Nova Scientia
Revista de Investigación de la Universidad De La Salle Bajío

Revista Electrónica Nova Scientia

Los campos fantasmas en la renormalización de un modelo Lagrangiano t-J
The fields ghost in the renormalization of Lagrangian t-J model

Oscar P. Zandron [1, 2]

[1]Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, UNR, Rosario, Argentina
[2] Instituto de Física Rosario - CONICET

Argentina

Oscar P. Zandron. E-Mail: ozandron@ifir-conicet.gov.ar

Resumen

En presente trabajo hemos tratado el rol de los campos fantasmas en el proceso de renormalización del formalismo Lagrangiano perturbativo para un modelo t-J. Mostramos que con la incorporación de campos fantasmas apropiados en los propagadores y vértices de la teoría, la misma puede ser renormalizada a todo orden. Esto se pone en evidencia en el estudio detallado de la renormalización del propagador ferromagnético del magnón, mostrando el ablandamiento térmico de la frecuencia. También hemos analizado el caso antiferromagnético, y estos resultados fueron confrontados con estudios previos en teorías del "spin-polarón".

Palabras clave: campos fantasmas, proceso de renormalización, formalismo Lagrangiano, modelo t-J.

Recepción: 08-10-2010 *Aceptación: 19-05-2011*

Abstract

The present work treats the role of ghost fields in the renormalization procedure of the Lagrangian perturbative formalism of the t-J model. We show that by introducing proper ghost field variables, the propagator and vertices cam be renormalized to each order. In particular, the renormalized ferromagnetic magnon propagator coming from our previous Lagrangian formalism is studies in detail, and it is shown how the thermal softening of the magnon frequency is predicted by the model. The results are confronted with the previous one obtained by means of the spin-polaron theories.

Key words: ghost fields, renormalization procedure, Lagrangian perturbative formalism, t-J model.

1. Introducción:

Varios artículos interesantes se han escrito para explicar la transformación que tiene lugar en la correlación de "spin" [1-6] cuando la carga interactúa fuertemente con los grados de libertad del "spin" [7-11]. La forma usual de tratar este problema es asumir que en la fase magnética al "spin" se lo representa como un bosón, mientras que en la fase paramagnética se lo representa como un fermión ("slave-particle") [6, 12-17]. En esta representación el "spin" y la carga son grados de libertad desacoplados. Este escenario es muy restrictivo y torna dificultosa una descripción adecuada de las excitaciones en la región donde están presentes correlaciones magnéticas fuertes sin una fase paramagnética.

Por otro lado, el modelo de Hubbard generalizado describe N bandas degeneradas correlacionadas en el límite U infinito para una expansión N grande, usando la técnica del bosón esclavo es posible evaluar un sistema fuertemente correlacionado, y en consecuencia puede mostrarse que las correcciones $1/N$ da lugar a diferentes inestabilidades superconductoras que dependen de la estructura de bandas y el factor de llenado [18, 19].

Un punto de vista alternativo es encontrar una nueva forma para describir las excitaciones de "spin" y carga para un sistema fuertemente correlacionado, dicho camino es la representación supersimétrica de los operadores de Hubbard en un álgebra graduada spl(2,1) [20], la cual unifica las representaciones de bosón y fermión esclavos. Desde el punto de vista de la teoría de campos las diferentes representaciones de los operadores de Hubbard se reduce a un sistema Lagrangiano de vínculos de primera clase. En una segunda cuantificación, la supersimetría de "gauge" local U(1), presente en ambos casos, obliga a introducir condiciones de fijado de "gauge" en el Lagrangiano efectivo, y como consecuencia de esto aparecen en el modelo parámetros indeterminados.

Los modelos de partícula esclava poseen una invariancia de "gauge" local la cual se destruye en la aproximación de campo medio, esta invariancia tiene asociado un vínculo primera clase el cual es difícil de manejar a la hora de cuantificar el modelo.

Es por esto que no existe un enfoque estándar para lo diagramas de Feynman del modelo t-J en términos de los operadores de Hubbard que verifican el álgebra graduada spl(2,1), hecho sumamente interesante para la teoría de campo y la materia condensada.

Desde siempre los operadores de Hubbard X fueron una representación natural para tratar los efectos de correlación electrónica. A partir de este hecho henos desarrollado un formalismo

Lagrangiano en el cual las variables de campo son directamente los operadores de Hubbard *X*, y en esta aproximación para el modelo t-J el “spin” y la carga son grados de libertad. Así, los operadores de Hubbard *X* representa las excitaciones físicas reales, y son tratados como objetos indivisibles sin ningún esquema de desacople.

En trabajos previos [21-24], y como resultados a tener en cuanta, hemos construido las diagramática y las reglas de Feynman del modelo a partir del formalismo de integral de camino. Este formalismo perturbativo para el modelo nos permite enfocar el problema principal, el estudio de la renormalización de los propagadores y vértices a todo orden. A partir de la introducción en el formalismo de apropiados campos fantasmas esto es posible. En el presente artículo veremos el procedimiento de renormalización para el caso puramente bosónico mediante la introducción de cuatro variables de Grassmann como los mencionados campos fantasmas.

2. Resultados previos

En esta sección se presentan aquellos resultados que se deben tener en cuenta. A partir de la estructura de vínculos dada en Ref. 20 es posible obtener el Lagrangiano efectivo del modelo (L_{eff}), el cual nos permite construir la diagramática y reglas de Feynman de la teoría basada en un álgebra graduada spl(2,1):

$$\left[\hat{X}_i^{\alpha\beta}, \hat{X}_j^{\gamma\delta}\right]_{\pm} = \delta_{ij} \quad \delta^{\beta\gamma}\hat{X}_i^{\alpha\delta} \pm \delta^{\alpha\delta}\hat{X}_i^{\gamma\beta} \tag{1}$$

El espacio de las variables de campo está integrado por cinco campos bosónicos $X_i^{00}, X_i^{++}, X_i^{--}, X_i^{+-}, X_i^{-+}$ y cuatro campos fermiónicos $X_i^{+0}, X_i^{0+}, X_i^{-0}, X_i^{0-}$, todos X-Hubbard variables de campos.

Así, encontraremos los propagadores y vértices, y mediante una discusión física sobre los propagadores libres, hallaremos las expresiones de la auto-energía bosónica y la renormalización del propagador bosónico. Este último se usó en el estudio de propiedades magnética de cupratos a alta temperaturas.

Es útil recordar que la renormalización de las cantidades físicas en el caso bosónico puro se llevó adelante mediante la introducción de apropiados campos fantasmas Ref. 21.

Siguiendo esta idea nos proponemos estudiar más detenidamente el papel de los campos fantasmas en la renormalización de cantidades físicas definidas en el modelo t-J. Es posible analizar el caso de dos familias de Lagrangianos las cuales mapean en las dos representaciones de partícula esclava, y son útiles para describir sistemas con configuraciones ferromagnética o antiferromagnética. Así, el punto de partida es la funcional generatriz de correlación Z para el modelo t-J, la cual se obtiene por medio de técnicas de la integral de camino Refs. 18 y 19:

$$Z = \int DS_{i1}DS_{i2}DS_{i3}D\Psi_{i-}\Psi^*_{i-}\delta\ \Omega\ \left(\frac{\partial\Xi_1}{\partial\Psi^*_+}\right)_i\left(\frac{\partial\Xi_2}{\partial\Psi_+}\right)_i\ s\det M_{ab}\ {}_i^{1/2} \times$$
$$\times\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial(S,\Psi)}\right)_i \exp\ i\int dt\cdot L(S,\Psi) \tag{2}$$

donde $\partial\mathrm{X}/\partial(S,\Psi)$ es el super Jacobiano de la transformación.
En la ecuación (2), Ω, Ξ_1 y Ξ_2 son los siguientes vínculos segunda clase:

$$\Omega = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - s^2 = 0 \tag{3}$$

$$\Xi_1 = \Psi^*_-\ S_1 + iS_2\ - \Psi^*_+\ s + S_3\ = 0 \tag{4}$$

$$\Xi_2 = \Psi_-\ S_1 + iS_2\ - \Psi_+\ s + S_3\ = 0 \tag{5}$$

La supermatriz simpléctica M_{ab} asociada a las ocho variables de campo X y a los cuatro vínculos es una supermatriz 12x12 (cuyas partes bos-bos y ferm-ferm son 6x6). Es fácil mostrar que el producto $\partial\Xi_1/\partial\Psi^*_+\ {}_i\ \partial\Xi_2/\partial\Psi_+\ {}_i\ s\det M_{ab}\ {}_i^{1/2}\ \partial\mathrm{X}/\partial(S,\Psi$ en la integral de camino (2), evaluado sobre los vínculos, puede ser reescrito como el $s\det M_{ab}$ de una supermatriz 6x6 asociada a tres variables de campos bosónicos S_i, a un vínculos bosónico Ω y a dos campos fermiónicos independientes Ψ^*_- y Ψ_-.

La función de partición (2) es considera a temperatura finita llevando a cabo su transformación en el espacio Euclideo. Usamos la representación integral de la función delta para el vínculo bosónico Ω, así la integral de camino (2) asume su forma final:

$$Z = \int DS_{i1}DS_{i2}DS_{i3}D\Psi_{i-}\Psi^*_{i-}D\lambda_i\ \ s\det M_{ab}\ {}_i^{1/2} \times \exp\left(-\int_0^\beta d\tau\ L^E_{eff}\ \ S,\Psi\ \right) \tag{6}$$

donde $L_{eff}^{E}(S,\Psi)$ se escribe:

$$
\begin{aligned}
L_{eff}^{E}(S,\Psi) = & -\frac{i}{2s}(1-\rho)\sum_i \frac{S_{i2}\dot{S}_{i1}-S_{i1}\dot{S}_{i2}}{s+S_{i3}} - \sum_i \lambda_i\left(S_{i1}^2+S_{i2}^2+S_{i3}^2+s^2\right) - \\
& - s\sum_i \frac{1}{s+S_{i3}}\left(\dot{\Psi}_{i-}^{*}\Psi_{i-}+\dot{\Psi}_{i-}\Psi_{i-}^{*}\right) - 2s\mu\sum_{i,\sigma}\frac{1}{s+S_{i3}}\Psi_{i-}^{*}\Psi_{i-} + \\
& + \sum_{i,j} t_{ij}\bar{\Psi}_{i-}\bar{\Psi}_{j-}^{*}\left[1+\left(\frac{S_{i1}-iS_{i2}}{s+S_{i3}}\right)\left(\frac{S_{j1}-iS_{j2}}{s+S_{j3}}\right)\right] - \\
& - \frac{1}{8s^2}\sum_{i,j} J_{ij}(1-\rho_i)(1-\rho_j)\left[S_{i1}S_{j1}+S_{i2}S_{j2}+S_{i3}S_{j3}-s^2\right]
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

siendo $J_{ij}\rangle 0$ para una configuración ferromagnética y $J_{ij}\langle 0$ para una configuración antiferromagnética.

Por otro lado, la supermatriz simpléctica M_{ab} obtenida a partir de formalismo de Faddeev-Jackiw se escribe como:

$$
M_{AB} = \begin{pmatrix}
0 & \frac{-(1-\rho)}{s(s+S_3)} & \frac{(1-\rho)S_2}{2s(s+S_3)^2} & -2S_1 & 0 & 0 \\
\frac{(1-\rho)}{s(s+S_3)} & 0 & \frac{-(1-\rho)S_1}{2s(s+S_3)^2} & -2S_2 & 0 & 0 \\
\frac{-(1-\rho)S_2}{2s(s+S_3)^2} & \frac{(1-\rho)S_1}{2s(s+S_3)^2} & 0 & -2S_3 & \frac{is\Psi_-^{*}}{(s+S_3)^2} & \frac{is\Psi_-}{(s+S_3)^2} \\
2S_1 & 2S_2 & 2S_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-is\Psi_-^{*}}{(s+S_3)^2} & 0 & 0 & \frac{-i2s}{s+S_3} \\
0 & 0 & \frac{-is\Psi_-}{(s+S_3)^2} & 0 & \frac{-i2s}{s+S_3} & 0
\end{pmatrix}
\qquad (8)
$$

Para ambas configuraciones y bajo ciertas consideraciones, las componentes del campo vectorial real ***S*** se escriben como:

$$
S = (0,0,s') + (\tilde{S}_1,\tilde{S}_2,\tilde{S}_3), \qquad (9)
$$

donde $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3$ son fluctuaciones.

Con el objetivo de obtener la reglas de Feynman, reescribiremos el superdeterminante de la supermatriz M_{ab} que aparece en la ecuación (2) como una integral de camino sobre los supercampos fantasmas de Faddeev-Popov θ_α, Z_i , $\alpha = 1,2,3,4$; $i = 1,2$.-

Calculando resulta:

$$s\det M_{ab} = \frac{\det A}{\det D} \qquad (10)$$

siendo *A* la parte bos-bos y *D* la parte ferm-ferm de la supermatriz M_{ab}.

A partir de la ecuación (8) podemos ver que *A* es una matriz real anti simétrica 4x4 que puede ser escrita como:

$$\det A^{1/2} = \int D\theta_\alpha \exp\left(-\int_0^\beta d\tau\, \theta^T A\theta\right) \qquad (11)$$

donde θ_α son cuatro números reales de Grassmann o campos fantasmas bosónicos.

Idénticamente se puede razonar para $\det D^{1/2}$, determinante de la matriz *D* 2x2:

$$\det D^{1/2} = \int DZ^* DZ \exp\left(-\int_0^\beta d\tau\, Z^* C\, Z\right) \qquad (12)$$

donde $Z = Z_1 + iZ_2$; $Z^* = Z_1 - iZ_2$ son campos escalares complejos, y $C = 2s/\; s + S_3$; $iC = -D_{12} = -D_{21}$.-

De esta forma, el Lagrangiano de los campos fantasmas θ_α y Z se escribe:

$$L_{ghost} = \theta^T A\theta + Z^* C\, Z \qquad (13)$$

y el Lagrangiano total:

$$L = L^E_{eff}\;\; S, \Psi\;\; + L_{ghost}\;\; \theta_\alpha, Z \qquad (14)$$

Por último, los elementos de la matriz M_{ab} en función de las fluctuaciones (9), se escriben:

$$A_{12} = -A_{21} = -\frac{1-\rho}{s\left(s+s'\right)} \sum_{n=0} \left(-1\right)^n \left(\frac{S_3}{s+s'}\right) \tag{15}$$

$$A_{13} = -A_{31} = \frac{\left(1-\rho\right) S_2}{2s\left(s+s'\right)^2} \sum_{n=0} \left(-1\right)^n \left(n+1\right) \left(\frac{S_3}{s+s'}\right) \tag{16}$$

$$A_{14} = -A_{41} = -2S_1 \tag{17}$$

$$A_{23} = -A_{32} = -\frac{\left(1-\rho\right) S_1}{2s\left(s+s'\right)^2} \sum_{n=0} \left(-1\right)^n \left(n+1\right) \left(\frac{S_3}{s+s'}\right) \tag{18}$$

$$A_{24} = -A_{42} = -2S_2 \tag{19}$$

$$A_{34} = -A_{43} = -2\left(s' + S_3\right) \tag{20}$$

$$C = \frac{2s}{s+s'} \sum_{n=0} \left(-1\right)^n \left(\frac{S_3}{s+s'}\right) \tag{21}$$

Es importante remarcar que el paso de una configuración a otra (de ferro a antiferro) se obtiene rotando la segunda sub-red 180º. El $L^E_{eff}\left(S,\Psi\right)$ no es invariante bajo esta transformación, por ende tendremos dos Lagrangianos, uno para cada configuración.

Teniendo en cuanta los resultados anteriores es inmediato obtener la expresión explícitas del Lagrangiano total (14). El L^E_{eff} se obtiene partir de la ecuación (6) para *Z*, exponenciando el superdeterminante de M_{ab} y desarrollando el campo **S** en función de las fluctuaciones (9), así tenemos:

$$
\begin{aligned}
L_{eff}^{E}\left(S,\Psi\right) = & -\frac{i}{2s}\left(1-\rho\right)\sum_{i}\frac{S_{i2}\dot{S}_{i1}-S_{i1}\dot{S}_{i2}}{s+s'}\left[1+\sum_{n=1}\left(-1\right)^{n}\left(\frac{S_{i3}}{s+s'}\right)^{n}\right]- \\
& -\frac{s}{s+s'}\sum_{i}\left(\dot{\Psi}_{i-}^{*}\Psi_{i-}+\dot{\Psi}_{i-}\Psi_{i-}^{*}\right)\left[1+\sum_{n=1}\left(-1\right)^{n}\left(\frac{S_{i3}}{s+s'}\right)^{n}\right]- \\
& -\frac{2s\mu}{s+s'}\sum_{i,\sigma}\Psi_{i-}^{*}\Psi_{i-}\left[1+\sum_{n=1}\left(-1\right)^{n}\left(\frac{S_{i3}}{s+s'}\right)^{n}\right]+\sum_{i,j}t_{ij}\Psi_{i-}\Psi_{j-}^{*}+ \\
& +\frac{1}{\left(s+s'\right)^{2}}\sum_{i,j}t_{ij}\Psi_{i-}\Psi_{j-}^{*}\left[S_{i1}S_{j1}+S_{i2}S_{j2}+i\left(S_{i1}S_{j2}-S_{i2}S_{j1}\right)\right]\times \\
& \times\sum_{n,m=0}\left(-1\right)^{n+m}\left(\frac{S_{i3}}{s+s'}\right)^{n}\left(\frac{S_{i3}}{s+s'}\right)^{m}- \\
& -\frac{J'}{8s^{2}}\sum_{i,I}\left[S_{i1}S_{\left(i+I\right)1}+S_{i2}S_{\left(i+I\right)2}+S_{i3}S_{\left(i+I\right)3}-S_{i1}^{2}-S_{i2}^{2}-S_{i3}^{2}\right]- \\
& -2s'\sum_{i}\lambda_{i}S_{i3}-\sum_{i}\lambda_{i}\left(S_{i1}^{2}+S_{i2}^{2}+S_{i3}^{2}\right)
\end{aligned}
\tag{22}
$$

donde $J'=J(1-\rho)^2$ y Σ_I indica suma sobre primeros vecinos.-

El L_{ghost} se obtiene teniendo en cuenta la ecuación (13) y las expresiones (15) a (21), así tenemos:

$$
\begin{aligned}
L_{ghost}\left(\theta_{\alpha},Z\right) = & \,\theta_{\alpha}^{T}\left(g^{\alpha\beta}\right)^{-1}\theta_{\beta}+\theta_{\alpha}^{T}\left(\Gamma_{a}^{\alpha\beta}V^{a}\right)\theta_{\beta}+\frac{1}{n!}\sum_{n=2}\theta_{\alpha}^{T}\left(\Gamma_{a1\ldots an}^{\alpha\beta}V^{a1}\ldots V^{an}\right)\theta_{\beta}+ \\
& +Z^{*}\left(g\right)^{-1}Z+\frac{1}{n!}\sum_{n=1}Z^{*}\left(\Lambda_{a1\ldots an}V^{a1}\ldots V^{an}\right)Z
\end{aligned}
\tag{23}
$$

3. Cantidades renormalizadas. Auto-energia, propagadore y vertices

A partir de la ecuaciones (22) y (23) podemos definir los propagadores y vértices del modelo.

3.1. Propagadores

La parte bosónica del Lagrangiano (22) puede expresarse en términos de un nuevo campo vector extendido **V** cuyas componente son, $V^a = (S_1, S_2, S_3, \lambda)$. Así, las partes bilineales bosónicas del Lagrangianos (22) puede ser escrita:

$$
L^{B}(V)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}V_{(i)}^{a}\left(q,\omega_{n}\right)D_{(0)ab(ij)}^{-1}V_{(j)}^{b}\left(q,\omega_{n}\right) \tag{24}
$$

donde $D_{(0)ab(i,j)}$ es una matriz hermitiana no singular 4x4 que representa el propagador del campo cuadri-vector V^a. En el espacio de Fourier (q,ω_n), donde q y ω_n son respectivamente el momento y la frecuencia de Matsubara del campo bosónico, asociamos a este propagador libre el siguiente diagrama (de línea continua) conectando los puntos genéricos *a* y *b*:

$$a \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ b$$

Fig 1: $D_{ab(0)ij}$ *Propagador del cuadri-vector bosónico* V^a

La matriz queda:

$$D^{ab}_{(0)}\left(q,\omega_n\right)=\begin{pmatrix} a\cdot\dfrac{\omega_q}{\omega_q^2+\omega_n^2} & a\cdot\dfrac{\omega_n}{\omega_q^2+\omega_n^2} & 0 & 0 \\ -a\cdot\dfrac{\omega_n}{\omega_q^2+\omega_n^2} & a\cdot\dfrac{\omega_q}{\omega_q^2+\omega_n^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{2s'} \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2s'} & -\dfrac{\left(1-\rho\right)\omega_q}{4ss'^2\left(s+s'\right)} \end{pmatrix} \tag{25}$$

donde definimos $a=s\left(s+s'\right)\left(1+\rho\right)$ y ω_q es:

$$\omega_q=\frac{J'z}{8s}\left(s+s'\right)\left(1+\rho\right)\left(1-\gamma_q\right) \tag{26}$$

donde *z* es el número de primeros vecinos, $z\gamma_q=\sum_I \exp\left(iq\cdot I\right)$, e *I* vector de la red.

Análogamente, aplicando una transformación de Fourier en las partes bilineales del Lagrangiano total correspondiente a los otros tres campos restantes $\left(\Psi,\theta_\alpha,Z\right)$, se pueden obtener los tres propagadores correspondiente.

De esta forma tenemos:

$$L^F(\Psi)=\frac{1}{2}\sum_{k,\nu_n}\Psi^*_-\left(k,\nu_n\right)G^{-1}_{(0)}\Psi_-\left(k,\nu_n\right) \tag{27}$$

donde definimos:

$$G_0\left(k,\nu_n\right)=\frac{s+s'}{2s}\cdot\frac{1}{i\nu_n+\left(\varepsilon_k-\mu\right)} \tag{28}$$

En el espacio de Fourier (k,ν_n) asociamos al propagador $G_{(0)}$ el siguiente diagrama (líneas y puntos) conectando los puntos genéricos p y $p´$:

$$p -.-.-.-.- \ p´$$

Fig 2: $G_0 \;\; k,\nu_n$ *propagador del campo fermiónico* Ψ_-

donde k y ν_n son respectivamente el momento y la fracuencia de Matsubara del campo fermiónico, y definimos: $\varepsilon_k = -t\sum_I \exp \;\; -ik\cdot I$.

Por otro lado, observando la ecuación (23), se pueden obtener las cantidades $(g^{\alpha\beta})^{-1}$ y $(g)^{-1}$ que representan respectivamente las inversas de los propagadores de los campos fantasmas θ_α y Z.

Asociamos al propagador $(g^{\alpha\beta})$ del número de Grassmann θ_α el siguiente diagrama (línea de punteada) conectando los puntos genéricos α y β:

$$\alpha \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots \;\; \beta$$

Fig 3: $g^{\alpha\beta}$ *propagador del campo fantasma bosónico* θ_α

y su espresión analítica es la matriz:

$$g_{\alpha\beta} = \;\; 1+\rho \;\; s \;\; s+s´ \;\; \delta^1_\alpha\delta^2_\beta - \delta^2_\alpha\delta^1_\beta \;\; +\frac{1}{2s´} \;\; \delta^3_\alpha\delta^4_\beta - \delta^4_\alpha\delta^3_\beta \qquad (29)$$

Asociamos al propagador (g) del campo escalar complejo Z el siguiente diagrama (línea entrecortada):

$$\gamma \;\_\;\_\;\_\;\_\;\_\; \delta$$

Fig 4: g *propagador del campo fantasma fermiónico* Z

y su espresión analítica es la matriz:

$$g = \frac{s+s´}{2s} \qquad (30)$$

3.2. Vértices

La parte remanente de los Lagragianos (22) y (23) representa los distinto tipos de interacción, bosón-bosón, bosón-fermión, bosón-campo fantasma, solo es necesario tener el cuenta lo que denominaremos vértices de tres y cuatro patas.

La interacción de tres bosónes se escribe:

$$L_{\text{int}}^{3B}(V)=\frac{1}{3!}F_{abc}\left(\omega_1,\omega_2,\omega_3\right)V^a\left(q_1,\omega_1\right)V^b\left(q_2,\omega_2\right)V^c\left(q_3,\omega_3\right) \tag{31}$$

donde:

$$\begin{aligned}F_{abc}\left(\omega_1,\omega_2,\omega_3\right)=&-\frac{1-\rho}{2s\left(s+s'\right)^2}\left[\left(\omega_2-\omega_1\right)\left(\delta_a^1\delta_b^2-\delta_a^1\delta_b^1\right)\delta_c^3+rotaciones\ cíclicas\ índice\,latino\right]\\&-2\left[\delta_a^4\left(\delta_b^1\delta_c^1+\delta_b^2\delta_c^2+\delta_b^3\delta_c^3\right)+rotaciones\ cíclicas\ índice\,latino\right]\end{aligned} \tag{32}$$

Análogamente la interacción de cuatro bosónes se escribe:

$$L_{\text{int}}^{4B}(V)=\frac{1}{4!}F_{abcd}\left(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\right)V^a\left(q_1,\omega_1\right)V^b\left(q_2,\omega_2\right)V^c\left(q_3,\omega_3\right)V^d\left(q_4,\omega_4\right) \tag{33}$$

donde:

$$F_{abcd}\left(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\right)=\frac{1-\rho}{s\left(s-s'\right)^3}\left[\left(\omega_2-\omega_1\right)\left(\delta_a^1\delta_b^2-\delta_a^2\delta_b^1\right)\delta_c^3\delta_d^3+\ldots\right] \tag{34}$$

En el espacio de Fourier, la interacción dos fermiones y un bosón se escribe:

$$L_{\text{int}}^{2F-1B}=\Psi_-^*\left(\nu,k\right)K_a V^a\,\Psi_-\left(\nu',k'\right) \tag{35}$$

donde:

$$K_a=\frac{s}{\left(s+s'\right)^2}\left[i\left(\nu_n+\nu'_n\right)-2\mu\right]\delta_a^3 \tag{36}$$

Similarmente:

$$L_{\text{int}}^{2F-2B}=\frac{1}{2!}\Psi_-^*\left(\nu,k\right)K_{ab}V^aV^b\,\Psi_-\left(\nu',k'\right) \tag{37}$$

donde:

$$\begin{aligned}K_{ab}=&\frac{1}{\left(s+s'\right)^2}\left(\varepsilon_{k+q'}+\varepsilon_{k'-q}\right)\left[\delta_a^1\delta_b^1+\delta_a^2\delta_b^2+i\left(\delta_a^1\delta_b^2-\delta_a^2\delta_b^1\right)\right]+\\&+\frac{2s}{\left(s+s'\right)^3}\left[i\left(\nu+\nu'\right)-2\mu\right]\delta_a^3\delta_b^3\end{aligned} \tag{38}$$

Finalmente escribiremos los vértices que contienen los campos fantasmas, un bosón con dos campos fantasmas bosónicos θ_α y un bosón con dos campos fantasmas fermiónicos Z:

$$\Gamma_1^{\alpha\beta} = -2\left(\delta_1^{\alpha}\delta_4^{\beta} - \delta_4^{\alpha}\delta_1^{\beta}\right) - \frac{1-\rho}{2s\left(s+s\acute{}\right)^2}\left(\delta_2^{\alpha}\delta_3^{\beta} - \delta_3^{\alpha}\delta_2^{\beta}\right) \tag{39}$$

$$\Gamma_2^{\alpha\beta} = -2\left(\delta_2^{\alpha}\delta_4^{\beta} - \delta_4^{\alpha}\delta_2^{\beta}\right) + \frac{1-\rho}{2s\left(s+s\acute{}\right)^2}\left(\delta_1^{\alpha}\delta_3^{\beta} - \delta_3^{\alpha}\delta_1^{\beta}\right) \tag{40}$$

$$\Gamma_3^{\alpha\beta} = -2\left(\delta_3^{\alpha}\delta_4^{\beta} - \delta_4^{\alpha}\delta_3^{\beta}\right) + \frac{1-\rho}{2s\left(s+s\acute{}\right)^2}\left(\delta_1^{\alpha}\delta_2^{\beta} - \delta_2^{\alpha}\delta_1^{\beta}\right) \tag{41}$$

y

$$\Delta_a = -\frac{2s}{\left(s+s\acute{}\right)^2}\delta_a^3 \tag{42}$$

3.3. Renormalización de la auto-energía bosónica

Con la inclusión de los campos fantasmas en el formalismo estamos en condiciones de estudiar la renormalización de la auto-energía bosónica y fermiónica.

En el caso de la auto-energía bosónica Π_{ab} para una configuración ferromagnética, su expresión viene dada por la contribución de los siguientes diagramas a un “loop”:

$$\Pi_{ab} = \sum_{M=1}^{12}\Pi_{ab}^{M} \tag{43}$$

donde la suma para M = 1, …,6 corresponde a las un “loop” construido con solo contribuciones físicas de campos bosónicos y fermiónicos, y las otras seis son las correspondientes a un “loop” con contribución de los campos fantasmas:

$$\Pi_{ab}^{(1)}(\omega,q) = \frac{1}{2N_s}\sum_{\omega\acute{},q\acute{}} F_{adc}(\omega,\omega\acute{})\, D_{(0)}^{de}(\omega\acute{},q\acute{})\, F_{ebf}(\omega,\omega\acute{})\, D_{(0)}^{fc}(\omega\acute{}-\omega,q\acute{}-q) \tag{44}$$

$$\Pi_{ab}^{(2)}(\omega,q) = \frac{1}{2N_s}\sum_{\omega\acute{},q\acute{}} F_{acb}(\omega)\, D_{(0)}^{cd}(0)\, F_{def}(\omega\acute{})\, D_{(0)}^{ef}(\omega\acute{},q\acute{}) \tag{45}$$

$$\Pi_{ab}^{(3)}(\omega,q) = \frac{1}{2N_s}\sum_{\omega\acute{},q\acute{}} F_{acdb}(\omega,\omega\acute{})\, D_{(0)}^{cd}(\omega\acute{},q\acute{}) \tag{46}$$

$$\Pi_{ab}^{(4)}(\omega,q) = -\frac{1}{N_s}\sum_{\nu,k} K_a G_0(k,\nu_n)\, K_b G_0(k-q,\nu_n-\omega_n) \tag{47}$$

$$\Pi_{ab}^{(5)}(\omega,q) = -\frac{1}{2N_s}\sum_{\nu,k} F_{acb}(\omega)\, D_{(0)}^{cd}(\omega\acute{})\, K_d G_0(k,\nu_n) \tag{48}$$

$$\Pi_{ab}^{(6)}(\omega,q) = -\frac{1}{2N_s}\sum_{\nu,k} K_{ab} G_0(k,\nu_n) \tag{49}$$

$$\Pi_{ab}^{(7)}(\omega,q) = -\frac{1}{2N_s}\sum_{\omega',q'}\Gamma_a^{\beta\alpha}(\omega,\omega')\, g_{\alpha\gamma}(\omega',q')\, \Gamma_b^{\gamma\delta}(\omega,\omega')\, g_{\delta\beta}(\omega'-\omega,q'-q) \qquad (50)$$

$$\Pi_{ab}^{(8)}(\omega,q) = -\frac{1}{2N_s}\sum_{\omega',q'}F_{acb}(\omega)\, D_{(0)}^{cd}(\omega',q')\, \Gamma_d^{\beta\alpha}(\omega')\, g_{\alpha\beta}(\omega',q') \qquad (51)$$

$$\Pi_{ab}^{(9)}(\omega,q) = -\frac{1}{2N_s}\sum_{\omega',q'}\Gamma_{ab}^{\beta\alpha}(\omega,\omega')\, g_{\alpha\beta}(\omega',q') \qquad (52)$$

$$\Pi_{ab}^{(10)}(\omega,q) = \frac{1}{2N_s}\sum_{\omega',q'}\Delta_a g\, \Delta_b g \qquad (53)$$

$$\Pi_{ab}^{(11)}(\omega,q) = \frac{1}{2N_s}\sum_{\omega',q'}F_{acb}(\omega)\, D_{(0)}^{cd}(\omega')\, \Delta_d g \qquad (54)$$

$$\Pi_{ab}^{(12)}(\omega,q) = \frac{1}{2N_s}\sum_{\omega',q'}\Delta_{ab} g \qquad (55)$$

donde N_S es el número de sitios en la red.

Es posible mostrar que los infinitos de las seis primeras contribuciones (44-49) originadas por la suma sobre las frecuencias de Matsubara ω' son canceladas con los infinitos que aparecen en las segundas seis contribuciones (50-55), así se puede obtener una expresión renormalizada de la auto-energía bosónica $\mathrm{P}_{ab}^{(R)}$.

Es importante remarcar que el modelo contiene infinitos solo en el desarrollo a un “loop”, y en cálculos a orden superior (dos o más “loop”) los diagramas contienen campos fantasmas que dan contribuciones finitas a las expresiones de las funciones de n puntos renormalizadas.

En consecuencia, a partir del propagador libre y mediante la aplicación de la ecuación de Dyson, estamos en condiciones de obtener el propagador del magnón ferromagnético renormalizado:

$$\left(D^{(R)}\right)^{-1}_{ab} = \left(D^{(R)}\right)^{-1}_{(0)ab} - \Pi_{ab}^{(R)} \qquad (56)$$

por definición:

$$D_{(R)}^{-+} = \frac{1}{2}\left(D_{(R)}^{11} + D_{(R)}^{22} + i\left(D_{(R)}^{12} - D_{(R)}^{21}\right)\right) \qquad (57)$$

donde:

$$D_{(R)}^{11} = D_{(R)}^{22} = 2s^2\,\frac{\left[\,1-\rho(\omega_q) - 2s^2\Pi_{11}^{(R)}\right]}{\left[\,1-\rho(\omega_q) - 2s^2\Pi_{11}^{(R)}\right]^2 + \left[\,1-\rho(\omega_n) - 2s^2\Pi_{12}^{(R)}\right]^2} \qquad (58)$$

$$D_{(R)}^{12} = -D_{(R)}^{21} = 2s^2\,\frac{\left[\,1-\rho(\omega_n) + 2s^2\Pi_{12}^{(R)}\right]}{\left[\,1-\rho(\omega_q) - 2s^2\Pi_{11}^{(R)}\right]^2 + \left[\,1-\rho(\omega_n) - 2s^2\Pi_{12}^{(R)}\right]^2} \qquad (59)$$

Las contribuciones de $\Pi_{11}^{(R)}$ y $\Pi_{12}^{(R)}$ a la auto-energía bosónica provienen de los diagramas correspondientes a las ecuaciones (44), (45), (48) y (49). Más aún, la suma de los gráficos "tadpole", (48) y (49), dan una constante irrelevante que dependen de la energía fermiónica total $\sum_k \varepsilon_k n_F \; \varepsilon_k - \mu$.

Con el objeto de comparar predicciones de nuestro modelo con resultados obtenidos para el modelo de onda de "spin" no lineal, podemos calcular la corrección a la energía del magnón ω_q.

Para ello, se introducen las expresiones explícitas de los $D_{(R)}^{ij}$ en la ecuación (57), así el propagador ferromagnético del magnón renormalizado $D_{(R)}^{-+}$ resulta:

$$D_{(R)}^{-+} = 2s^2 \; 1+\rho \; \frac{1}{\omega_q - i\omega_n - P_q(\omega_n)} \tag{60}$$

con:

$$P_q(\omega_n) = \frac{1+\rho}{2s^2 N_s} \sum_{q'} n_B(\omega_{q'}) \left[\; \omega_{q'} - \omega_{q'-q} \; + i\omega_n \right] \tag{61}$$

siendo $n_B(\omega_q)$ el número de ocupación de Bose.

Solo se tiene en cuanta el polo simple en $\omega_q \rangle 0$. Ahora, llevando a cabo la continuación analítica $i\omega_n = \omega + i\delta$, podemos encontrar la corrección térmica de la energía del magnón ferromagnético ω_q , como:

$$\Delta \; \omega_q \; = \lim_{\delta \to 0} \; P_q \; i\omega_n = \omega_q + i\delta \; = \frac{1+\rho}{2s^2 N_s} \sum_{q'} \; \omega_{q'} - \omega_{q'-q} + \omega_q \; n_B \; \omega_{q'} \tag{62}$$

Así, la energía del magnón renormalizado se escribe:

$$\omega_q(T) = \omega_q \left[1 - \frac{4 \; 1+\rho}{J'z} \sum_{q'} \omega_{q'} n_B(\omega_{q'}) \right] \tag{63}$$

donde claramente se ve el "softening" térmico de la frecuencia del magnón. Es interesante remarcar que las contribuciones finitas (44) y (45) corresponden en el esquema de onda de "spin" no lineales a las contribuciones, directa y de intercambio en el Hamiltoniano del magnón no lineal (ver Ref. 21). A su vez, las expresiones de auto-energía (44-49) son funciones analíticas de $-\omega_q$.

Finalmente, dado que la auto-energía bosónica renormalizada $\Pi^{ab}_{(R)}\ q,\omega_n$ viene dada por una matriz cuyos elementos son: $\Pi^{+-}_{(R)},\Pi^{-+}_{(R)},\Pi^{33}_{(R)},\Pi^{44}_{(R)},\Pi^{34}_{(R)},\Pi^{43}_{(R)}$, los cuales al igual que $\Pi^{11}_{(R)}$ y $\Pi^{22}_{(R)}$ pueden ser evaluados fácilmente, aplicando la ecuación de Dyson (56), podemos calcular las restantes componentes $D^{33}_{(R)},D^{44}_{(R)},D^{34}_{(R)},D^{43}_{(R)}$ del propagador bosónico renormalizado $D^{ab}_{(R)}$.

$$D^{33}_{(R)}=\frac{-\Pi^{44}_{(R)}}{\Pi^{44}_{(R)}\left(\Pi^{33}_{(R)}-\frac{1-\rho\ \ \omega_q}{2s^2}\right)-\ 2s+\Pi^{34}_{(R)}\ ^{2}} \tag{64}$$

$$D^{34}_{(R)}=D^{43}_{(R)}=\frac{2s-\Pi^{34}_{(R)}}{\Pi^{44}_{(R)}\left(\Pi^{33}_{(R)}-\frac{1-\rho\ \ \omega_q}{2s^2}\right)-\ 2s+\Pi^{34}_{(R)}\ ^{2}} \tag{65}$$

$$D^{44}_{(R)}=\frac{\frac{1-\rho\ \ \omega_q}{2s^2}-\Pi^{33}_{(R)}}{\Pi^{44}_{(R)}\left(\Pi^{33}_{(R)}-\frac{1-\rho\ \ \omega_q}{2s^2}\right)-\ 2s+\Pi^{34}_{(R)}\ ^{2}} \tag{66}$$

A partir de esto podemos calcular el “damping” como, $\mathbf{Im}\,P_q$, el cual a este orden de perturbación, y a partir de los propagadores y vértices libres, es cero.

3.4. Renormalización de la auto-energía fermiónica

Consideremos la auto-energía fermiónica $\Sigma\ \ k,\nu$, la cual a priori viene dada por la contribución de cuatro diagramas, de los cuales solo dos dan contribuciones distintas de cero y cuya expresiones explícitas son:

$$\Sigma^{(2)}\ \ k,\nu\ \ =\frac{1}{N_s}\sum_{q,\omega}K_{ab}\ D^{ab}_{(0)} \tag{67}$$

$$\Sigma^{(3)}\ \ k,\nu\ \ =\frac{1}{N_s}\sum_{q,\omega}K_{a}\ D^{ab}_{(0)}\ F_{bcd}\ \ D^{cd}_{(0)} \tag{68}$$

Sumando sobre las frecuencias de Matsubara, resulta:

$$\Sigma\ \ k,\nu\ \ =\Sigma^{(2)}\ \ k,\nu\ \ +\Sigma^{(3)}\ \ k,\nu\ \ =\frac{1}{N_s}\sum_{q}\Big[\ 1+\rho\ \ \varepsilon_{k-q}+i\nu_n-\mu\Big]n_B\ \ \omega_q \tag{69}$$

Nuevamente usamos la ecuación de Dyson para obtener el propagador fermiónica renormalizado $G(k,\nu)$:

$$G(k,\nu)=\frac{1}{i\nu_n-\mu\left[1-\frac{1}{N_S}\sum_q n_B(\omega_q)\right]+\varepsilon_k\left[1-\frac{1+\rho}{N_s}\sum_q \gamma_q\, n_B(\omega_q)\right]} \tag{70}$$

3.5. Renormalización de los vértices de tres y cuatro patas

Ahora se deben analizar las expresiones renormalizadas para diferentes vértices. Se considerarán las correcciones a un “loop” para los vértices de tres y cuatro patas bosónicos puros, y los vértices de tres y cuatro patas conteniendo dos fermiones, es decir, los vértices bosón-fermión-fermión y bosón-bosón-fermión-fermión.

En el caso del vértice de tres patas, las contribuciones distintas de cero provienen de los siguientes ocho diagramas, cuyas expresiones explícitas son:

$$F^{(1)}_{acb}(\omega,\omega',\omega'')=\frac{1}{N_s}\sum_{\omega_1,q_1}F_{ade}D^{df}_{(0)}(\omega_1,q_1)\,F_{fbg}D^{gk}_{(0)}(\omega_1+\omega',q_1+q')\,F_{kch}D^{he}_{(0)}(\omega_1+\omega,q_1+q) \tag{71}$$

$$F^{(2)}_{abc}=\frac{1}{2N_s}\sum_{\omega',q'}F_{ade}D^{dg}_{(0)}F_{gbch}D^{he}_{(0)} \tag{72}$$

$$F^{(3)}_{abc}=-\frac{1}{N_s}\sum_{\nu,k}K_aG_0(k,\nu)\,K_{bc}G_0(k-q_1,\nu_n-\omega_1) \tag{73}$$

$$F^{(4)}_{abc}=-\frac{2}{N_s}\sum_{\nu,k}K_aG_0(k,\nu)\,K_bG_0(k-q_2,\nu_n-\omega_2)\,K_cG_0(k-q_1,\nu_n-\omega_1) \tag{74}$$

$$F^{(5)}_{abc}=-\frac{1}{N_s}\sum_{\mu,k}\Gamma^{\mu\alpha}_a g_{\alpha\beta}\,\Gamma^{\beta\gamma}_b g_{\gamma\delta}\,\Gamma^{\delta\rho}_c g_{\rho\mu} \tag{75}$$

$$F^{(6)}_{abc}=-\frac{1}{2N_s}\sum_{\mu,k}\Gamma^{\delta\alpha}_a g_{\alpha\beta}\,\Gamma^{\beta\gamma}_{bc} g_{\gamma\delta} \tag{76}$$

$$F^{(7)}_{abc}=\frac{1}{N_s}\sum_{\omega,q}\Delta_a g(q,\omega)\,\Delta_{bc} g(q-q_1,\omega-\omega_1) \tag{77}$$

$$F^{(8)}_{abc}=\frac{1}{N_s}\sum_{\omega,q}\Delta_a g(q,\omega)\,\Delta_b g(q+q_2,\omega+\omega_2)\,\Delta_c g(q-q_1,\omega-\omega_1) \tag{78}$$

Si en las ecuaciones anteriores se introducen las expresiones explícitas de los propagadores y vértices que allí figuran, llevando a cabo sencillos cálculos algebraicos, podemos concluir lo siguiente: 1) Los infinitos de los diagramas $F^{(i)}_{abc}$ con $i=1,2,3,4$ se cancelas naturalmente con los infinitos que aparecen en los diagramas $F^{(i)}_{abc}$ con $i=5,6,7,8$ construidos con las campos fantasmas. 2) Las divergencias solo aparecen a orden de un “loop”, por lo que $F_{abc}^{(R)}$ puede ser renormalizado a todo orden.

Un análisis similar puede llevarse a cabo para el vértice de cuatro patas $F_{abcd}^{(R)}$, el cual proviene de las siguientes doce contribuciones, cuyas expresiones explícitas son:

$$F_{acb}^{(1)} \;\; \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \;\; = \frac{1}{2N_s} \sum_{\omega, q} F_{gabe} D_{(0)}^{ef} \;\; \omega, q \;\; F_{fcdh} D_{(0)}^{hg} \;\; \omega - \omega_1 - \omega_2, q - q_1 - q_2 \tag{79}$$

$$F_{abcd}^{(2)} = \frac{3}{N_s} \sum_{\omega, q} F_{aer} D_{(0)}^{ef} F_{cgf} D_{(0)}^{gh} F_{dkh} D_{(0)}^{kl} F_{bpl} D_{(0)}^{pr} \tag{80}$$

$$F_{abcd}^{(3)} = \frac{1}{4N_s} \sum_{\omega, q} F_{aer} D_{(0)}^{ef} F_{fcdg} D_{(0)}^{gh} F_{hbl} D_{(0)}^{lr} \tag{81}$$

$$F_{abcd}^{(4)} = -\frac{6}{N_s} \sum_{\nu, k} K_a G_0 \;\; k, \nu \;\; K_b G_0 \, K_c G_0 \, K_d G_0 \tag{82}$$

$$F_{abcd}^{(5)} = -\frac{1}{4N_s} \sum_{\nu, k} K_{ab} G_0 \;\; k, \nu \;\; K_{cd} G_0 \tag{83}$$

$$F_{abcd}^{(6)} = -\frac{1}{N_s} \sum_{\nu, k} K_{ab} G_0 \;\; k, \nu \;\; K_c G_0 \, K_d G_0 \tag{84}$$

$$F_{abcd}^{(7)} = -\frac{1}{2N_s} \sum_{\nu, k} \Gamma_{ab}^{\delta\alpha} g_{\alpha\beta} \, \Gamma_{cd}^{\beta\gamma} g_{\gamma\delta} \tag{85}$$

$$F_{abcd}^{(8)} = -\frac{3}{N_s} \sum_{\nu, k} \Gamma_a^{\tau\alpha} g_{\alpha\beta} \, \Gamma_c^{\beta\gamma} g_{\gamma\delta} \Gamma_d^{\delta\rho} g_{\rho\mu} \, \Gamma_b^{\mu\eta} g_{\eta\tau} \tag{86}$$

$$F_{abcd}^{(9)} = -\frac{1}{8N_s} \sum_{\nu, k} \Gamma_a^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} \, \Gamma_{cd}^{\beta\gamma} g_{\gamma\delta} \Gamma_b^{\delta\rho} g_{\rho\mu} \tag{87}$$

$$F_{abcd}^{(10)} = \frac{1}{N_s} \sum_{\nu} \Delta_a g \, \Delta_b g \, \Delta_c g \, \Delta_d g \tag{88}$$

$$F_{abcd}^{(11)} = \frac{1}{N_s} \sum_{\nu} \Delta_{ab} g \, \Delta_{cd} g \tag{89}$$

$$F_{abcd}^{(12)} = \frac{1}{N_s} \sum_{\omega, q} \Delta_{ab} g \, \Delta_c g \, \Delta_d g \tag{90}$$

Aquí también es fácil visualizar que los infinitos de los diagramas $F_{abcd}^{(i)}$ con $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ se cancelan naturalmente con los infinitos que aparecen en los diagramas $F_{abc}^{(i)}$ con $i = 7, 8, 9, 10, 11, 12$ construidos con las campos fantasmas.

Con igual criterio al utilizado hasta aquí, podemos estudiar los vértices de tres y cuatro patas con dos fermiones, K_a y K_{ab} respectivamente. La expresión renormalizada para el vértice de tres patas con dos fermiones $K_a^{(R)}$ viene dada por:

$$K_a^{(R)i} = K_a + K_a^{(i)} \,, \tag{91}$$

donde $K_a^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ corresponde a las tres contribuciones distintas de cero a un "loop". A partir de cálculos sencillos se puede mostrar que solo las componentes que sobreviven son $K_a^{(R)i}$ con *i=3* y *a=3,4,* las que se escriben como:

$$\begin{aligned} K_3^{(R)3} &= K_3 + \frac{2i}{N_s}\sum_{q,\omega} F_{312}\, K_{11} \left(D_{(0)}^{11}(q,\omega) - iD_{(0)}^{12}(q,\omega) \right) \times \\ &\times \left(D_{(0)}^{11}(q-q_1,\omega-\omega_1) - iD_{(0)}^{12}(q-q_1,\omega-\omega_1) \right) \end{aligned} \tag{92}$$

$$\begin{aligned} K_4^{(R)3} &= K_4 + \frac{4}{N_s}\sum_{q,\omega} K_{11} \left(D_{(0)}^{11}(q,\omega) - iD_{(0)}^{12}(q,\omega) \right) \times \\ &\times \left(D_{(0)}^{11}(q-q_1,\omega-\omega_1) - iD_{(0)}^{12}(q-q_1,\omega-\omega_1) \right) \end{aligned} \tag{93}$$

Análogamente la expresión renormalizada para el vértice de cuatro patas con dos fermiones se escribe:

$$K_{ab}^{(R)i} = \frac{1}{2}\left[K_{ab} + K_{ab}^{(i)} + (a \leftrightarrow b) \right] \tag{94}$$

donde $K_{ab}^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ corresponde a las tres contribuciones distintas de cero a un "loop", las cuales a su vez son finitas.

Por último, podemos computar todas las contribuciones a un "loop" para la función fermiónica de cuatro patas $G(k_i, \nu_i)$, cuya expresión analítica es:

$$G(k_i,\nu_i) = \frac{1}{2N_s}\sum_{q,\omega} K_{ab}\, D_{(0)}^{ac}(q,\omega)\; K_{cd}\, D_{(0)}^{db}(q+k_2-k_1, \omega+\nu_2-\nu_1) \tag{95}$$

más rotaciones cíclicas en sus patas fermiónicas.

Sumando sobre las frecuencias de Matsubara, se obtiene:

$$G(k_i,\nu_i) = \frac{8s^2 (1+\rho)^2}{N_s (s+s')^2}\sum_{q} \varepsilon_{q+k_2}\, \varepsilon_{q+k_4} \left[\frac{n_B(\omega_q) - n_B(\omega_{q+k_2-k_1})}{i(\nu_2-\nu_1) + \omega_{q+k_2-k_1} - \omega_q} \right] \tag{96}$$

En resumen, se ha podido mostrar como son cancelados naturalmente los infinitos que aparecen en las auto-energías y en las funciones de *n* patas en la estructura a un "loop" con las contribuciones de los diagramas que contienen campos fantasmas. Por ello, y dado que dicho infinitos aparecen solo a un "loop", estas cantidades pueden ser renormalizadas a todo "loop".

4. Configuracion antiferromagnetica

A partir de ahora se asume una configuración antiferromagnética para el sistema. Bajo esta condición podemos considerar el número de agujeros es pequeño, es decir, que la densidad de agujeros $\rho_i = const.$. Este valor constante para la densidad de agujeros ρ puede ser determinado por consistencia a partir de valores al potencial químico μ.

Para obtener la configuración antiferromagnética debemos rotar los espines de la segunda sub-red 180º alrededor de S_1. Aplicando esta transformación canónica se pasa de una configuración ferromagnética a una antiferromagnética, y como consecuencia de ello el Lagrangiano (7) es no invariante debido a la no invariancia en los dos últimos términos, correspondientes al Hamiltoniano del modelo t-J.

De esta forma, el Lagrangiano efectivo en términos de la fluctuaciones (9) se escribe:

$$
\begin{aligned}
L_{eff}^{E}(S,\Psi) = {} & \frac{i}{2s}(1-\rho)\sum_{i}\frac{S_{i1}\dot{S}_{i2}-S_{i2}\dot{S}_{i1}}{s+s'}\left[1+\sum_{n=1}(-1)^{n}\left(\frac{S_{i3}}{s+s'}\right)^{n}\right]- \\
& -\frac{s}{s+s'}\sum_{i}\left(\dot{\Psi}_{i-}^{*}\Psi_{i-}+\dot{\Psi}_{i-}\Psi_{i-}^{*}\right)\left[1+\sum_{n=1}(-1)^{n}\left(\frac{S_{i3}}{s+s'}\right)^{n}\right]- \\
& -\frac{2s\mu}{s+s'}\sum_{i,\sigma}\Psi_{i-}^{*}\Psi_{i-}\left[1+\sum_{n=1}(-1)^{n}\left(\frac{S_{i3}}{s+s'}\right)^{n}\right]+\sum_{i,j}t_{ij}\Psi_{i-}\Psi_{j-}^{*}+ \\
& +\frac{1}{(s+s')^{2}}\sum_{i,j}t_{ij}\Psi_{i-}\Psi_{j-}^{*}\left[S_{i1}+S_{j1}-i(S_{i2}-S_{j2})\right]+ \\
& +\frac{1}{(s+s')^{2}}\sum_{i,j}t_{ij}\Psi_{i-}\Psi_{j-}^{*}\left[(S_{i1}-iS_{i2})\left(\sum_{n=1}(-1)^{n}\left(\frac{S_{i3}}{s+s'}\right)^{n}\right)+\right. \\
& \left.+(S_{j1}-iS_{j2})\left(\sum_{n=1}(-1)^{n}\left(\frac{S_{i3}}{s+s'}\right)^{n}\right)\right]- \\
& -\frac{J'}{8s^{2}}\sum_{i,I}\left[S_{i1}S_{(i+I)1}+S_{i2}S_{(i+I)2}+S_{i3}S_{(i+I)3}-S_{i1}^{2}-S_{i2}^{2}-S_{i3}^{2}\right]- \\
& -2s'\sum_{i}\lambda_{i}S_{i3}-\sum_{i}\lambda_{i}\left(S_{i1}^{2}+S_{i2}^{2}+S_{i3}^{2}\right)
\end{aligned}
\tag{97}
$$

donde ahora $J'\langle 0$.

Es fácil mostrar que la supermatriz simpléctica M_{AB} no cambia bajo esta rotación canónica. De igual forma, el Lagrangiano de los campos fantasmas permanece invariante.

A partir del nuevo Lagrangiano efectivo para el caso antiferromagnética podemos obtener las expresiones de los propagadores y vértices del modelo para la nueva configuración. Así, el propagador libre del bosón resulta:

$$
D_{(0)}^{ab}(q,\omega_n)=\begin{pmatrix}
-a\cdot\dfrac{J'z(1-\gamma_q)}{8(\omega_q^2+\omega_n^2)} & s\sqrt{a}\cdot\dfrac{\omega_n}{\omega_q^2+\omega_n^2} & 0 & 0 \\
-s\sqrt{a}\cdot\dfrac{\omega_n}{\omega_q^2+\omega_n^2} & -a\cdot\dfrac{J'z(1+\gamma_q)}{8(\omega_q^2+\omega_n^2)} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{2s'} \\
0 & 0 & -\dfrac{1}{2s'} & \dfrac{J'z(1-\gamma_q)}{32s^2s'^2}
\end{pmatrix}
\tag{98}
$$

donde definimos $a = (s+s')^2 (1+\rho)^2$ y ω_q es:

$$\omega_q = \frac{J'z}{8s}(s+s')(1+\rho)\sqrt{1-\gamma_q^2} \tag{99}$$

En consecuencia, se puede definir en propagador antiferromagnético del magnón:

$$\begin{aligned} D_{(0)}^{+-} &= \left(D_{(0)}^{-+}\right)^* = \frac{1}{2}\left(D_{(0)}^{11} + D_{(0)}^{22} - i\left(D_{(0)}^{12} - D_{(0)}^{21}\right)\right) = \\ &= -s(s+s')(1+\rho)\left(\frac{J'z(s+s')}{8s}(1+\rho) + i\omega_n\right)\frac{1}{\omega_n^2 + \omega_q^2} \end{aligned} \tag{100}$$

Si analizamos el sector fermiónico debemos remarcar que en la configuración antiferromagnética esta parte es muy distinta a la del caso ferromagnético, es más complicada de analizar y presenta problemas en el mecanismo de propagación del fermión. Para obtener dicho propagador se debe introducir "ad hoc" un espinor de Majorana de dos componentes. Mediante este truco y por medio de laborosos cálculos algebraicos encontramos un propagador fermiónico, una matriz *4x4*. Entonces, analizando el sector bilineal fermiónico del Lagrangiano antiferromagnético (97), vemos:

$$L^F(\Psi) = \frac{1}{2}\sum_{k,\nu_n} \Psi_-^*(k,\nu_n) G_{(0)}^{-1} \Psi_-(k,\nu_n) \tag{101}$$

de donde se puede obtener:

$$G_0(k,\nu_n) = \frac{s+s'}{2s}\cdot\frac{1}{i\nu_n - \mu} \tag{102}$$

Análogamente, si se mira la parte en interacción (bosón-fermión) del Lagrangiano (97):

$$L_{\text{int}}^{B/F} = \frac{1}{n!}\sum_{k,\nu_n} \Psi_-^*(k',\nu')U_{a_1 \ldots a_n} V^{a_1} \ldots V^{a_n} \Psi_-(k,\nu) \tag{103}$$

obtenemos los vértices tres patas (2 fermiones-1bosón) y cuatro patas (2 fermiones-2 bosones):

$$U_a = \frac{1}{s+s'}\left[\left(\varepsilon(k)+\varepsilon(k')\right)\delta_a^1 + i\left(\varepsilon(k')-\varepsilon(k)\right)\delta_a^2 - \frac{s}{s+s'}\left[i\left(\nu_n + \nu'_n\right) - 2\mu\right]\delta_a^3\right] \tag{104}$$

$$U_{ab}=\left[\frac{-1}{\left(s+s'\right)^{2}}\left(\varepsilon_k+\varepsilon_{k'}\right)\left[\delta_a^1\delta_b^3+\delta_a^3\delta_b^1\right]+\frac{i}{\left(s+s'\right)^{2}}\left(\varepsilon_{k'}-\varepsilon_k\right)\left[\delta_a^2\delta_b^3+\delta_a^3\delta_b^2\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{2s}{\left(s+s'\right)^{3}}\left[i\left(\nu+\nu'\right)-2\mu\right]\delta_a^3\delta_b^3\right] \tag{105}$$

De las ecuaciones anteriores se ve que los vértices bosón-fermión de la configuración antiferromagnética también son muy distintos a los de la configuración ferromagnética.

Ahora, es posible comparar nuestro resultado con los obtenidos en las teorías de “spin-polaron”, al igual que en estas teorías se asume un estado en orden antiferromagnético, y esta asunción está estrechamente vinculada con la no propagación de los modos fermiónicos. Una forma usual para lograr la propagación de dichos modos es corregir el propagador libre fermiónico con una adecuada auto-energía fermiónica, utilizando la conocida ecuación de Dyson:

$$G(k,\nu_n)=\left[G_{(0)}^{-1}(\nu_n)-\Sigma(k,\nu_n)\right]^{-1} \tag{106}$$

Es fácil mostrar que a un “loop” la auto-energía fermiónica tiene solo una contribución significativa, la del vértice tres patas U_a. La contribución proveniente del vértice cuatro patas U_{ab} se anula.

Por lo que, la auto-energía fermiónica $\Sigma(k,i\nu_n)$ viene dada por:

$$\Sigma\left(k,i\nu_n\right)=\frac{1}{N_s}\sum_{\omega,q}U_a\,D_{(0)}^{ab}(\omega,q)U_b\,G\left(\nu+\omega,k+q\right)=$$
$$=\sum_q\left(f(k,q)+g(k,q)\right)\sum_\omega\frac{G\left(\nu+\omega,k+q\right)}{\omega^2+\omega_q^2}\times G\left(\nu+\omega,k+q\right) \tag{107}$$

donde definimos:

$$f(k,q)=\frac{J'z\left(1+\rho\right)^{2}}{4N_s}\left(\varepsilon_k^2+\varepsilon_{k'}^2-2\gamma_q\varepsilon_k\varepsilon_{k'}\right) \tag{108}$$

$$g(k,q)=\frac{-2is\left(1+\rho\right)}{(s+s')N_s}\left(\varepsilon_{k'}^2-\varepsilon_k^2\right) \tag{109}$$

Mediante técnicas de cálculo estándar encontramos la expresión para la auto-energía fermiónica $\Sigma\left(k,\nu_n\right)$ a temperatura cero:

$$\Sigma\ k, i\nu_n \ = \frac{1+\rho}{2N_s} t^2 z^2 \times \sum_q \frac{\left[\ sign\gamma_q\ \ \gamma_k \sqrt{1-\sqrt{1-\gamma_q^2}} - \gamma_{k+q}\sqrt{1+\sqrt{1-\gamma_q^2}}\ \right]^2}{\sqrt{1-\gamma_q^2}} \times \frac{1}{i\nu_n - \omega_q - \mu - \sum\ k+q,\ i\nu_n - \omega_q} \tag{110}$$

La ecuación (110) es complicada de resolver para el caso $t \rangle J$, por lo cual, y con el objeto de describir una fase metálica donde los agujeros se mueven coherentemente en la red, se recurre al cálculo numérico por consistencia de la función espectral $A(k,\nu) = \lim_{\varepsilon \to 0} G(k, \nu + i\varepsilon)$.

Este resultado representa una fuerte prueba para nuestro procedimiento cuántico, mediante el cual es posible observar la equivalencia entre la ecuación (110) con resultados obtenidos a partir de la teoría de "spin-polaron" para valores finitos de agujeros.

Es importante remarcar, que debido a que la interacción de tres o más bosones en el caso antiferromagnético no presenta cambios respecto del caso ferromagnético, los vértices de *n* patas no cambian. Además, debido a que la supermatriz simpléctica no cambia bajo las rotaciones canónicas, la diagramática que contiene los campos fantasmas no varía y por ende el Lagrangiano de los campos fantasmas tampoco.

Distinta es la situación de la auto-energía bosónica, la cual presenta cambios respecto del caso ferromagnético. De todas formas, es también posible obtener una expresión renormalizada computando diagramas a un "loop", y obviamente también en esta caso las divergencias se cancelan por medios de los diagramas que contienen campos fantasmas.

Sin embargo, la expresión de la matriz para la auto-energía bosónica antiferromagnética es más complicada debido a las contribuciones de los diagramas que contienen un "loop" fermiónico, en este caso la matriz cuenta con ocho elementos (en vez de seis elementos como en el ferromagnético) $\Pi_{11}^{(R)}, \Pi_{22}^{(R)}, \Pi_{33}^{(R)}, \Pi_{44}^{(R)}, \Pi_{12}^{(R)}, \Pi_{23}^{(R)}, \Pi_{34}^{(R)}, \Pi_{13}^{(R)}$.

Nuevamente es posible obtener el propagador de magnón antiferromagnético por medio de la ecuación de Dyson utilizando los elementos anteriores.

Finalmente, para las funciones de *n* puntos la renormalización es igual a la del caso ferromagnético solo se debe cambiar el propagador libre por el correspondiente al de la configuración antiferromagnética.

En resumen, existen diferencias entre ambas configuraciones que se pueden resumir en dos cuestiones. La primera, la diferencia del propagador antiferromagnético respecto de caso ferromagnético, el propagador del magnón antiferromagnético tiene dos polos simples. Por otro lado, el magnón antiferromagnético se escribe en función de la densidad de agujeros luego, que a bajo orden contiene agujeros estáticos. Por lo tanto cuando la densidad de agujero es cero, tal magnón debe ser interpretado como el magnón antiferromagnético a dopaje cero. La segunda cuestión, es que en la configuración antiferromagnética a priori los fermiones son no propagantes, y su dinámica la adquieren por medio de la ecuación de Dyson, con una adecuada auto-energía fermiónica $\Sigma \;\; k,\nu_n$ con cálculo numérico en (110).

Igual cálculo puede aplicarse a la auto-energía fermiónica, y es fácil mostrar que contribuciones a más de un "loop" se anulan. La expresión analítica para la auto-energía fermiónica viene dada por la suma de los siguientes diagramas:

$$\Sigma^{(2)} \;\; k,\nu \;\; = \frac{1}{N_S} \sum_{q,\omega} U_{ab} D^{ab}_{(0)} \tag{111}$$

$$\Sigma^{(3)} \;\; k,\nu \;\; = \frac{1}{N_S} \sum_{q,\omega} U_a D^{ab}_{(0)} F_{bcd} D^{cd}_{(0)} \tag{112}$$

Sumando sobre las frecuencias de Matsubara, la expresión para la auto-energía fermiónica finita resulta:

$$\Sigma \;\; k,\nu \;\; = \Sigma^{(2)} + \Sigma^{(3)} = \frac{1}{N_s} \sum_q \Big[\;\; 1+\rho \;\; \varepsilon_{k-q} + i\nu_n - \mu \Big] n_B(\omega_q) \tag{113}$$

Aplicando la ecuación de Dyson, el propagador fermiónico renormalizado queda:

$$G(k,\nu) = \frac{1}{i\nu_n - \mu \;\; \left[1 - \dfrac{1}{N_s} \sum_q n_B(\omega_q) \right] + \varepsilon_k \left[1 - \dfrac{(1+\rho)}{N_s} \sum_q \gamma_q n_B(\omega_q) \right]} \tag{114}$$

5. Conclusiones

En el este artículo, y a partir del formalismo de la integral de camino para un modelo t-J con operadores de Hubbard que verifican el álgebra graduada spl(2,1), se obtuvieron las reglas de Feynman y su respectiva diagramática. En el dicho formalismo, correspondiente a un sistema de vínculos de segunda clase, se encuentra presente el determinante de la supermatriz simpléctica, el cual se logra exponenciar por medio de la introducción al modelo de los campos fantasmas de

Faddeev-Popov en el Lagrangiano efectivo. A partir de estos resultados es posible obtener las expresiones de propagadores, vértices y del propagador del magnón ferromagnético.

Por medio de adecuadas técnica se mostró que la introducción de campos fantasmas es también necesaria en orden a cancelar las divergencias que aparecen en cantidades físicas de interés en un desarrollo a un “loop”. Así, las auto-energías bosónica y fermiónica y diferentes vértices fueron renormalizados. Entonces, y como consecuencia de esto, es posible obtener el propagador del magnón ferromagnético a partir de las expresiones finitas de las auto-energías.

Un hecho a remarcar es que el “softening” térmico de la frecuencia del magnón ferromagnético encontrado en nuestra aproximación pudo ser chequeado satisfactoriamente con resultados obtenidos modelos de onda de spin y en teorías no lineales de “spin-polaron”. En particular el “softening” térmico de la energía del magnón ferromagnético dado por nuestra aproximación es una generalización para diferentes densidades de agujero distintas de cero. Otro hecho interesante es que nuestro modelo da cuenta del efecto de ablandamiento térmico solo computando los diagramas a un “loop”, sin considerar correcciones a ningún vértice. Creemos que estos resultados son importantes, permitiendo mejorar le tratamiento del modelo, ya que en el marco del modelo de onda de “spin” se deben incluir vértices corregidos para hallar el “softening” térmico de la energía del magnón. En realidad, las correcciones a los vértices cancelan los procesos de “scattering” entre magnones de tal manera que sólo el intercambio directo debe ser considerado como procesos físicos. En nuestra aproximación perturbativa los procesos físicos correctos son directamente los dados a cada orden.

Otro resultado relevante es que en este modelo las divergencias aparecen solo en la estructura a un “loop”, por lo que la renormalización de las cantidades físicas de interés son renormalizadas a todo orden de la perturbación. En cálculos a mayor orden se puede ver que los diagramas contienen campos fantasmas que dan contribuciones finitas a las expresiones renormalizadas de las funciones de n puntos.

En definitiva, estas aplicaciones representan un chequeo crucial de nuestro modelo, mejora su tratamiento y permite obtener resultados por simple computación de diagramas a un “loop” sin la necesidad de presunciones adicionales.

6. Referencias

[1] A. Izyumov, Physics – Uspekhi **40**, 445 (1997).
[2] J.C. Le Guillou and E. Ragoucy, Phys. Rev. B *52*, 2403 (1995).
[3] G. Baskaran and Z. Zou and P.W. Anderson, Solid State Commun. **63** 973 (1987).
[4] G. Kotliar and J. Liu, Phys. Rev. B **38**, 5142 (1988).
[5] C. Jayaprakash, H.R. Krishnamurthy and Sarkar, Phys Rev. B **40**, 2610 (1989).
[6] C.L. Kane, P.A. Lee , T.K. Ng, B. Chakraborty and N. Read, Phys. Rev. B **41**, 2653 (1990).
[7] K. Heuser, E.W. Scheidt, T. Schreiner and G.R. Stewart, Phys. Rev. B **57**, 4198 (1998).
[8] A.J. Millis, Phys. Rev. B **48**, 7183 (1993).
[9] O. Parcollet and A. Georges , Phys. Rev. Lett. **79**, 4665 (1997).
[10] A. Jerez, N. Andrei and G. Zarand, Phys Rev. B **58**, 3814 (1998).
[11] A. Rosch, Phys. Rev. Lett. **82**, 4280 (1999).
[12] J. Gan Jour. Phys. Cond. Matt. **3**, 3537 (1991).
[13] A. Auerbach and D. Arovas, Phys Rev. Lett. **61**, 615 (1988).
[14] A. Auerbach and D. Arovas, Phys Rev. B **38**, 316 (1988).
[15] D. Yoshioka, Jour. Phys. Soc. Japan **58**, 32 (1989).
[16] S.E. Barnes , J. Phys. F **6**, 1375 (1976).
[17] S.E. Barnes , J. Phys. F **7**, 2637 (1977).
[18] M. Grilli and G. Kotliar, Phys. Rev. Lett. **64**, 1170 (1990).
[19] A. Tandon, Z. Wang and G. Kotliar, Phys. Rev. Lett. **83**, 2046 (1999).
[20] P. Coleman, J. Hopkinson and C. Pépin, Phys. Rev. B **63**, 140411 (2001).
[21] A. Foussats, A. Greco and O. Zandron, Annals of Phys. (NY), **275**, 238 (1999).
[22] A. Foussats, A. Greco and O. Zandron, Annals of Phys. (NY), **279**, 263 (2000).
[23] C. Abecasis and O. Zandron, Int. Journal of Mod. Phys. B **21**, 97 (2007).
[24] A. Foussats, C. Repetto, O.P. Zandron and O.S. Zandron, Int. Jour. of Mod. Phys. B **18**, 1319 (2004).
[25] D.C. Mattis, "The Theory of Magnetism I, Springer-Verlag, (NY), (1981).
[26] E. Manousakis, Rev. Mod. Phys. **53**, 11 (1991).