

## *Revista Electrónica Nova Scientia*

Laminados magneto-electro-elásticos con  
variaciones en la orientación de la magnetización

Magneto-electro-elastic layered composite with  
variations in the magnetization orientation

**Joanka Hernández Cabanas<sup>1</sup>, José Antonio Otero<sup>1</sup>, Julián  
Bravo-Castillero<sup>2</sup>, Reinaldo Rodríguez-Ramos<sup>2</sup> y Guillermo  
Monsiváis Galindo<sup>3</sup>.**

---

<sup>1</sup>Instituto de Cibernética Matemática y Física, Habana

<sup>2</sup>Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Habana

<sup>3</sup>Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, México D. F.

---

**Cuba-México**

*Joanka Hernández Cabanas.* Calle 15 # 551 Vedado, C. Habana, Cuba, CP 10400. E-mail: [joanka@icmf.inf.cu](mailto:joanka@icmf.inf.cu)

© Universidad De La Salle Bajío (México)

## Resumen

Se han realizado varios estudios de la influencia de la orientación de la polarización en las características globales de los piezocompuestos. Extendiendo estas ideas, en el presente trabajo se estudia la influencia de la orientación de la magnetización en las características globales de un compuesto piezoeléctrico/piezomagnético. Usando el método de homogenización asintótica a doble escala se pueden obtener los coeficientes efectivos de laminados periódicos magneto-electro-elásticos con constituyentes triclinicos o de cualquier otra simetría en una forma matricial. A partir de esta forma matricial se determinan los coeficientes efectivos de un bilaminado de  $\text{BaTiO}_3$  y  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  con la polarización del piezoeléctrico en la dirección de la heterogeneidad y la de la ferrita formando un ángulo variable con esta dirección. En este compuesto, por la variación de la orientación de la magnetización, aparecen nuevas constantes efectivas, algunas de las cuales no se encuentran en ninguna de las dos fases por separadas. Con los coeficientes globales calculados se determinan varias figuras de méritos en función de la fracción volumétrica de uno de los constituyentes y del ángulo entre la magnetización y la polarización ( $\theta$ ), obteniendo que las relacionadas con el efecto magnetoelectrico y con el efecto piezomagnético en determinadas direcciones alcanzan valores máximos para  $\theta \neq 0$ .

**Palabras Clave:** materiales compuestos, efecto magnetoelectrico, homogeneización asintótica, orientación de la magnetización

*Recepción:* 23-03-10

*Aceptación:* 06-05-10

## Abstract

The effect of the polarization orientation in the piezocomposites global characteristic has been studied and published. This work is inspired in this idea. In the present work, the effects of the magnetization orientation related to the effective properties in piezoelectric/piezomagnetic composite were studied. Using the asymptotic homogenization method, the effective coefficients of periodic magneto–electro–elastic layered composite with triclinic constituents or other type of symmetry can be obtained in a matrix form. By using this matrix, a two-layered composite formed by  $\text{BaTiO}_3$  and  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  is studied taking into account the influence of the polarization orientation on their effective properties. The piezoelectric polarization direction and discontinuity direction of layers are the same, while the ferrite magnetization direction form a variable angle with respect to the discontinuity direction. Due to magnetization rotation, new effective constants appear in this composite, and some of those were not present in any independent phases. Some effective figures of merit were computed as functions of the angle  $\theta$  between magnetization and polarization. The maximum value of two figures of merit are not reached for  $\theta = 0$ , and these are related with magnetoelectric and piezomagnetic effect.

**Keywords:** composite materials, magnetoelectric effect, asymptotic homogenization, magnetization orientation

## Introducción

Los materiales compuestos se definen como la mezcla de dos o más materiales insolubles entre sí, en la cual se mantienen íntegros cada componente. En dependencia de las características que se desean para el compuesto se decide la naturaleza de los constituyentes. Dentro de los más usados se encuentran los piezoelectricos y los piezomagnéticos. Cuando se utilizan ambos para la realización de un compuesto se obtiene un material en el que se observa un acoplamiento entre los campos eléctrico y magnético, el denominado efecto magnetoeléctrico. Este consiste en que ante la acción de un campo magnético se origina una polarización eléctrica o ante la acción de un campo eléctrico se origina una magnetización.

Para determinar las propiedades efectivas de los compuestos se han desarrollado numerosos métodos de homogeneización entre los que se destacan los métodos micromecánicos y el método de homogeneización asintótica. (Mori y Tanaka, 1973) proponen un método micromecánico de homogeneización basado en una teoría de campo medio. (Huang y Kuo, 1997) usando el método de Mori-Tanaka, y el tensor de Eshelby magneto-electro-elástico obtienen la forma explícita de los coeficientes magnetoeléctricos en compuestos con inclusiones elipsoidales. (Lee et al., 2005) estudian el efecto electromagnético basándose en un análisis de elementos finitos combinado con una técnica de volumen representativo desarrollado para compuestos de dos o tres fases. (Camacho et al., 2006) utilizan el método de homogeneización asintótica combinado con un análisis de elementos finitos para determinar las propiedades efectivas de un compuesto bifásico 3-1.

Los compuestos laminados son unos de los más observados en la literatura. (Avellaneda y G. Harshé, 1994) fueron uno de los primeros estudios del efecto magnetoeléctrico en compuestos con láminas piezoelectricas y piezomagnéticas. Posteriormente (Li y Dunn, 1998) determinan la forma de los coeficientes efectivos de un compuesto bifásico laminado y (Jacob Aboudi, 2001) lo hace también utilizando su generalización de un modelo de celdas. Basándose también en un modelo micromecánico (Chen et al., 2005) propone un procedimiento para determinar propiedades efectivas de compuestos laminados. (Bravo et al., 1998) utiliza el método de homogeneización asintótica a doble escala para obtener de forma explícita las propiedades de laminados piezoelectricos, este resultado fue extendido recientemente a laminados magneto-

electro-termo-elásticos (Bravo-Castillero et al., 2009). En estos trabajos no se han considerado diferencias entre las orientaciones de las polarizaciones de las fases activas.

En los piezocompuestos ha sido demostrado que la orientación de la polarización de los constituyentes influye en las propiedades globales del compuesto. (Nan et al., 2000) usando una teoría de campo medio determinan las características efectivas y los factores de acoplamiento mecánico de piezocompuestos 0-3 y 1-3 con fases polarizadas en diferentes direcciones. Posteriormente (Kar-Gupta et al., 2005) analizan el efecto de las diferencias en las características globales de los piezocompuestos 1-3 al variar la orientación polarización de la fibra.

En este trabajo se extiende el estudio de la influencia de la orientación de las fases activas en las propiedades del compuesto a laminados magneto-electro-elásticos. Usando el método de homogeneización asintótica a doble escala se estudia la influencia de la variación de la orientación de la magnetización en las características globales de un laminado de BaTiO<sub>3</sub> y CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>. Se determinan las propiedades efectivas de este compuesto en función de la fracción volumétrica de uno de los constituyentes y del ángulo entre la polarización de la fase piezoeléctrica y la magnetización de la otra fase. A partir de estas propiedades se determinan algunas figuras de mérito.

## Método

### *Ecuaciones Fundamentales*

Consideremos laminado magneto-electro-elástico con fases de materiales con cualquier simetría (matemáticamente es equivalente a considerar 21 constantes elásticas independientes, 18 constantes piezoeléctricas independientes, 18 constantes piezomagnéticas independientes, 6 constantes dieléctricas independientes, 6 constantes diamagnéticas independientes y 6 constantes magnetoeléctricas independientes). Consideremos además  $x_3$  como la dirección perpendicular a las láminas y condiciones de contacto ideal entre las láminas. El comportamiento de este sistema va a estar regido por la Segunda Ley de Newton y por las de Maxwell. En ausencia de cargas libres estas leyes pueden ser escritas en la forma (1):

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial B_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1)$$



Las ecuaciones constitutivas que relacionan al tensor de los esfuerzos  $\sigma$ , al vector desplazamiento  $u$ , al vector desplazamiento eléctrico  $D$ , al vector inducción magnética  $B$ , al potencial eléctrico  $\varphi$  y al magnético  $\psi$  vienen dadas en (2).

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(u_k, \varphi, \psi) &= c_{ijkn} \frac{\partial u_k}{\partial x_n} + e'_{ijn} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + q'_{ijn} \frac{\partial \psi}{\partial x_n}, \\ D_i(u_k, \varphi, \psi) &= e_{ikn} \frac{\partial u_k}{\partial x_n} - \varepsilon_{in} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} - \lambda_{in} \frac{\partial \psi}{\partial x_n}, \\ B_i(u_k, \varphi, \psi) &= q_{ikn} \frac{\partial u_k}{\partial x_n} - \lambda_{in} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} - \mu_{in} \frac{\partial \psi}{\partial x_n}.\end{aligned}\quad (2)$$

En estas expresiones  $c_{ijkn}$ ,  $e_{ijk}$ ,  $q_{ijk}$ ,  $\lambda_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  y  $\mu_{ij}$  son las componentes de los tensores elástico, piezoeléctrico, piezomagnético, magnetoeléctrico, dieléctrico, y diamagnético respectivamente.

### Homogeneización

En el método de homogenización asintótica a doble escala se utilizan dos sistemas de coordenadas cartesianas:  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  que da la posición del cuerpo y es llamado sistema de coordenadas globales y el sistema de coordenadas locales  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ . La razón entre estos sistemas de coordenadas viene dada por  $y_i = \frac{x_i}{\alpha}$  con  $\alpha \ll 1$ . Los tensores de las propiedades del material y la densidad son  $\mathbf{Y}$ -periódicos y dependerán sólo de las coordenadas locales:  $c_{ijkl} = c_{ijkl}(\mathbf{y})$ ,  $e_{ijk} = e_{ijk}(\mathbf{y})$ ,  $q_{ijk} = q_{ijk}(\mathbf{y})$ ,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{y})$ ,  $\mu_{ij} = \mu_{ij}(\mathbf{y})$ ,  $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(\mathbf{y})$  y  $\rho = \rho(\mathbf{y})$ .

Los potenciales y el desplazamiento se pueden escribir como un desarrollo asintótico en torno al parámetro (3).

$$\begin{aligned}u_k &= u_k^{(0)}(\mathbf{x}) + \alpha u_k^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots, \\ \varphi &= \varphi^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha \varphi^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots, \\ \psi &= \psi^{(0)}(\mathbf{x}) + \alpha \psi^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots.\end{aligned}\quad (3)$$

Las funciones  $u_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), u_i^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, \varphi^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \varphi^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, \psi^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \psi^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots$  son periódicas en las coordenadas locales. Sustituyendo (3) en las ecuaciones constitutivas (2) estas toman la forma:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha \sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots, \\ D_i &= D_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha D_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots, \\ B_i &= B_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha B_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots,\end{aligned}\tag{4}$$

El problema homogeneizado y las ecuaciones constitutivas homogéneas pueden ser escritos en las formas (5) y (6):

$$\frac{\partial \langle \sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle}{\partial x_j} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 u^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \langle D_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \langle B_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle}{\partial x_i} = 0\tag{5}$$

donde:

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle &= \bar{c}_{ijkn} \frac{\partial u_k^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_n} + \bar{e}_{ijn}' \frac{\partial \varphi^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_n} + \bar{q}_{ijn}' \frac{\partial \psi^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_n}, \\ \langle D_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle &= \bar{e}_{ikn} \frac{\partial u_k^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_n} - \bar{\varepsilon}_{in} \frac{\partial \varphi^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_n} - \bar{\lambda}_{in} \frac{\partial \psi^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_n}, \\ \langle B_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle &= \bar{q}_{ikn} \frac{\partial u_k^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_n} - \bar{\lambda}_{in} \frac{\partial \varphi^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_n} - \bar{\mu}_{in} \frac{\partial \psi^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_n}\end{aligned}\tag{6}$$

y  $\langle (\bullet) \rangle = 1/|\mathbf{Y}| \int (\bullet) d\mathbf{y}$  representa al operador promedio. Las barras sobre las constantes del material están indicando que son las propiedades efectivas del compuesto.

Las aproximaciones enésimas de los campos, presentes en las ecuaciones (4), dependen de los términos  $n$  y  $n+1$  del desplazamiento y los potenciales (Otero, 2003). Por lo que para obtener de forma explícita los coeficientes efectivos se propone  $u_k^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $\varphi^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  y  $\psi^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  en la forma (7) y se sustituyen en la aproximación de orden cero de los campos.

$$\begin{aligned}
u_n^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= N_n^{kl}(\mathbf{y}) \frac{\partial u_k^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_l} + W_n^l(\mathbf{y}) \frac{\partial \varphi^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_l} + S_n^l(\mathbf{y}) \frac{\partial \psi^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_l} \\
\varphi^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \Phi^{kl}(\mathbf{y}) \frac{\partial u_k^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \Theta^l(\mathbf{y}) \frac{\partial \varphi^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \Xi^l(\mathbf{y}) \frac{\partial \psi^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_l} \\
\psi^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \Psi^{kl}(\mathbf{y}) \frac{\partial u_k^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \Omega^l(\mathbf{y}) \frac{\partial \varphi^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \Upsilon^l(\mathbf{y}) \frac{\partial \psi^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_l}
\end{aligned} \quad (7)$$

Los factores dependientes de las coordenadas locales que aparecen en las ecuaciones anteriores reciben el nombre de funciones locales y son funciones periódicas.

Con esta sustitución se puede llegar a los problemas locales  $L_1, L_2$  y  $L_3$ . (8).

$$L_1 = \begin{cases} \frac{d\sigma(N_n^{kl}, \Phi^{kl}, \Psi^{kl})}{dy_3} = -\frac{dc_{i3kl}}{dy_j} \\ \frac{dD(N_n^{kl}, \Phi^{kl}, \Psi^{kl})}{dy_3} = -\frac{de_{3kl}}{dy_3} \\ \frac{dB(N_n^{kl}, \Phi^{kl}, \Psi^{kl})}{dy_3} = -\frac{dq_{3kl}}{dy_3} \end{cases} \quad L_2 = \begin{cases} \frac{d\sigma(N_n^{kl}, \Phi^{kl}, \Psi^{kl})}{dy_3} = -\frac{de'_{i3l}}{dy_3} \\ \frac{dD(N_n^{kl}, \Phi^{kl}, \Psi^{kl})}{dy_3} = \frac{d\epsilon_{3l}}{dy_3} \\ \frac{dB(N_n^{kl}, \Phi^{kl}, \Psi^{kl})}{dy_3} = \frac{d\lambda_{3l}}{dy_3} \end{cases} \quad L_3 = \begin{cases} \frac{d\sigma(N_n^{kl}, \Phi^{kl}, \Psi^{kl})}{dy_3} = -\frac{dq'_{i3l}}{dy_3} \\ \frac{dD(N_n^{kl}, \Phi^{kl}, \Psi^{kl})}{dy_3} = \frac{d\lambda_{3l}}{dy_3} \\ \frac{dB(N_n^{kl}, \Phi^{kl}, \Psi^{kl})}{dy_3} = \frac{d\mu_{3l}}{dy_3} \end{cases} \quad (8)$$

La solución de estos problemas puede escribirse en la forma matricial (9).

$$\bar{C} = \langle C \rangle + \langle PM^{-1}P^T \rangle - \langle PM^{-1} \rangle \langle M^{-1} \rangle^{-1} \langle M^{-1}P^T \rangle \quad (9)$$

donde:



$$M = \begin{pmatrix} c_{3333} & c_{3323} & c_{3313} & e_{333} & q_{333} \\ c_{2333} & c_{2323} & c_{2313} & e_{332} & q_{332} \\ c_{1333} & c_{1323} & c_{1313} & e_{331} & q_{331} \\ e_{333} & e_{323} & e_{313} & -\varepsilon_{33} & -\lambda_{33} \\ q_{333} & q_{323} & q_{313} & -\lambda_{33} & -\mu_{33} \end{pmatrix}, \quad y \quad P = \begin{pmatrix} c_{1133} & c_{1123} & c_{1113} & e_{311} & q_{311} \\ c_{2233} & c_{2223} & c_{2213} & e_{322} & q_{322} \\ c_{3333} & c_{3323} & c_{3313} & e_{333} & q_{333} \\ c_{2333} & c_{2323} & c_{2313} & e_{323} & q_{323} \\ c_{1333} & c_{1323} & c_{1313} & e_{313} & q_{313} \\ c_{1233} & c_{1223} & c_{1213} & e_{312} & q_{312} \\ e_{133} & e_{123} & e_{113} & -\varepsilon_{13} & -\lambda_{13} \\ e_{233} & e_{223} & e_{213} & -\varepsilon_{23} & -\lambda_{23} \\ e_{333} & e_{323} & e_{313} & -\varepsilon_{33} & -\lambda_{33} \\ q_{133} & q_{123} & q_{113} & -\lambda_{13} & -\mu_{13} \\ q_{233} & q_{223} & q_{213} & -\lambda_{23} & -\mu_{23} \\ q_{333} & q_{323} & q_{313} & -\lambda_{33} & -\mu_{33} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} [c]_{6 \times 6} & [e]_{6 \times 3}^T & [q]_{6 \times 3}^T \\ [e]_{3 \times 6} & -[\varepsilon]_{3 \times 3} & -[\lambda]_{3 \times 3} \\ [q]_{3 \times 6} & -[\lambda]_{3 \times 3} & -[\mu]_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

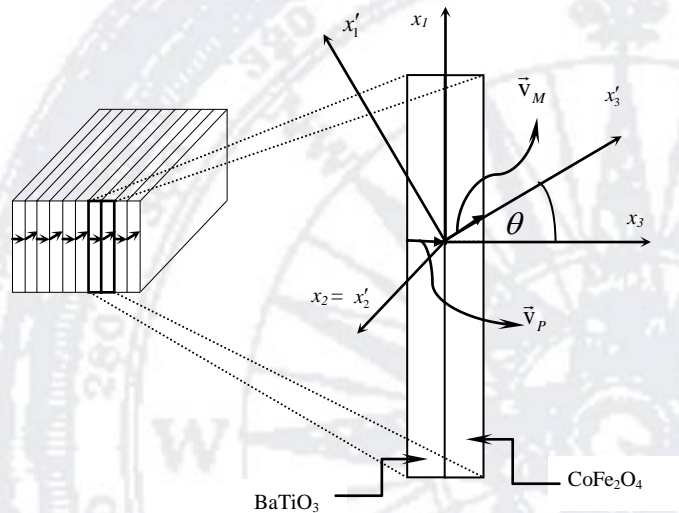
Un desarrollo similar puede obtenerse expandiendo la forma cerrada (5.5) (Bravo-Castillero et al., 2008).

#### *Laminado bifásico con variaciones en la dirección de magnetización*

Consideremos un material formado por láminas de  $\text{BaTiO}_3$  y  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ , de ancho mucho menor a la longitud del compuesto y colocadas de manera tal que la polarización del piezoeléctrico  $\vec{v}_p$  esté orientada en la dirección de la discontinuidad y la dirección de magnetización  $\vec{v}_M$  de la ferrita forme un ángulo  $\theta$  con esta. Para el estudio de este compuesto se define un sistema de coordenadas globales  $x_i$  y otro  $x'_i$  tal que la polarización del piezoeléctrico esté orientada en la dirección positiva del eje  $x_3$ , la dirección de magnetización de la ferrita coincida a lo largo del eje  $x'_3$  y  $x_2$  sea igual a  $x'_2$  (figura.1).

La matriz de transformación del sistema  $x'_i$  al otro sistema puede escribirse en la forma:

$$a = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (10)$$



**Figura 1.** Esquema de laminado. Polarización del piezoeléctrico orientada en la dirección de la discontinuidad y magnetización de la otra fase formando un ángulo  $\theta$  con

Haciendo uso de esta transformación de coordenadas los tensores de las propiedades de la ferrita en el sistema  $x_i$  toman la forma:

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= a_{ii'}a_{jj'}a_{kk'}a_{ll'}c_{i'j'k'l'}, & \varepsilon_{ij} &= a_{ii'}a_{jj'}\varepsilon_{i'j'}, \\ e_{ijk} &= a_{ii'}a_{jj'}a_{kk'}e_{i'j'k'}, & \mu_{ij} &= a_{ii'}a_{jj'}\mu_{i'j'}, \\ q_{ijk} &= a_{ii'}a_{jj'}a_{kk'}q_{i'j'k'}, & \alpha_{ij} &= a_{ii'}a_{jj'}\alpha_{i'j'}. \end{aligned} \quad (11)$$

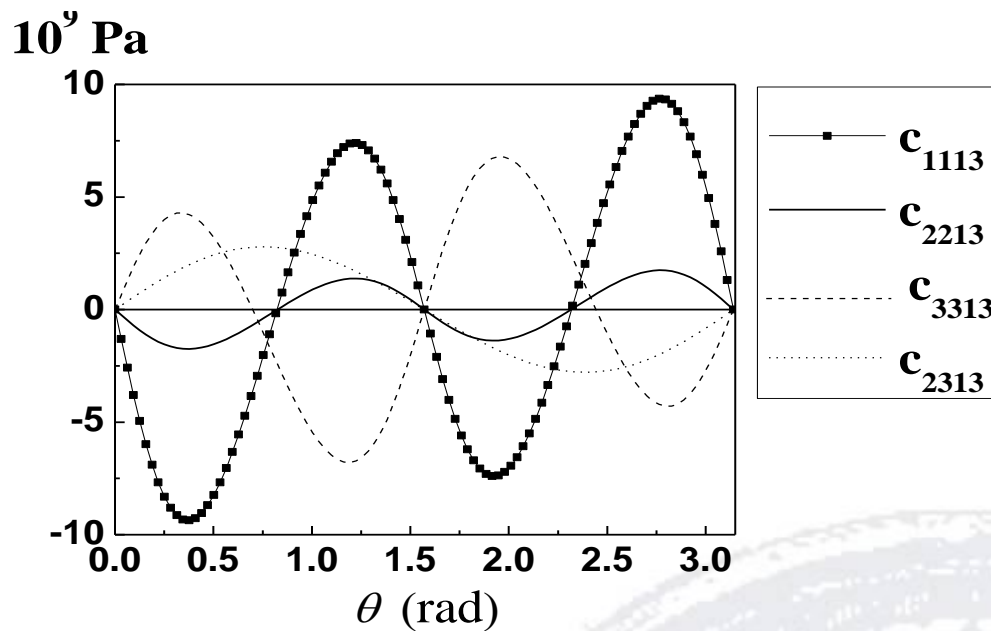
## Resultados

### *Propiedades efectivas.*

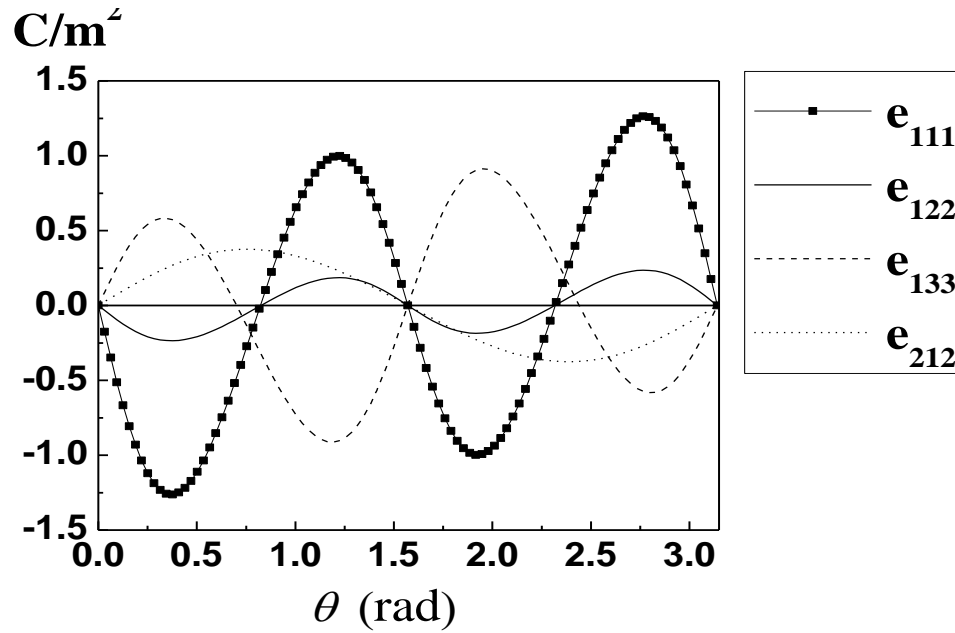
Al calcular las propiedades del compuesto para el caso límite ( $\theta = 0$ ), los resultados obtenidos coinciden con los alcanzados por Li y Dunn (1998) y Aboudi (2001), ambos por métodos diferentes. Las figuras 2-6 muestran algunas de las propiedades efectivas obtenidas en función del ángulo entre la magnetización y la polarización, en todas se ha considerado ambas láminas de igual tamaño. Además de los coeficientes obtenidos para el caso límite, que son funciones pares de  $\theta$ , se obtienen nuevos coeficientes efectivos que son funciones impares de  $\theta$ . Los datos necesario para los cálculos se han obtenido de (Bravo-Castillero et al., 2008). El eje de simetría de la  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  no coincide con ningún eje del sistema  $x_i$ , por lo que en este sistema los tensores de las propiedades de la ferrita no van a tener una forma correspondiente con la simetría del material.

La figura 2 ilustra coeficientes elásticos efectivos, mientras que la figura 3 muestra coeficientes piezoeléctricos efectivos. Los coeficientes mostrados en estas figuras son cero cuando ambas fases tienen simetría 6mm y sus polarizaciones están orientadas en la misma dirección. El comportamiento de los coeficientes elásticos y piezoeléctricos es semejante, por ejemplo la gráfica de  $c_{1113}$  es similar a  $e_{111}$ . Los coeficientes piezoeléctricos de la figura 3 no aparecen en ninguna de las fases independientes, son propiedades que surgen en el compuesto como un efecto de segundo orden. Para entender la aparición de estos coeficientes podemos suponer que el material se encuentra ante la acción de un campo de deformaciones  $S_{11}$ . Debido a la rotación del sistema de simetría de la ferrita respecto al sistema  $x_i$ , en el sistema propio de la ferrita,  $x_{i'}$ , este campo de deformaciones va a descomponerse en  $S_{1'1'}$ ,  $S_{3'3'}$  y  $S_{1'3'}$  lo que va a originar un

esfuerzo de compresión  $\sigma_{2'2'}, \sigma_{1'1'}, \sigma_{3'3'}$  y  $\sigma_{1'3'}$ . Volviendo al sistema de coordenadas  $x_i$  las tres últimas van a tener una componente  $\sigma_{13}$  en este sistema. La tracción en las fronteras de las fases debe ser constante por lo que se originará un  $\sigma_{13}$  en la fase piezoeléctrica, que será la causa de la aparición en esta fase de un campo eléctrico  $E_1$ . Esto es lo que justifica la existencia del coeficiente  $e_{111}$  en el compuesto y su semejanza a el coeficiente  $c_{1113}$ . De manera similar se puede justificar la aparición del resto de los coeficientes piezoeléctricos de la figura 3.

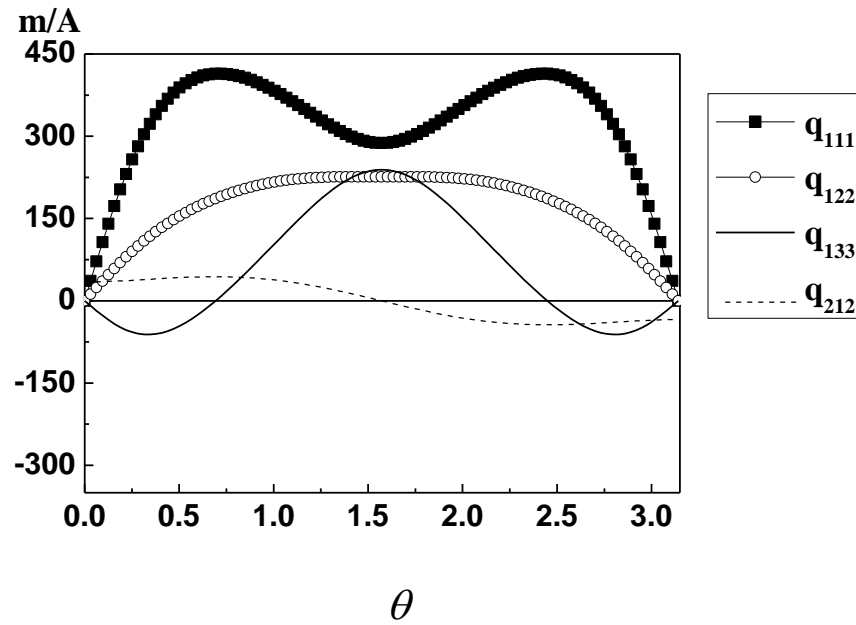


**Figura 2.** Coeficientes elásticos efectivos de bilaminado de  $\text{CoFe}_2\text{O}_4\text{-BaTiO}_3$  en función de  $\theta$ .



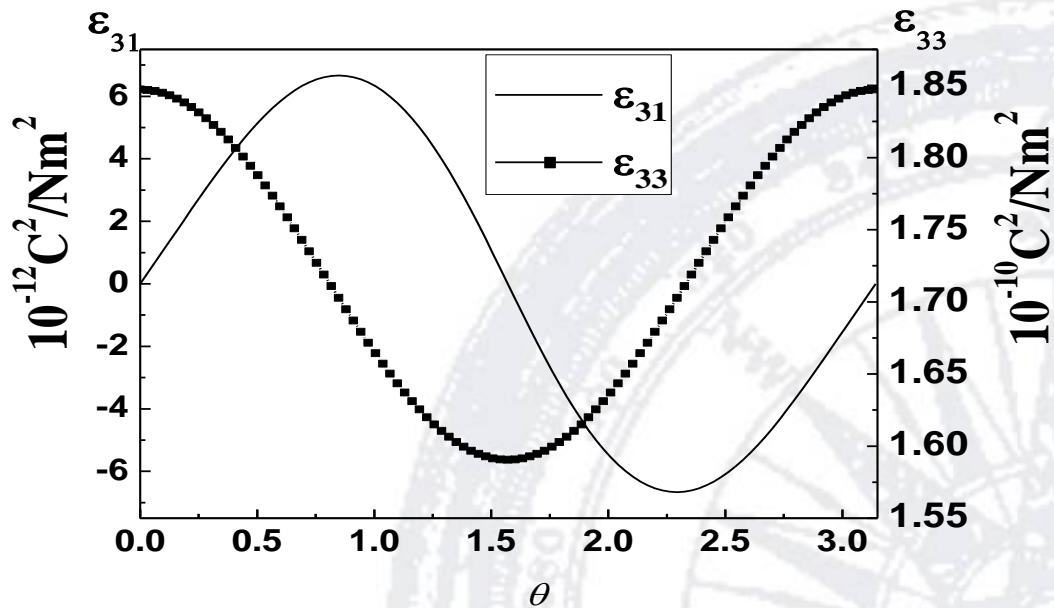
**Figura 3.** Coeficientes piezoeléctricos efectivos de bilaminado de  $CoFe_2O_4$ – $BaTiO_3$  en función de  $\theta$ .

La figura 4 muestra coeficientes efectivos piezomagnéticos en función del ángulo  $\theta$ . Para  $\theta = 0$  las constantes  $q_{11}$ ,  $q_{12}$  y  $q_{13}$  son cero, mientras que  $q_{33} \neq 0$ . Todos estos coeficientes son diferentes de cero en la fase piezomagnética, al variar el ángulo. Las coordenadas  $x_i$  no son las coordenadas de máxima simetría de la ferrita cuando  $\theta \neq 0$ , esta es la causa por la que muchos coeficientes que normalmente se reportan como ceros no lo sean en este caso.



**Figura 4.** Coeficientes piezomagnéticos efectivos de bilaminado de  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ - $\text{BaTiO}_3$  en función de  $\theta$ .

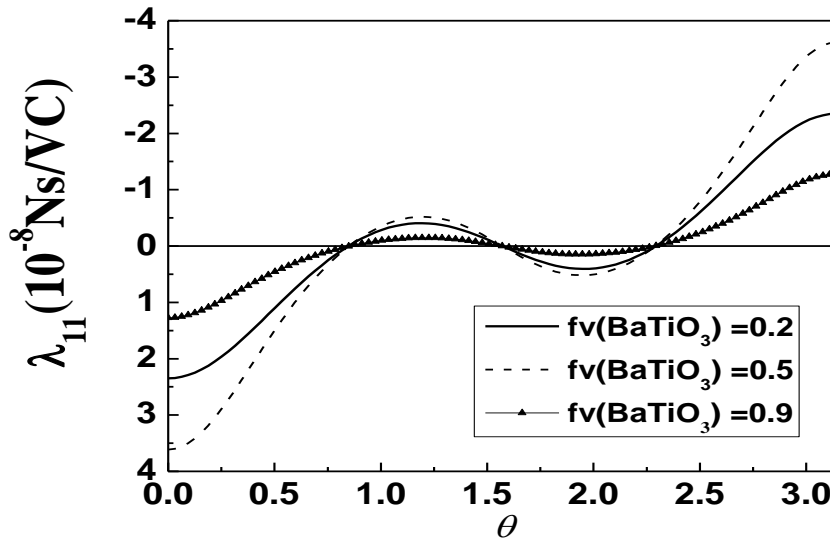
La figura 5 muestra el comportamiento de  $\epsilon_{31}$  y  $\epsilon_{33}$ . La primera de estas constantes es cero para  $\theta = 0$ . La diferencia entre las escalas de ambas es de dos órdenes de magnitud.



**Figure 5.** Coeficientes dieléctricos efectivos de bilaminado de  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ - $\text{BaTiO}_3$  en función de  $\theta$ .



Finalmente la figura 6 muestra la variación del coeficiente magnetoeléctrico  $\lambda_{11}$  para diferentes fracciones volumétricas de  $\text{BaTiO}_3$ .



**Figure 6.** Coeficiente efectivo  $\lambda_{11}$  de bilaminado de  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ - $\text{BaTiO}_3$  en función de  $\theta$ .

Para comprender las dos últimas figuras supongamos que se coloca el compuesto bajo la acción de un campo eléctrico uniforme  $E_1$ . Esto va a producir un  $D_1$  en ambas fases y un  $D_3$  en la fase piezomagnética, debido a la continuidad de la componente normal de  $D$  se va a producir un  $D_3$  en ambas fases. La diferencia de dos órdenes en los coeficientes dieléctrico (figura 5) es debido a que el campo  $D_3$  es originado por las constantes eléctricas de la ferrita, mientras que en el origen de  $D_1$  entran las constantes eléctricas de ambas fases. La acción de  $E_1$  va a provocar además directamente un esfuerzo  $\sigma_{31}$  en la fase piezoeléctrica y por las condiciones de continuidad de las tracciones en la frontera va a originarse un  $\sigma_{31}$  en la otra fase, lo que va a provocar en esta fase un campo magnético  $H_1$  y por consiguiente un campo inducido  $B_1$ .

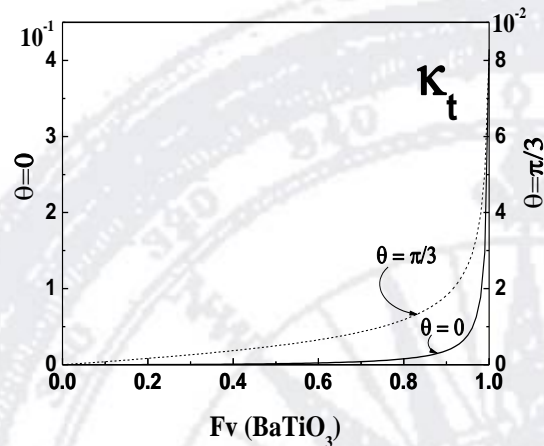
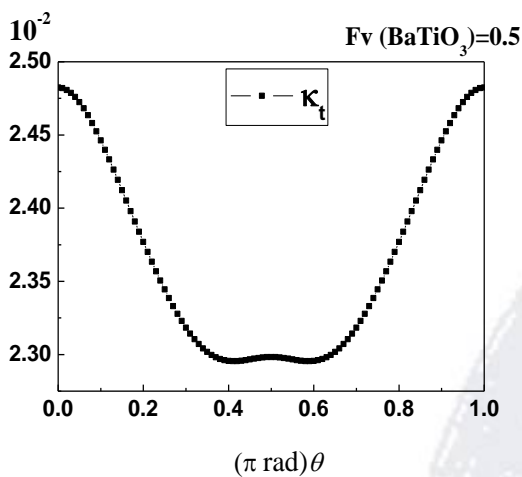
#### *Figuras de mérito*

Como se ha visto, al variar el ángulo  $\theta$  las propiedades efectivas del compuesto cambian y por consiguientes también lo harán las figuras de mérito, que dependen de las propiedades efectivas.

En las figuras siguientes se puede ver el comportamiento de  $\kappa_t$ ,  $o_t$  y  $l_t$ , definidas en (13)<sup>1</sup>, en función del ángulo  $\theta$ .

$$\begin{aligned}\kappa_t &= \frac{e_{333}}{\sqrt{c_{3333}\epsilon_{33}}}, \\ l_t &= \frac{q_{333}}{\sqrt{c_{3333}\mu_{33}}} \\ \text{y } o_t &= \frac{\lambda_{33}}{\sqrt{\mu_{33}\epsilon_{33}}}\end{aligned}\tag{12}$$

La figura 7 muestra la variación de  $\kappa_t$  en función del ángulo, mientras que en la figura 8 se puede observar el comportamiento de  $\kappa_t$  en función de la fracción volumétrica de BaTiO<sub>3</sub> para dos valores diferentes del ángulo  $\theta$ .

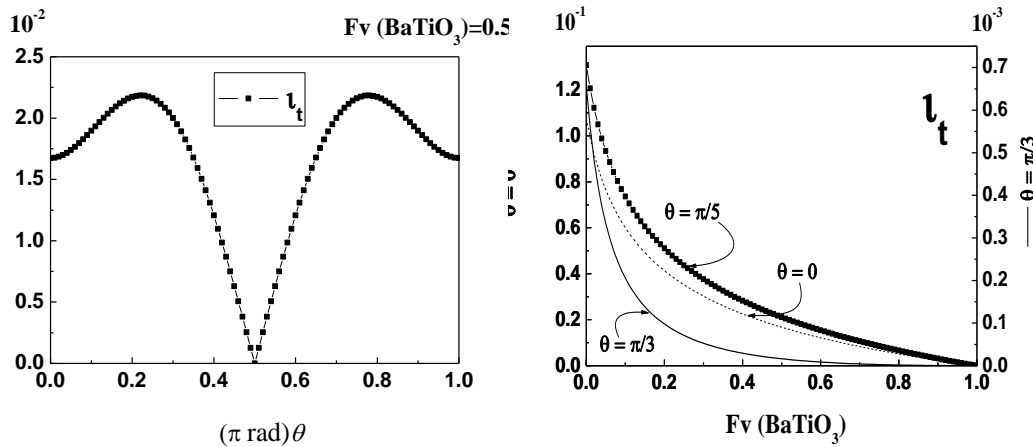


**Figura 7.**  $\kappa_t$  en función de  $\theta$  para  $Fv(\text{BaTiO}_3)=0.5$  **Figura 8.**  $\kappa_t$  en función de la  $Fv(\text{BaTiO}_3)=0.5$  para  $\theta=0$  y  $\theta=\frac{\pi}{3}$ .

<sup>1</sup> Estas figuras de mérito corresponden a factores de acoplamiento que dependen de las mismas variables termodinámicas que las ecuaciones constitutivas (3).

En estas figuras se nota que el máximo de  $\kappa_t$  se alcanza cuando la magnetización y la polarización están alineadas.

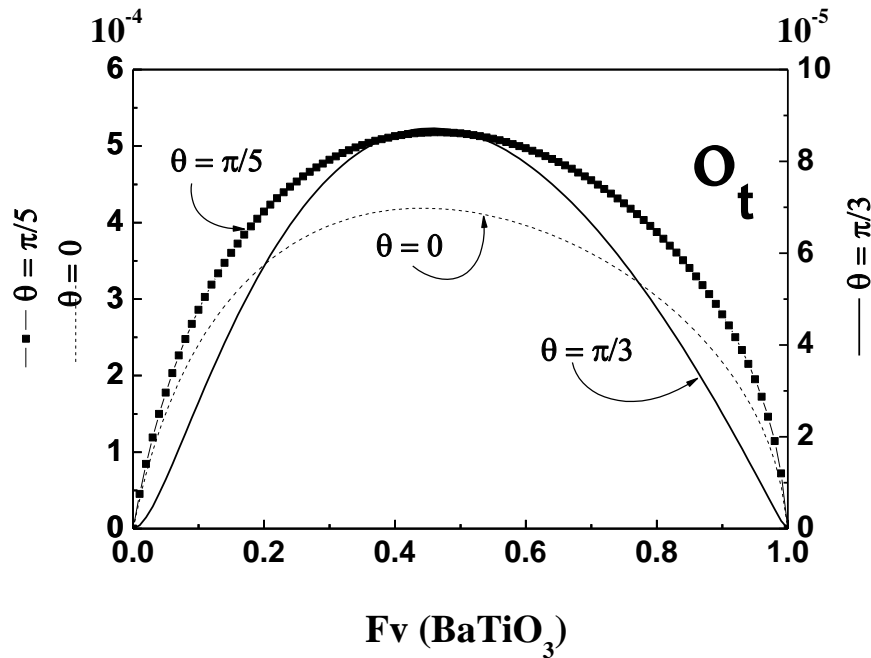
En las figuras 9 y 10 se muestra el comportamiento del módulo de  $\iota_t$  en función del ángulo  $\theta$  y de la fracción volumétrica de BaTiO<sub>3</sub> respectivamente. Como se ve en ambas figuras, a diferencia de  $\kappa_t$ ,  $\iota_t$  aumenta en una región al aumentar el ángulo  $\theta$ . El máximo de esta función no se alcanza cuando  $\theta = 0$ , ni cuando  $\theta = \pi$ .



**Figura 9.**  $\iota_t$  en función de  $\theta$  para  $Fv(BaTiO_3)=0.5$  **Figura 10.**  $\iota_t$  en función de la  $Fv(BaTiO_3)=0.5$  para  $\theta = \frac{\pi}{3}$  y  $\theta = \frac{\pi}{5}$ .

Para  $\theta = \frac{\pi}{2}$   $\iota_t$  se hace cero, debido a que para este valor la orientación de la magnetización de la ferrita es perpendicular a la dirección  $x_3$ .

Por último se ve en la figura 11 la dependencia de  $\sigma_t$  de la fracción volumétrica de BaTiO<sub>3</sub> para diferentes valores del ángulo. Al igual que  $\iota_t$ ,  $\sigma_t$  no alcanza su valor máximo para  $\theta = 0$ .



**Figura 11.**  $O_t$  en función de la  $F_v(\text{BaTiO}_3)$  para  $\theta = 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{3}$  y  $\theta = \frac{\pi}{5}$ .

En las coordenadas  $x_i$  la constante  $q_{333}$  de la fase piezomagnética es la combinación de varias constantes piezomagnéticas, como se puede ver en el sistema (11). Esta constante no alcanza su máximo valor cuando  $\theta = 0$ , e influye directamente en el comportamiento de las constantes efectivas  $q_{333}$  y  $\lambda_{33}$  que es similar al de  $t_i$  y  $o_i$  respectivamente.

## Conclusiones

La orientación de la polarización de las fases juega un importante papel en las características globales de un compuesto. En este trabajo se ha estudiado la influencia de la orientación de la magnetización en un laminado con una fase piezoeléctrica y otra piezomagnética. A partir de una forma matricial, obtenida mediante el método de homogeneización asintótica, se han determinados los coeficientes efectivos de bilaminados de  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ –  $\text{BaTiO}_3$ . En estos laminados, manteniendo la polarización de la fase piezoeléctrica en la dirección de la discontinuidad, se ha variado el ángulo entre la magnetización de la otra fase y la dirección de discontinuidad, lo que ha permitido estudiar la influencia de la dirección de la magnetización en el comportamiento global del compuesto. Además de las propiedades globales de los laminados,

completan el estudio la determinación de las figuras de mérito globales en función del ángulo entre la magnetización y la polarización. Es relevante el hecho de que las funciones no alcanzan su máximo cuando la polarización y la magnetización están alineadas. Con los resultados alcanzados se demuestra la fuerte dependencia que tienen las características globales del compuesto de la dirección de la magnetización.

### Agradecimientos

Los autores desean agradecer al proyecto CONACyT No. 82474, México por el soporte financiero.

### Referencias

- Avellaneda, M. y Harshé, G. (1994). Magnetolectric effect in piezoelectric/magnetostrictive multilayer (2-2) composites. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* (5): 501-513.
- Aboudi, J. (2001). Micromechanical analysis of fully coupled electro-magneto-thermo-elastic multiphase composites. *Smart Mater. Struct.* (10): 867-877.
- Bravo, J., Otero, J. A., Ramos, R. R. y Bougert, A. (1998). Asymptotic homogenization of laminated piezocomposite materials. *Internacional Journal Solids and Structures.* (35): 427-441
- Bravo-Castillero J, Rodríguez-Ramos, R. Guinovart Díaz, H. Mechkour, J.A. Otero J. H. Cabanas, F.J Sabina. (2009). Effective properties of multilayered magneto-electro-elastic composite with coupled thermal effects. *JoMMS.*(4- 5): 819-836
- Bravo-Castillero, J., Rodríguez-Ramos, R., Mechkour, H., Otero, J.A. y Sabina, F.J, (2008). Homogenization of magneto- electro-elastic multilaminated materials. *Q. Jl Mech. Appl. Math* (61-3): 311-332.
- Camacho-Montes, H., Rodriguez-Ramos, R., Bravo-Castillero, J., Guinovart-Díaz, R., Sabina, F.J. (2006). Effective coefficients for two phase magneto-electro-elastic fibrous composite with square symmetry cell in-plane mechanical displacement and out-of-plane electric magnetic field case. *Integrated Ferroelectrics.* (83): 49-65
- Chen, I.Z., Shouwen, Y. Meng, L. y Lin Y. (2002). Effective properties of layered magneto-electroelastic composites. *Comput. Struct.* (57): 177-182.



- Huang , J.H y Kuo, W.S. (1997). The analysis of piezoelectric/piezomagnetic composite materials containing ellipsoidal inclusions. *J. Appl. Phys.* (81): 1378–1386.
- Kar-Gupta, R. y Venkatesh, T. A. (2005). Electromechanical response of 1-3 piezoelectric composites: Effect of poling characteristics. *J. Appl. Phys.* (98): 1-14.
- Lee, J., Boyd, J.G. y Lagoudas, D.C. (2005). Effective properties of three-phase electro-magnetoelastic composites. *Int. J. Engng Sci.* (43): 790–825.
- Li, L. y Dunn, M.L. (1998). Micromechanics of magnetoelectroelastic composite materials: average fields and effective behaviour. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* (9): 404–416.
- Mori, T. y Tanaka, K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.* (21): 571–574.
- Nan, C. W. y G. J. Weng. (2005). Influence of polarization orientation on the effective properties of piezoelectric composites. *J. Appl. Phys.* (88-1): 416-423.
- Otero, José Antonio. (2003). Estudio de la propiedades efectivas y propagación de ondas en laminados piezocompuestos laminados. Tesis de doctorado en Ciencias Física, Universidad de la Habana.
- Wu, T.L y Huang, J.H. (2000). Closed form solutions for the magnetoelectric coupling coefficients in fibrous composites with piezoelectric and piezomagnetic phases. *Int. J. Solids Struct.* (37): 2981–3009.