvió, realizó un análisis de la actividad matemática necesaria para la resolución de cada problema y, por último, los valoró según los criterios de la Tabla 3.

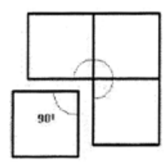
La resolución en este caso se hizo correctamente, a diferencia de lo que sucedió en la tarea 1 (que era individual). El análisis de la actividad matemática también mejoró con respecto al análisis individual realizado en la tarea 4. Se observó también una diferencia respecto a la valoración de los problemas con referencia a la valoración individual realizada en la tarea 3. El hecho de haber introducido en la tarea 4 el análisis de la actividad matemática, y el hecho de que el trabajo era en grupo, propició que la mayoría de los grupos justificasen el cumplimiento de los criterios de un buen problema (Tabla 3) con evidencias extraídas del análisis (realizado anteriormente) de la actividad matemática. Un ejemplo sería el caso del siguiente grupo. Este grupo propuso un problema sobre mosaicos regulares con el objetivo de que los alumnos descubriesen que no se pueden formar mosaicos regulares con pentágonos regulares. El análisis de la actividad matemática que hicieron contempló diferentes aspectos; con relación a los contenidos fue el siguiente:

> […]
> En cuanto a los contenidos, en este problema se trabajan diferentes definiciones: regular, mosaico regular y semiregular, figura, cuadrado, triángulo equilátero, hexágono regular, pentágono regular, vértice.

Este análisis de contenidos fue utilizado luego al asignar el criterio "relaciona conceptos trabajados" del bloque 1 de la Tabla 3, como se observa en su justificación (Fig. 8):

Figura 8. Ejemplo de uso de un análisis de contenidos

En cuanto a los procesos, la argumentación de la posibilidad de 'encajar' figuras o no viene dada por el siguiente razonamiento.



El ángulo que se forma al unir, por ejemplo, 4 cuadrados es de 360º, ya que cada ángulo del cuadrado mide 90º (90x4=360). Por lo tanto, no quedan espacios entre ellos y se pueden acoplar perfectamente formando el mosaico regular.

En cambio, al unir tres pentágonos obtenemos un ángulo de 324º, ya que cada ángulo del pentágono mide 108º (108x3=324). Es decir, que no llega a 360º y por este motivo quedan espacios entre ellos.

El análisis de la actividad matemática que hicieron con relación a los procesos fue:

> El problema relaciona conceptos trabajados con anterioridad, como por ejemplo vértice, ángulo y figuras regulares, por lo tanto es adecuado a los conocimientos que el alumno tiene; además, facilita su comprensión y consolidación (bloque 1).

Este análisis de los procesos fue utilizado posteriormente en la asignación del criterio "la dificultad no es demasiado grande y se percibe que la solución es alcanzable" del bloque 1 de la Tabla 3, como se observa en su justificación:

> El objetivo principal es que el alumno sea capaz de llegar a la conclusión de que es necesario que al encajar las figuras no quede ningún hueco, es decir, que formen un ángulo de 360º, aunque hemos dicho que probablemente llegar a deducir esto puede ser demasiado complicado. Por este motivo

la dificultad del problema no es demasiado grande y se percibe que la solución es alcanzable (bloque 1).

Conclusiones y perspectivas a futuro

Con relación al primer objetivo, por el cual se proponía averiguar qué idea previa de buen problema tenían los futuros maestros, se concluye que éste debe tener un enunciado coherente con una pregunta clara.

Nuestra conclusión sobre el segundo objetivo es que el hecho de establecer criterios sobre lo que es un buen problema, reflexionar sobre ellos, hacerles modificaciones, etc., produce cambios en las ideas previas de los alumnos sobre qué es un buen problema.

Las respuestas de los alumnos a la cuarta tarea permiten clasificarlos en cuatro grupos según su nivel de competencia matemática y de análisis didáctico, con lo cual se da respuesta a los objetivos 3 y 4. El primer grupo no evidenció ni competencia matemática ni competencia en el análisis de la actividad matemática, ambas necesarias para resolver problemas. El segundo grupo evidenció competencia matemática (resolvió los tres problemas de la tarea 3) y en cambio no evidenció competencia en el análisis de la actividad matemática para resolver dichos problemas. El tercer grupo evidenció competencia matemática y competencia en el análisis de la actividad matemática. Por último, el cuarto grupo no evidenció competencia matemática pero en cambió mostró competencia en análisis didáctico de la actividad matemática.

En cuanto al proceso de modificar un problema a fin de mejorarlo, hay que considerar: 1) tener criterios de lo que se debe entender como un buen problema; 2) poner un problema; 3) resolverlo; 4) hacer un análisis de la actividad matemática para su resolución; 5) realizar una propuesta de modificación del problema.

Referente al primer aspecto, todos los alumnos tienen ideas previas sobre lo que es un buen problema y pueden modificarlas en un proceso de elaboración conjunta y consensuada en el gran grupo. Por otra parte, todos los alumnos pueden proponer problemas, pero en cambio no todos los alumnos tienen competencia matemática para resolver los problemas propuestos por ellos o por alguno de sus compañeros. También se observa que los futuros maestros tienen diferente grado de desarrollo de su competencia en el análisis de la actividad matemática. Por último, todos los alumnos pudieron proponer modificaciones justificadas de su problema inicial con base en criterios consensuados en el gran grupo, lo cual produjo un problema mejor que el inicial. Ahora bien, el aspecto más importante para que el alumno proponga una modificación del problema que permita una actividad matemática más relevante que la que permitía su primera formulación, está relacionada, además de con el hecho de tener unos criterios sobre lo que es un buen problema, con su competencia matemática y con su competencia en análisis de la actividad matemática; es esta última la que tiene más influencia. Dicho de otra manera, el alumno que tiene competencia en análisis didáctico y una lista de criterios, consigue aplicarla de manera más eficiente en la reformulación de su problema inicial que aquel alumno que carece de dicha competencia, aunque tenga buen nivel de competencia matemática.

Si el alumno no posee una buena técnica de análisis didáctico y un cierto grado de competencia matemática, por bueno que sea el listado de criterios de lo que es un buen problema, no lo podrá aplicar de manera eficaz. Por tanto, los requisitos principales para proponer buenos problemas contemplan, además de la competencia matemática, dos tipos de herramientas: descriptivas y valorativas. Las primeras sirven para detectar la actividad matemática presente en la resolución del problema; las segundas pueden trabajarse a partir de la elaboración del listado de características.

Con relación a las herramientas descriptivas utilizadas por los alumnos en el análisis de la actividad matemática, hemos observado que éstos ponen el énfasis en técnicas diferentes: 1) guión en el que se contemplan algunas categorías (procedimientos, representaciones, procesos, etc.); 2) narración temporal de la actividad matemática realizada.

La experiencia realizada en esta investigación, tal como proponen (Tichá y Hošpesová, 2013), permitió a los alumnos de magisterio iniciarse en la práctica del maestro en activo el cual, entre otras acciones, debe proponer problemas, modificarlos y evaluar los procedimientos resolutorios de sus alumnos. También coincidimos con estos autores en que las tareas de creación y variación de problemas pueden ayudar a los futuros maestros a mejorar su técnica de análisis de la actividad matemática, siempre y cuando las tareas se hayan diseñado con este objetivo. Por otra parte, no tenemos suficientes evidencias para afirmar que las tareas diseñadas e implementadas en esta investigación hayan ayudado a desarrollar la competencia matemática de manera individual.

Referencias

Charalambous, Charalambos Y. (2010), "Mathematical Knowledge for Teaching and Tasks", *Journal of Teacher Education*, vol. 60, núm. 1-2, pp. 21-34.

Crespo, Sandra (2003), "Learning to Pose Mathematical Problems: Exploring changes in preservice teachers' practices", *Educational Studies in Mathematics,* vol. LII, pp. 243-270.

Da Ponte, João (2007), "Investigations and Explorations in the Mathematics Classroom", *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, vol. XXXIX, núm. 5-6, pp. 419-430.

Ellerton, Nerida (2013), "Engaging Pre-Service Middle-School Teacher-Education Students in Mathematical Problem Posing: Development of an active learning framework", *Educational Studies in Mathematics,* vol. LXXXIII, núm. 1, pp. 87-101.

Font, Vicenç (2011), "Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria", *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, vol. XXVI, pp. 9-25.

Giménez, Joaquim, Vicenç Font y Yuli Vanegas (2013), "Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a Research Process", en Claire Margolinas (coord.), *Task Design in Mathematics Education*, Oxford, The 22nd ICMI Study, pp. 581-590.

Godino, Juan, Carmen Batanero y Vicenç Font (2007), "The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education", *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, vol. XXXIX, núm. 1, pp. 127-135.

Leikin, Roza y Dorith Grossman (2013), "Teachers Modify Geometry Problems: From proof to investigation", *Educational Studies in Mathematics*, vol. LXXXII, núm. 3, pp. 515-531.

Malaspina, Uldarico (2011a), "Resolución de problemas y estímulo del pensamiento optimizador en la educación básica, conferencia", *Actas de la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, Recife, CIAEM-IACME, en: http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/CP-malaspina.pdf (consulta: 13 de enero de 2015).

Malaspina, Uldarico (2011b), *Intuición y resolución de problemas de optimización. Un análisis ontosemiótico y propuestas para la educación básica,* Saarbrücken (Alemania), Lap Lambert Academic Publishing GMBH & Co.KG/ Editorial Académica Española.

Malaspina, Uldarico (2012), "Resolución de problemas y estímulo del pensamiento optimizador en la educación básica", *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, vol. 7, núm. 10, pp. 165-181.

Mallart, Albert (2014), "La resolución de problemas en la prueba de matemáticas de acceso a la universidad: procesos y errores", *Educatio Siglo XXI*, vol. XXXII, núm. 1, pp. 233-254.

Margolinas, Claire y Floriane Wozniak (2012), *Le nombre à l'école maternelle, une approche didactique,* Bruselas, De Boeck.

Mason, Jennifer (2002), *Researching your own Practice: The discipline of noticing*, Londres, Routledge and Falmer.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000), *Principles and Standards for School Mathematics,* Reston, NCTM.

OCDE (2003), *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills*, París, OCDE.

Pelczer, Ildico y Fernando Gamboa (2008), "Problem Posing Strategies of Mathematically Gifted Students", en Roza Leikin (coord.), *Proccedings of the 5th International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students*, Haifa (Israel), Center for Educational Technology (CET), pp. 193-199.

Rowland, Tim, Peter Huckstep y Anne Thwaites (2003), "Observing Subject Knowledge in Primary Mathematics Teaching", *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, vol. XXIII, núm. 1, pp. 37-42.

Salazar, Lorena (2014), "Diseño de tareas a partir de la modificación de problemas planteados en libros de texto de matemática", *Paradigma*, vol. XXXV, núm.1, pp. 55-77.

Singer, Florence, Nerida Ellerton, Jinfa Cai y Eddie Leung (2011), "Problem Posing in Mathematics Learning and Teaching: A research agenda", en Behine Ubuz (coord.), *Developing Mathematical Thinking*, vol. 1, Ankara, PME, pp. 137-166.

Swan, Malcolm (2007), "The Impact of Task-Based Professional Development on Teachers' Practices and Beliefs: A design research study", *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 10, núm. 4, pp. 217-237.

Tichá, Marie y Alena Hospesová (2013), "Developing Teachers' Subject Didactic Competence through Problem Posing", *Educational Studies in Mathematics*, vol. LXXXIII, núm. 1, pp. 133-143.

Vygotsky, Liev Semionovich (1999), *Pensamiento y lenguaje: teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas*, Buenos Aires, Fausto.

Xavier de Mello, Alicia (2000), "Enseñar y aprender matemáticas a partir de problemas", *Revista Quehacer Educativo,* vol. XLIII, septiembre, pp. 25-33.