



# Modelos de perfiles fustales con una estructura de error autorregresiva para plantaciones de *Eucalyptus tereticornis* en Colombia

Taper models with an autoregressive error structure for  
*Eucalyptus tereticornis* plantations in Colombia

Ana Milena López<sup>1,\*</sup>, Alonso Barrios<sup>2</sup> y Guillermo Trincado<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Ingeniería Forestal. Universidad del Tolima. Ibagué, Colombia.

\* Autor de correspondencia. amlopeza@ut.edu.co

<sup>2</sup> Facultad de Ingeniería Forestal. Universidad del Tolima. Ibagué, Colombia. Escuela de Graduados, Facultad de Ciencias Forestales y Recursos Naturales. Universidad Austral de Chile, Valdivia, Chile. abarriost@ut.edu.co

<sup>3</sup> Instituto de Bosques y Sociedad. Facultad de Ciencias Forestales y Recursos Naturales. Universidad Austral de Chile. Valdivia, Chile. gtrincad@uach.cl.

## RESUMEN

En esta investigación se evaluó el desempeño de catorce modelos de perfiles fustales para su utilización en plantaciones de *Eucalyptus tereticornis*. Los modelos evaluados correspondieron a tres tipos: polinomiales, segmentados y de exponente variable. Se utilizó una muestra de 130 árboles colectados en plantaciones con edades entre cinco y doce años, localizadas en la costa atlántica colombiana. Durante el proceso de estimación de parámetros se utilizó un modelo autorregresivo de tiempo continuo (CAR) para expandir la estructura de error y minimizar el efecto de la autocorrelación que se genera de las mediciones longitudinales realizadas a lo largo del fuste. La evaluación de los modelos consideró una comparación de la capacidad predictiva respecto a diámetros para una altura fustal  $h$ , altura fustal para un diámetro fustal  $d$ , volumen acumulado hasta la altura fustal  $h$  y volumen acumulado hasta un diámetro fustal  $d$ . Medidas de sesgo, precisión y error promedio fueron empleadas para la comparación de los modelos. La incorporación de un modelo autorregresivo de orden 3 CAR(3) permitió representar adecuadamente la autocorrelación de los residuales en todos los casos. Los modelos de exponente variable presentaron las mejores bondades de ajuste y predicción.

PALABRAS CLAVE: ahusamiento, costa atlántica colombiana, diámetro fustal, funciones matemáticas, volumen comercial.

## ABSTRACT

This research evaluated the performance of fourteen stem taper models for their use in *Eucalyptus tereticornis* forest plantations. Three types of models were evaluated: polynomials, segmented and variable-exponent models. A sample of 130 trees collected in forest plantations with stand ages between five and twelve years-old located at the Atlantic Colombian coast was used. During the parameter estimation process a continuous time autoregressive model (CAR) was used in order to expand the error structure, reducing the effect of the autocorrelation generated by the longitudinal measurements taken along the stem. The model evaluation considered a comparison of the predictive ability respect to the prediction of upper-stem diameter, upper-stem heights, merchantable volume until a given stem-height and merchantable volume until a given stem-diameter. Measures of bias, precision and error were used for evaluating the models. A third-order continuous-time autoregressive model CAR(3) allowed to adequately model the residual autocorrelation for all stem profile models. The variable-exponent models showed the best performance in terms of goodness of fit and predictive capability.

KEY WORDS: stem taper, Colombian Atlantic coast, stem diameter, mathematical functions, merchantable volume.

## INTRODUCCIÓN

Los modelos de perfiles fustales son funciones matemáticas que permiten predecir diámetros a diferentes alturas del fuste, predecir la altura para un determinado diámetro fustal y predecir el volumen total o entre distintas alturas fustales mediante la integración del modelo (Kozak, 2004). Esta última característica representa la mayor ventaja de los modelos de perfiles fustales, considerando que no es suficiente conocer el volumen total del árbol sino la manera como este se distribuye en los diferentes productos demandados por la industria (Heidarsson y Pukkala, 2011). En el manejo de plantaciones forestales se requieren herramientas para la planificación como sistemas de procesamiento de inventarios y de proyección de crecimiento y rendimiento. En ambos casos la cuantificación de las existencias de madera, así como la desagregación en productos es realizada a través de modelos de perfiles fustales (Trincado y Burkhart, 2006).

Diferentes tipos de modelos han sido utilizados para describir el perfil fustal: modelos polinomiales simples, modelos segmentados y modelos de exponente variable (Burkhart y Tomé, 2012). Los primeros estudios incluyeron el uso de polinomios con potencias altas (Bruce et al., 1968; Real y Moore, 1986; Thomas y Parresol, 1991; Jiménez et al., 1994; Rentería, 1995). Sin embargo, su debilidad está en la dificultad de describir la base del árbol (Heidarsson y Pukkala, 2011). Otros estudios han usado modelos segmentados, los cuales requieren de varias funciones para describir cada una de las secciones del fuste (Max y Burkhart, 1976; Cao et al., 1980; Parresol et al., 1987). Los mayores inconvenientes en su uso radican en la dificultad de estimar sus parámetros a través de algoritmos de minimización del error (Benbrahim y Gavaland, 2003). Estudios más recientes han usado modelos de exponente o forma variable, los cuales usan un exponente que cambia de manera continua a lo largo del fuste del árbol (Kozak, 1988; Pérez et al., 1990; Newnham, 1992; Torrubiano y Salinas, 1998; Bi, 2000; Kozak, 2004).

El modelamiento de perfiles fustales requiere datos provenientes de mediciones longitudinales realizadas a lo largo del fuste de un mismo individuo. Esta estructura de

datos, genera observaciones que están correlacionadas en diferente grado dependiendo de la distancia existente entre las mediciones realizadas (Tassisa y Burkhart, 1998). La eliminación de los efectos de la autocorrelación en la estimación de parámetros ha sido orientada generalmente desde dos enfoques metodológicos. El primero es modelar la estructura del error directamente a través de un modelo autorregresivo (Rojo et al., 2005) y el segundo, emplear técnicas de modelamiento mixto (De-Miguel et al., 2012). Sin embargo, otros estudios también han combinado ambos enfoques (Gómez et al., 2013).

Estudios que comparan distintos tipos de modelos fustales han indicado que la precisión de un modelo fustal depende de la especie (Rojo et al., 2005; Gezán et al., 2009). Esto demuestra que no existe un único tipo de modelo fustal que se ajuste adecuadamente a todas las especies (Muhairwe, 1999). Para el caso de los eucaliptos se han publicado varios tipos de modelos que se han comportado satisfactoriamente. Guimarães et al. (1995) encontraron que un polinomio de tercer grado era suficiente para describir la forma fustal para *Eucalyptus dunnii* Maiden en Rio Grande do Sul, Brasil. Muhairwe (1999) desarrolló modelos de exponente variable para *Eucalyptus pilularis* Smith y *Eucalyptus grandis* W. Hill ex Maiden en Australia y los comparó con los modelos de Max y Burkhart (1976), Kozak (1988) y una modificación del modelo de Gordon (1983). Para *E. pilularis* el modelo de exponente variable desarrollado fue el más adecuado y para *E. grandis* el modelo de Gordon (1983) modificado. Mendonça et al. (2007) seleccionaron el modelo de Ormeirod (1973) por su capacidad de predecir alturas y volúmenes comerciales en *Eucalyptus sp.* en Brasil. Tomé et al. (2007) ajustaron modelos polinomiales simples a perfiles fustales de *Eucalyptus globulus* Labill. en Portugal, encontrando que el modelo de Biging (1984) era el más adecuado para predecir diámetros con y sin corteza. Souza et al. (2008) presentan una comparación entre modelos polinomiales simples ajustados a perfiles fustales de *Eucalyptus sp.* en Brasil, encontrando nuevamente que el modelo de Biging (1984) se comporta mejor en la predicción de alturas y volúmenes comerciales. Para el caso



*Eucalyptus tereticornis* Smith son escasos los estudios que han desarrollado modelos de perfiles fustales para esta especie. Gaillard *et al.* (1997) evaluaron los modelos polinomiales simples desarrollados por Kozak *et al.* (1969) y Demaerschalk (1972) a una muestra de árboles provenientes de una plantación experimental en Argentina.

Durante la última década, más de 10 000 hectáreas de plantaciones de *E. tereticornis* han sido establecidas en la costa atlántica colombiana (Madeflex, 2010). Estas plantaciones constituyen una fuente importante de materia prima para la industria de tableros de partículas y aserraderos en esta región (Obregón y Restrepo, 2007). Estas plantaciones han tomado mayor relevancia al haber sido integradas en programas de reforestación con pequeños productores con rotaciones desde los 7 años a los 12 años de edad. Sin embargo, a pesar de la expansión de plantaciones de *E. tereticornis* en la costa atlántica colombiana aún no se han desarrollado modelos de perfiles fustales para la especie. Debido a la importancia comercial de *E. tereticornis* existe actualmente la necesidad de desarrollar modelos que permitan desagregar volúmenes a nivel de productos.

## OBJETIVOS

Para la construcción de modelos de perfiles fustales, esta investigación plantea la hipótesis que existen diferencias en la capacidad predictiva entre los distintos tipos de modelos: modelos polinomiales, modelos segmentados y modelos de exponente variable para *E. tereticornis*. Por otro lado, se asume que la incorporación de una estructura de error autorregresiva en el proceso de estimación de parámetros permitiría modelar la correlación de los errores y obtener errores estándar insesgados de los parámetros poblacionales. Los objetivos específicos establecidos son (a) desarrollar modelos de perfiles fustales para plantaciones de *E. tereticornis* establecidas en la costa atlántica colombiana, (b) incluir en el proceso de estimación de parámetros un modelo autorregresivo en tiempo continuo (CAR) para modelar la autocorrelación de los errores y (c) evaluar el comportamiento de los modelos desarrollados respecto a su capacidad para predecir cuatro atributos:

diámetro fustal para una determinada altura fustal, altura fustal para un determinado diámetro fustal y volúmenes acumulados hasta un determinado diámetro o altura fustal. Los modelos de perfiles fustales mejor evaluados permitirán estimar volúmenes comerciales en labores de inventario y podrán también ser incluidos en un sistema de proyección del crecimiento y rendimiento.

## MATERIALES Y MÉTODOS

### Datos

La información de perfiles fustales ha sido recopilada por la Corporación Nacional de Investigación y Fomento Forestal (CONIF) entre los años 2008 y 2013. Los datos fustales utilizados en este estudio provienen de dos predios pertenecientes a la Reforestadora San Sebastián (RESS) localizadas en el sur del departamento de Magdalena en la costa atlántica colombiana en las coordenadas de latitud 9°20'4.98"N y longitud 74°16'11.32"O (Barrios *et al.*, 2011). En total se seleccionaron dieciocho rodales con edades entre cinco y doce años para realizar muestreo destructivo. Un total de 130 árboles fueron derribados, cubriendo un intervalo de diámetro a una altura de 1,3 metros ( $D$ ) entre 9,9 cm y 27,5 cm y un intervalo de altura total ( $H$ ) entre 12,3 m y 34,1 m (Tabla 1).

Los árboles seleccionados debieron cumplir con las siguientes condiciones: i) tener un fuste recto y no presentar bifurcaciones y ii) no tener daños mecánicos o problemas fitosanitarios. Las mediciones realizadas en cada árbol en pie incluyeron el diámetro a 1,3 m ( $D$ ) y altura total ( $H$ ). A lo largo del fuste se tomaron mediciones de diámetros con y sin corteza incluyendo la base,  $D$ , y a partir de este cada metro hasta alcanzar un diámetro límite de 5 cm (López *et al.*, 2011). Adicionalmente, con el propósito de mejorar la descripción de la sección basal de los perfiles fustales se tomó una medición de diámetro con y sin corteza a una altura de 50 cm desde la base del árbol derribado. La estimación del volumen de cada una de las secciones se obtuvo a través de la fórmula de aproximación de *smalian* y la última sección utilizando la fórmula de volumen de un cono (Avery y Burkhart, 2001).

La base de datos de perfiles fustales fue dividida en una base de ajuste para la estimación de los parámetros y una base para realizar la validación de los modelos (Tabla 1). La base de ajuste consideró la selección de un total de 90 perfiles fustales (69,2% del total) y la base de validación un total de 40 perfiles fustales (30,8% del total). El procedimiento de selección de árboles para la base de validación fue seleccionar de manera aleatoria 10 individuos dentro de las cuatro clases de tamaños definidas por los percentiles de la distribución de diámetros a 1,3 m: (0-25, 25-50, 50-75 y 75-100%). Este procedimiento permitió asegurar que la base de ajuste y validación incluyera árboles de similar clase diamétrica (Tabla 1).

### Modelos fustales evaluados

Para este estudio, se seleccionaron catorce modelos de perfiles fustales con el propósito de evaluar y comparar su capacidad predictiva (Tabla 2). Los modelos seleccionados fueron agrupados en modelos polinomiales simples, modelos segmentados y modelos de exponente variable (Burkhart y Tomé, 2012). La siguiente notación fue utilizada para describir cada una de las variables incluidas en los distintos tipos de modelos:  $D$  es el diámetro con corteza (cm) a una altura de 1,3 m sobre el suelo;  $H$  es la altura total del árbol (m);  $d$  es el diámetro sin corteza (cm) a una altura fustal  $h$ ;  $h$  es la altura fustal (m);  $HI$  es la altura desde el suelo al punto de inflexión (m);  $V$  es el volumen total sin corteza ( $m^3$ );  $T = (H-h)/H$ ;  $X = (H-h)/(H-1,3)$ ;  $Z = h/H$ ;  $k = \pi/40\,000$ ;  $p = HI/H$ ;  $t = 1,3/H$ ;  $\ln$  es el logaritmo natural y  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c$ ,  $p$  son parámetros a ser estimados ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

### Estimación de parámetros y autocorrelación de residuos.

La estimación de parámetros para cada uno de los modelos se realizó utilizando el algoritmo de minimización de la suma de cuadrados del error de MARQUARDT implementada en la subrutina PROC MODEL contenida en el software estadístico *Statistical Analysis System*, utilizando el método *Full Information Maximum Likelihood* (FIML) (SAS Institute Inc., 2009). Los datos provenientes de perfiles fustales representan múltiples mediciones longitudinales que se realizan a lo largo del fuste de cada individuo. Por lo tanto, es razonable esperar la presencia de autocorrelación en los residuales del modelo fustal, violando el supuesto de independencia de los residuales en análisis de regresión (Burkhart y Tomé, 2012). El no considerar la autocorrelación de los residuales tiene un efecto sobre la eficiencia en la estimación de parámetros obteniéndose errores estándar sesgados (Pompa-García et al., 2012). Con el propósito de considerar la autocorrelación existente en los datos fustales, se utilizó un modelo autoregresivo en tiempo continuo CAR(x) apropiado para datos no balanceados y no equidistantes para modelar la estructura del error y mejorar la eficiencia del modelo (Zimmerman y Núñez-Antón, 2001). En el estudio se expandió el término del error de la siguiente forma.

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{k=x} I_k \rho_k^{h_{ij}-h_{ij-k}} e_{ij-k} + \varepsilon_{ij}$$

donde  $e_{ij}$  es el  $j$ -ésimo residuo del árbol  $i$ ,  $I_k = 1$  para  $j > k$  y es 0 para  $j = k$  ( $k = 1, 2, \dots, x$ ),  $\rho_k$  es el parámetro autoregresivo de orden  $k$  a estimar,  $h_{ij}-h_{ij-k}$  es la distancia que

TABLA 1. Estadística descriptiva para la base de ajuste y validación.

Datos	n	$D$ (cm)			$H$ (m)		
		media	rango	CV (%)	media	rango	CV (%)
Ajuste	90	16,2	9,9-27,5	24,2	20,4	12,3-34,1	19,9
Validación	40	16,4	10,5-23,3	22,3	20,2	12,8-31,9	21,6
Total	130	16,2	9,9-27,5	23,5	20,4	12,3-34,1	20,4

CV (%): coeficiente de variación.



TABLA 2. Descripción de modelos fustales evaluados.

Modelo	Expresión matemática	
<b>Modelos polinomiales simples</b>		
Bruce <i>et al.</i> (1968)	$d = D \left[ \frac{b_1 X^{1.5} + b_2 (X^{1.5} - X^3)D + b_3 (X^{1.5} - X^3)H + b_4 (X^{1.5} - X^{32})HD}{+ b_5 (X^{1.5} - X^{32})H^{0.5} + b_6 (X^{1.5} - X^{40})H^2} \right]^{1/2} + \varepsilon$	(1)
Real y Moore (1986)	$d = D [X^2 + b_1 (X^3 - X^2) + b_2 (X^8 - X^2) + b_3 (X^{40} - X^2)]^{1/2} + \varepsilon$	(2)
Thomas y Parresol (1991)	$d = D [b_1 (Z - 1) + b_2 \sin(cnZ) + b_3 \cotan(\pi Z/2)]^{1/2} + \varepsilon$	(3)
Jiménez <i>et al.</i> (1994)	$d = D [b_0 + b_1 Z + b_2 Z^2 + b_3 Z^3 + b_4 Z^4 + b_5 Z^5]^{1/2} + \varepsilon$	(4)
Rentería (1995)	$d = D [b_1 T + b_2 T^2 + b_3 T^3]^{1/2} + \varepsilon$	(5)
<b>Modelos segmentados</b>		
Max y Burkhart (1976)	$d = D [b_1 (Z - 1) + b_2 (Z^2 - 1) + b_3 (a_1 - Z)^2 I_1 + b_4 (a_2 - Z)^2 I_2]^{1/2} + \varepsilon$ $I_i = 1 \text{ si } (a_i - Z) \geq 0, 0 \text{ si no. } (i = 1, 2)$	(6)
Cao <i>et al.</i> (1980)	$d = [(V/kH)(2T + b_1(3T^2 - 2T) + b_2(T - a_1)^2 I_1 + b_3(T - a_2)^2 I_2)]^{1/2} + \varepsilon$ $I_i = 1 \text{ si } (T - a_i) \geq 0, 0 \text{ si no. } (i = 1, 2)$	(7)
Parresol <i>et al.</i> (1987)	$d = D [T^2(b_1 + b_2 T) + (T - a_1)^2 [b_3 + b_4(T - 2a_1)] / I]^{1/2} + \varepsilon$ $I = 1 \text{ si } (T - a_1) \geq 0, 0 \text{ si no.}$	(8)
<b>Modelos de exponente variable</b>		
Kozak (1988)	$d = b_0 D^{b_1} b_2^D \left[ \frac{1 - \sqrt{Z}}{1 - \sqrt{p}} \right]^{b_3 Z^2 + b_4 \ln(Z + 0.001) + b_5 \sqrt{Z} + b_6 \exp(Z) + b_7 D/H} + \varepsilon$	(9)
Pérez <i>et al.</i> (1990)	$d = b_0 D^{b_1} \left[ \frac{1 - \sqrt{Z}}{1 - \sqrt{p}} \right]^{b_3 Z^2 + b_4 \ln(Z + 0.001) + b_5 D/H} + \varepsilon$	(10)
Newnham (1992)	$d = DX^{1/\exp[b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^2(D/H) + b_4(H/H^{0.5}) + b_5 D(H/H)]} + \varepsilon$	(11)
Torrubiano y Salinas (1998)	$d = DX^{1/\exp[b_0 + b_1 X + b_2 X^6 + b_3(D/H) + b_4(H^2/h) + b_5(H/H^{0.5})]} + \varepsilon$	(12)
Bi (2000)	$d = D \left\{ \frac{\ln \sin[(\pi/2)Z]}{\ln \sin[(\pi/2)t]} \right\}^{b_0 + b_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}Z\right) + b_2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}Z\right) + b_3 \sin\left(\frac{\pi}{2}Z\right) / Z + b_4 D + b_5 Z \sqrt{D} + b_6 Z \sqrt{H}} + \varepsilon$	(13)
Kozak (2004)	$d = b_0 D^{b_1} H^{b_2} \left[ \frac{1 - \sqrt[3]{Z}}{1 - \sqrt[3]{t}} \right]^{b_3 Z^4 + b_4 \left( \frac{1}{\exp(D/H)} \right) + b_5 \left[ \frac{1 - \sqrt[3]{Z}}{1 - \sqrt[3]{t}} \right]^{0.1} + b_6 (1/D) + b_7 H^{1 - \sqrt[3]{Z}} + b_8 \left[ \frac{1 - \sqrt[3]{Z}}{1 - \sqrt[3]{t}} \right]} + \varepsilon$	(14)

separa la altura de medición  $j$ -ésima de la altura de medición  $j$ -ésima- $k$  en cada árbol ( $b_{ij} > b_{ij-k}$ ) y  $\varepsilon_{ij}$  es el error aleatorio (Pompa-García *et al.*, 2012). Inicialmente, para cada uno de los modelos la estimación de parámetros se realizó sin considerar la inclusión de un modelo de error autorregresivo CAR(x). Posteriormente, se incluyó la estructura de error autorregresivo CAR(1), CAR(2) y CAR(3) y se evaluó la autocorrelación de los residuales utilizando

como indicador el estadístico Durbin-Watson (D-W), donde un valor de D-W igual o cercano a 2 indica ausencia de autocorrelación en los residuales (Verbeek, 2004).

#### Evaluación y comparación de modelos

La bondad de ajuste de los modelos a la muestra de datos fustales ( $n = 90$  árboles) fue evaluada utilizando como criterios el error estándar de estimación ( $S_{y,x}$ )

$$S_{y,x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{(n - p)}}$$

el coeficiente de determinación ajustado ( $R_{adj}^2$ )

$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{(n-1)\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{(n-p)\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2}$$

y el logaritmo de la verosimilitud ( $LL$ ),

$$LL = L(\theta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i; \theta)]^2$$

donde  $y_i$  es la variable dependiente observada,  $\hat{y}_i$  es la variable dependiente estimada,  $\bar{y}$  es la variable media observada,  $n$  es el número total de observaciones y  $p$  es el número de parámetros del modelo,  $L(\theta, \sigma^2)$  es el logaritmo de la función de verosimilitud, considerando errores *i.i.d.* que se aproximan a la normal con media 0 y varianza  $\sigma^2$ ,  $f()$  es una función no lineal de la matriz de variables regresoras  $x$ , con un vector de parámetros  $\theta$  (Seber y Wild, 2003).

Todos los modelos fustales fueron ajustados utilizando los diámetros sin corteza como variable dependiente para efectos de comparar estos estadísticos.

La multicolinealidad es otro de los problemas que se presenta en el ajuste de modelos de perfiles fustales. Esta se refiere a la correlación existente entre variables explicativas en modelos lineales múltiples y entre los parámetros estimados de modelos no lineales (Burkhart y Tomé, 2012), afectando la precisión de las estimaciones (Rojo *et al.*, 2005). Para evaluar la presencia de multicolinealidad en los modelos ajustados se empleó el número de condición (NC), el cual es igual a la raíz cuadrada de la razón entre el autovalor más grande y el más pequeño de la matriz de correlación de los parámetros del modelo. De acuerdo con Belsey *et al.* (2004), con valores de NC entre 5 y 10, se considera que no hay problemas de multicolinealidad, valores entre 30 y 100 están asociados con problemas moderados a fuertes de multicolinealidad

y valores de NC superiores se asocian con problemas graves de multicolinealidad. En el estudio, aquellos modelos que presentaron problemas severos de multicolinealidad fueron eliminados para el análisis de su capacidad predictiva.

La validación de los modelos fustales consideró la evaluación de la capacidad predictiva respecto a cuatro importantes atributos de este tipo de modelos: predicción de diámetros a cualquier altura fustal, predicción de alturas fustales para cualquier diámetro fustal, predicción de volúmenes acumulados hasta diversas alturas fustales y predicción de volúmenes acumulados hasta diversos diámetros fustales. En la mayoría de los estudios publicados, la comparación de modelos fustales se ha realizado considerando la evaluación de la capacidad para predecir diámetros fustales y volúmenes comerciales (Torrubiano y Salinas, 1998; Gezan *et al.*, 2009). En este estudio se pretende analizar y evaluar de manera más completa cada uno de los modelos fustales seleccionados (Tabla 2).

La metodología de validación propuesta por Arabatzis y Burkhart (1992) fue utilizada para evaluar la capacidad predictiva de los modelos. De esta manera, los residuales se definieron como:

$$e_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij}$$

donde  $y_{ij}$  es la variable de interés observada en el  $j$ -ésimo punto de medición del  $i$ -ésimo árbol y  $\hat{y}_{ij}$  es la variable de interés predicha para el  $j$ -ésimo punto de medición del  $i$ -ésimo árbol.

Para cada árbol se definió una medida de sesgo que corresponde a la media aritmética de sus residuales:

$$\bar{e}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} e_{ij}$$

donde  $n_i$  es el número de puntos de medición del  $i$ -ésimo árbol.

Adicionalmente, se calculó la varianza de los residuales que se utilizó como una medida de precisión para cada árbol:



$$v_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} e_{ij}^2 - \left( \sum_{j=1}^{n_i} e_{ij} \right)^2 / n_i}{n_i - 1}$$

A partir de ambos estadísticos se determinó una medida de error medio para cada árbol combinando la medición de sesgo y precisión:

$$MS_i = \bar{e}_i^2 + v_i$$

Posteriormente, se obtuvieron valores medios de  $\bar{e}_i$ ,  $v_i$  y  $MS_i$  para los árboles muestra evaluados. Finalmente, los valores de  $\bar{e}$ ,  $\sqrt{v}$  y  $\sqrt{MS}$  fueron utilizados en el proceso de evaluación y comparación de la capacidad predictiva de los modelos de perfiles fustales. Para la selección del mejor modelo fustal se calificó a cada uno de ellos de acuerdo con los valores de error ( $\sqrt{MS}$ ) obtenidos en la predicción de diámetros fustales, alturas fustales y volúmenes acumulados. Para cada una de las variables analizadas, al modelo fustal que presentó el menor error se le asignó el valor 1, al segundo modelo con el menor error se le asignó el valor 2 y así sucesivamente hasta alcanzar la última posición. Finalmente, el *ranking* de los modelos se obtuvo promediando los valores obtenidos para cada uno de los cuatro atributos analizados. El modelo que presentó el menor valor fue considerado como el mejor evaluado.

## RESULTADOS

### Evaluación de autocorrelación

La estimación de parámetros para los modelos fustales sin incluir una estructura autorregresiva del error presentaron valores de D-W entre 0,559 y 0,894, indicando presencia de autocorrelación en los residuales (Tabla 3). Para todos los modelos, la incorporación de un modelo autorregresivo de orden CAR(1), CAR(2) y CAR(3) permitió modelar y disminuir la autocorrelación de los residuales evaluado a través de los valores del estadístico D-W (Tabla 3). Para los catorce modelos de perfiles fustales evaluados el estadístico D-W alcanzó valores entre 1,954 y 2,081 con

un promedio de 2,012 (más cercano a 2) cuando se agregó el modelo autorregresivo CAR(3), comparado con los valores promedios de 1,602 y 1,889 para el modelo autorregresivo CAR(1) y CAR(2), respectivamente (Tabla 3). Por lo tanto, para todos los modelos fustales se decidió incorporar un modelo autorregresivo CAR(3) durante el proceso de estimación de parámetros. La figura 1 presenta el comportamiento de los residuales en la predicción de diámetros fustales para el modelo fustal (10) propuesto por Pérez *et al.* (1990). En la estimación de parámetros sin incluir una estructura autorregresiva de error, se presentó una alta correlación de los errores para el primero (LAG1), segundo (LAG2) y tercer retardo (LAG3). Cuando se incorporó en el proceso de estimación de parámetros del modelo la estructura autorregresiva de error CAR(3), se observa que la correlación de los errores para cada uno de los retardos disminuyó considerablemente.

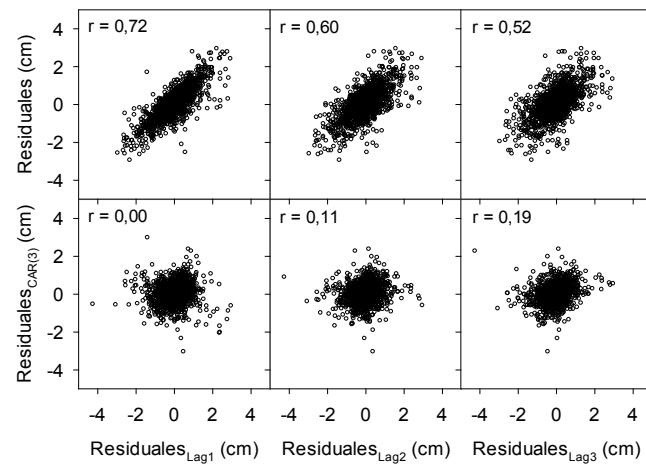


FIGURA 1. Residuales generados por el modelo de Pérez *et al.* (1990) frente a los residuales con uno, dos y tres retardos. Sin estructura autorregresiva del error (panel superior) y con estructura autorregresiva del error (panel inferior).

### Estimación de parámetros

Los parámetros estimados para los modelos de perfiles fustales, incluyendo un modelo autorregresivo CAR(3), se presentan en la tabla 4. Para el parámetro  $p$  del modelo (9) y del modelo (10) se probaron valores entre 0,05 y 0,40,

TABLA 3. Estadístico de Durbin-Watson (D-W) para cada uno de los modelos con y sin la adición de un modelo autorregresivo en tiempo continuo.

Modelo	DW	DW <sub>CAR(1)</sub>	DW <sub>CAR(2)</sub>	DW <sub>CAR(3)</sub>
1	0,578	1,593	1,906	2,004
2	0,728	1,677	1,974	2,081
3	0,679	1,551	1,881	1,992
4	0,773	1,638	1,922	2,037
5	0,894	1,739	1,893	1,954
6	0,647	1,602	1,904	2,005
7	0,701	1,682	1,957	2,058
8	0,654	1,390	1,572	2,003
9	0,646	1,646	1,944	2,034
10	0,656	1,653	1,945	2,032
11	0,606	1,554	1,880	1,993
12	0,579	1,509	1,853	1,976
13	0,559	1,553	1,884	1,991
14	0,635	1,635	1,934	2,014

lográndose el mejor ajuste de los modelos al considerar un valor de 0,35. El parámetro  $c$  del modelo (3) se igualó a 2,0 con el que se obtuvieron los mejores resultados de ajuste. Los resultados obtenidos indicaron que el error estándar de los modelos fustales se mantuvo entre 0,600 cm y 0,890 cm, el coeficiente de determinación ajustado alcanzó valores entre 0,974 y 0,988 y el logaritmo de la función de verosimilitud varió entre -2271 y -1581. El modelo (1), entre los modelos polinomiales simples; el modelo (7), entre los segmentados y el modelo (14), entre los modelos de exponente variable, fueron los mejor evaluados al observar los indicadores de bondad de ajuste. Entre todos los modelos, el modelo (14) presentó el menor error estándar de estimación, seguido por los modelos (9) y (7). Los modelos (6), (9), (10) y (14) presentaron los mayores valores de coeficiente de determinación ajustado. Los modelos (14) y (7) presentaron los mayores valores de logaritmo de la función de verosimilitud.

## Evaluación de multicolinealidad

Debido a problemas de multicolinealidad entre sus parámetros estimados, los modelos (4) y (8) fueron eliminados del proceso de evaluación de la capacidad predictiva (Jiménez *et al.*, 1994; Parresol *et al.*, 1987). Estos modelos presentaron valores de NC de 1213 y 8872. Los modelos restantes presentaron valores de NC que oscilaron entre 2 y 273 donde se espera que los efectos de la multicolinealidad no sean severos (Tabla 4). Los modelos polinomiales simples presentaron los menores valores de multicolinealidad, exceptuando el modelo (4) que presentó el valor más alto de número de condición (NC = 8872).

## Capacidad predictiva de los modelos

Los modelos de exponente variable (10) y (14) propuestos por Pérez *et al.* (1990) y Kozak (2004) obtuvieron el menor *ranking* promedio entre los modelos evaluados (Tabla 5). Ambos modelos ocuparon siempre los primeros lugares respecto a la predicción de diámetros, volumen acumulado hasta un determinado diámetro y volumen acumulado hasta una determinada altura fustal. Estos dos modelos presentaron errores promedio de 0,814 cm y 0,891 cm en la predicción de diámetros fustales y de 0,952 m y 0,967 m en la predicción de alturas fustales. En la predicción de volúmenes acumulados a partir de una altura conocida, los modelos presentaron valores de 0,012 m<sup>3</sup> y 0,013 m<sup>3</sup>, respectivamente y en la predicción de volúmenes acumulados hasta un diámetro conocido ambos presentaron valores iguales a 0,019 m<sup>3</sup> (Tabla 5).

La tabla 6 muestra el comportamiento de las medidas de sesgo, precisión y error probable a lo largo del fuste en clases de altura relativa. Se observa que no existen diferencias considerables para los dos modelos. Los modelos presentan alta consistencia en sus predicciones, los mayores errores probables en diámetros fustales se encuentran en la base (hasta 10% de  $h/H$ ) y hacia el ápice del árbol (entre 60% y 90% de  $h/H$ ) con valores de 1,028 cm a 1,184 cm y 1,027 cm a 1,123 cm, respectivamente. Para las predicciones de alturas fustales, los mayores errores probables fueron encontrados en la sección media del fuste (entre 20% y 90% de  $h/H$ ) con valores de hasta 1,001 m - 1,379 m y



TABLA 4. Parámetros estimados, error estándar ( $S_{y,x}$ ), coeficiente de determinación ajustado ( $R^2_{adj}$ ), logaritmo de verosimilitud (LL) y número de condición (NC) para los modelos seleccionados ( $n = 90$  árboles).

Modelo	$\hat{b}_0$	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$	$\hat{b}_3$	$\hat{b}_4$	$\hat{b}_5$	$\hat{b}_6$	$\hat{b}_7$	$\hat{b}_8$	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$S_{y,x}$	$R^2_{adj}$	LL	NC
1	-	0,8398	-0,0344	0,0288	0,0001	0,0221	-0,0003	-	-	-	-	0,619	0,987	-1636	27
2	-	-1,8957	0,6960	0,0013	-	-	-	-	-	-	-	0,754	0,981	-1981	6
3	-	-0,7572	0,0818	0,0027	-	-	-	-	-	-	-	0,813	0,978	-2112	2
4	1,4079	-8,8573	35,0581	-68,2997	60,4342	-19,7687	-	-	-	-	-	0,725	0,981	-1853	8872
5	-	0,4316	-0,3617	1,2727	-	-	-	-	-	-	-	0,890	0,974	-2271	29
6	-	-3,7019	1,8496	-1,4723	353,0828	-	-	-	-	0,7978	0,0394	0,617	0,988	-1631	151
7	-	0,6601	-0,5390	983,5504	-	-	-	-	-	0,4803	0,9619	0,611	0,987	-1581	12
8	-	2,0396	-1,2365	-2215,1856	812,3659	-	-	-	-	0,9142	-	0,648	0,986	-1715	1213
9	0,6099	1,1055	0,9906	0,3435	-0,0689	0,0231	0,1553	0,1243	-	-	-	0,606	0,988	-1596	273
10	0,8645	0,9252	0,6695	-0,0672	0,3241	-	-	-	-	-	-	0,612	0,988	-1616	35
11	0,3825	0,2194	-0,1545	-0,4014	-0,0261	0,0001	-	-	-	-	-	0,666	0,985	-1763	31
12	0,5911	-0,1097	0,2921	-0,1996	0,0002	-0,0423	-	-	-	-	-	0,666	0,985	-1763	50
13	0,0072	0,2673	0,0949	0,0485	0,0031	0,0297	-0,0164	-	-	-	-	0,648	0,986	-1716	162
14	0,6844	0,9710	0,1079	0,6201	0,0744	0,4980	-2,3171	0,0176	-0,0127	-	-	0,600	0,988	-1581	70

TABLA 5. Medidas de sesgo ( $\bar{e}$ ), precisión ( $\sqrt{\bar{v}}$ ), error probable ( $\sqrt{MS}$ ) y ranking, determinadas usando la base de validación ( $n = 40$  árboles).

Modelo	$d$ (cm)			$h$ (m)			$V_{acum}$ (m <sup>3</sup> ssc) $h$ conocido			$V_{acum}$ (m <sup>3</sup> ssc) $d$ conocido			Ranking				
	$\bar{e}$	$\sqrt{\bar{v}}$	$\sqrt{MS}$	$\bar{e}$	$\sqrt{\bar{v}}$	$\sqrt{MS}$	$\bar{e}$	$\sqrt{\bar{v}}$	$\sqrt{MS}$	$\bar{e}$	$\sqrt{\bar{v}}$	$\sqrt{MS}$					
<i>Modelos polinomiales simples</i>																	
1	-0,134	0,718	0,899	(4)	-0,170	0,834	1,069	(6)	0,000	0,007	0,013	(3)	-0,001	0,009	0,020	(3)	4,0
2	-0,261	0,912	1,063	(6)	-0,092	0,742	0,943	(1)	-0,006	0,007	0,013	(6)	-0,007	0,010	0,020	(6)	4,8
3	-0,168	0,948	1,088	(8)	-0,395	1,154	1,395	(10)	-0,003	0,009	0,014	(7)	-0,010	0,014	0,026	(8)	8,3
5	-0,392	1,335	1,486	(11)	-0,215	1,359	1,504	(11)	-0,019	0,010	0,027	(11)	-0,027	0,019	0,041	(11)	11,0
<i>Modelos segmentados</i>																	
6	-0,032	0,678	0,844	(2)	-0,047	0,728	0,950	(2)	-0,001	0,007	0,013	(4)	-0,002	0,009	0,020	(4)	3,0
7	-0,159	0,806	0,957	(5)	-0,138	0,871	1,064	(5)	-0,003	0,007	0,013	(5)	-0,004	0,010	0,020	(5)	5,0
<i>Modelos de exponente variable</i>																	
10	-0,084	0,727	0,891	(3)	-0,106	0,724	0,967	(4)	0,000	0,007	0,012	(1)	0,000	0,009	0,019	(1)	2,3
11	-0,411	0,940	1,145	(10)	-0,355	0,880	1,106	(9)	-0,014	0,009	0,020	(9)	-0,020	0,010	0,028	(9)	9,3
12	-0,406	0,948	1,144	(9)	-0,335	0,916	1,103	(8)	-0,015	0,010	0,021	(10)	-0,021	0,010	0,028	(10)	9,3
13	-0,417	0,812	1,065	(7)	-0,393	0,799	1,103	(7)	-0,009	0,007	0,015	(8)	-0,014	0,011	0,023	(7)	7,3
14	-0,118	0,616	0,814	(1)	-0,130	0,686	0,952	(3)	0,000	0,007	0,013	(2)	0,000	0,009	0,019	(2)	2,0

Nota: valores entre paréntesis indican la posición ocupada por el modelo en la predicción de la variable correspondiente.

0,997 m - 1,391 m para los modelos (10) y (14), respectivamente. Sin embargo, no se apreciaron diferencias notorias entre los dos modelos para la predicción de volúmenes comerciales (Tabla 6).

Basados en los estadísticos de bondad de ajuste y predicción, los modelos mejor evaluados fueron los modelos (10) y (14) desarrollados por Pérez *et al.* (1990) y Kozak (2004), respectivamente. Los gráficos de dispersión entre los valores observados y los valores predichos para cada una de las variables evaluadas indican una alta asociación

entre estas y la ausencia de sesgo en las predicciones para estos modelos (Fig. 2 y 3).

Finalmente, los modelos seleccionados fueron reajustados uniendo la base de ajuste y validación (Tabla 7). Los modelos ajustados considerando toda la base de información fustal disponible presentaron un  $R^2_{adj} = 0,986$  y 0.987, un  $S_{y,x} = 0,659$  y 0.624 cm, y una LL = -2486.19 y -2349.65 para los modelos de Pérez *et al.* (1990) y Kozak (2004), respectivamente. Los coeficientes mantuvieron los signos del modelo inicial, siendo todos los parámetros

TABLA 6. Medidas de sesgo ( $\bar{e}$ ), precisión ( $\sqrt{v}$ ), error probable ( $\sqrt{MS}$ ) por clases de altura relativa para los modelos de Pérez *et al.* (1990) y Kozak (2004), determinadas usando la base de validación ( $n = 40$  árboles).

Altura relativa	n	d (cm)			h (m)			$V_{acum}$ (m <sup>3</sup> ssc) h conocido			$V_{acum}$ (m <sup>3</sup> ssc) d conocido		
		$\bar{e}$	$\sqrt{v}$	$\sqrt{MS}$	$\bar{e}$	$\sqrt{v}$	$\sqrt{MS}$	$\bar{e}$	$\sqrt{v}$	$\sqrt{MS}$	$\bar{e}$	$\sqrt{v}$	$\sqrt{MS}$
Modelo Pérez <i>et al.</i> (1990)													
0,0 ≤ h/H ≤ 0,1	134	-0,112	1,179	1,184	-0,003	0,306	0,306	0,000	0,003	0,003	0,001	0,009	0,009
0,1 < h/H ≤ 0,2	68	0,114	0,605	0,615	0,101	0,877	0,883	0,001	0,005	0,005	0,004	0,019	0,020
0,2 < h/H ≤ 0,3	74	0,039	0,672	0,673	-0,030	1,295	1,295	0,002	0,007	0,007	0,004	0,027	0,027
0,3 < h/H ≤ 0,4	74	-0,185	0,672	0,697	-0,419	1,314	1,379	0,002	0,009	0,010	-0,001	0,025	0,025
0,4 < h/H ≤ 0,5	73	-0,179	0,611	0,637	-0,357	1,038	1,098	0,002	0,012	0,012	-0,001	0,022	0,022
0,5 < h/H ≤ 0,6	75	-0,043	0,844	0,845	-0,085	1,151	1,154	0,002	0,014	0,014	0,003	0,023	0,023
0,6 < h/H ≤ 0,7	71	0,027	1,105	1,105	0,004	1,229	1,229	0,001	0,016	0,016	0,002	0,022	0,022
0,7 < h/H ≤ 0,8	73	0,049	1,156	1,157	0,027	1,119	1,119	0,001	0,019	0,019	0,002	0,021	0,021
0,8 < h/H ≤ 0,9	53	-0,025	1,123	1,123	-0,059	0,999	1,001	0,004	0,023	0,023	0,004	0,024	0,024
0,9 < h/H ≤ 1,0	87	-0,018	0,629	0,629	-0,034	0,600	0,601	0,003	0,021	0,021	0,003	0,021	0,022
Modelo Kozak (2004)													
0,0 ≤ h/H ≤ 0,1	134	-0,308	0,981	1,028	-0,136	0,321	0,348	-0,001	0,002	0,003	-0,005	0,009	0,010
0,1 < h/H ≤ 0,2	68	0,026	0,632	0,632	-0,043	0,841	0,842	-0,002	0,004	0,004	0,000	0,018	0,018
0,2 < h/H ≤ 0,3	74	0,135	0,712	0,724	0,111	1,210	1,215	0,000	0,007	0,007	0,005	0,025	0,026
0,3 < h/H ≤ 0,4	74	-0,003	0,722	0,722	-0,100	1,388	1,391	0,001	0,009	0,009	0,003	0,026	0,026
0,4 < h/H ≤ 0,5	73	-0,017	0,627	0,627	-0,068	1,118	1,120	0,001	0,012	0,012	0,003	0,024	0,024
0,5 < h/H ≤ 0,6	75	0,023	0,813	0,814	0,044	1,211	1,212	0,003	0,015	0,015	0,005	0,025	0,025
0,6 < h/H ≤ 0,7	71	-0,097	1,022	1,027	-0,102	1,185	1,190	0,002	0,017	0,017	0,002	0,023	0,023
0,7 < h/H ≤ 0,8	73	-0,075	1,054	1,056	-0,064	0,995	0,997	0,002	0,019	0,019	0,002	0,022	0,022
0,8 < h/H ≤ 0,9	53	0,028	1,016	1,016	-0,013	0,870	0,870	0,005	0,023	0,024	0,005	0,024	0,024
0,9 < h/H ≤ 1,0	87	0,020	0,576	0,576	-0,012	0,589	0,589	0,003	0,022	0,022	0,003	0,022	0,022

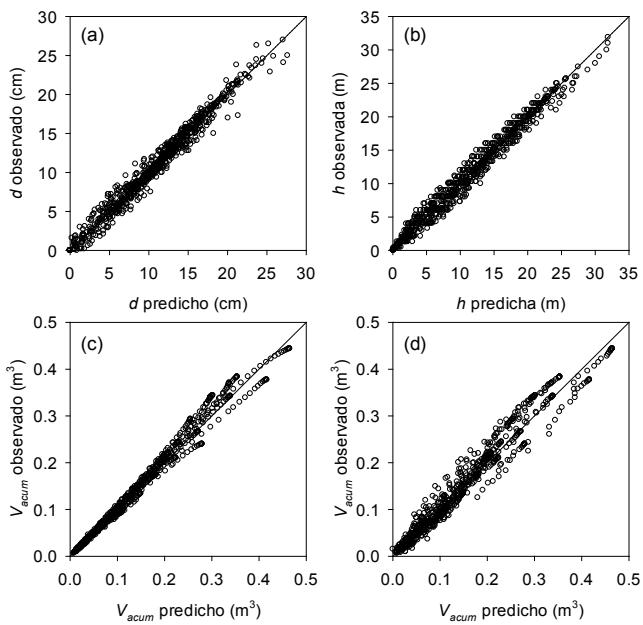


FIGURA 2. Valores observados *versus* predichos para (a) diámetros fustales, (b) alturas fustales, (c) volúmenes acumulados a partir de altura fustal conocida y (d) volúmenes acumulados a partir del diámetro fustal conocido, para el modelo de Pérez *et al.* (1990).

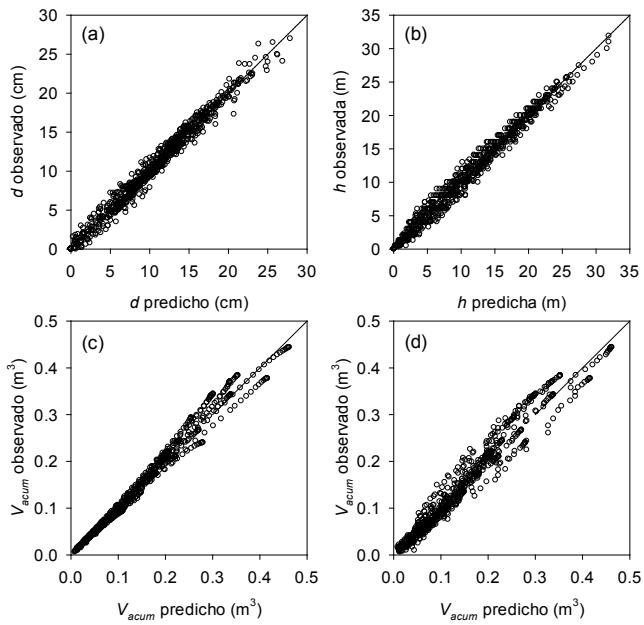


FIGURA 3. Valores observados *versus* predichos para (a) diámetros fustales, (b) alturas fustales, (c) volúmenes acumulados a partir de altura fustal conocida y (d) volúmenes acumulados a partir del diámetro fustal conocido, para el modelo de Kozak (2004).

estimados altamente significativos. Los parámetros autorregresivos ( $\rho_i$ ) de los modelos representan la correlación espacial entre el residual a una altura fustal y su residual antecesor. Estos parámetros podrían eventualmente ser utilizados en la determinación del número de secciones óptimas en muestreos fustales (Berhe y Arnoldsson, 2011). No obstante, su principal finalidad radica en mejorar la interpretación de las propiedades estadísticas de los modelos evaluados (Rojo *et al.*, 2005).

## DISCUSIÓN

En el estudio se comparan catorce modelos de perfiles fustales mencionados en la literatura en cuanto a su capacidad predictiva de diámetros, alturas y volúmenes comerciales de árboles de *E. tereticornis* creciendo en la costa atlántica colombiana. El estudio detectó diferencias entre los modelos evaluados respecto a sus capacidades para predecir diámetros, alturas y volúmenes

fustales. Durante el proceso de estimación de parámetros, resalta la importancia de considerar la autocorrelación en el ajuste de los modelos de perfiles fustales. Debido a que los datos usados contienen múltiples observaciones para cada árbol, se encontró una alta autocorrelación entre los residuales de los modelos. La incorporación de un modelo de error autorregresivo de orden tres CAR(3) en la estimación de parámetros de los catorce modelos de perfiles fustales evaluados, permitió modelar adecuadamente la autocorrelación de los residuales, pasando de valores iniciales de 0,67 a valores de 2,01 en el estadístico D-W. Investigaciones previas han demostrado que la incorporación de estructuras de error autorregresivas CAR(1) o CAR(2) en el proceso de ajuste han sido requeridas para modelar la autocorrelación propia de los datos longitudinales, lo cual es coincidente con los resultados de este estudio (Garber y Maguire, 2003; Rojo *et al.*, 2005).

TABLA 7. Parámetros estimados para los modelos de Pérez et al. (1990) y Kozak (2004) reajustado con el total de datos (n = 130 árboles).

Parámetros	Pérez et al. (1990)				Kozak (2004)			
	Estimación	Error estándar	Valor t	P-valor	Estimación	Error estándar	Valor t	P-valor
$\hat{b}_0$	0,795147	0,0230	34,62	<0,0001	0,628065	0,0151	41,53	<0,0001
$\hat{b}_1$	0,955151	0,0100	95,99	<0,0001	0,952042	0,0126	75,84	<0,0001
$\hat{b}_2$	0,715399	0,0248	28,86	<0,0001	0,153101	0,0134	11,46	<0,0001
$\hat{b}_3$	-0,069430	0,0020	-35,51	<0,0001	0,568572	0,0223	25,50	<0,0001
$\hat{b}_4$	0,294882	0,0135	21,87	<0,0001	0,407888	0,0674	6,05	<0,0001
$\hat{b}_5$					0,354776	0,0311	11,40	<0,0001
$\hat{b}_6$					-2,504650	0,2536	-9,88	<0,0001
$\hat{b}_7$					0,021455	0,0007	30,74	<0,0001
$\hat{b}_8$					-0,043700	0,0015	-29,05	<0,0001
<i>Parámetros autorregresivos</i>								
$\hat{\rho}_1$	0,618470	0,0228	27,16	<0,0001	0,621844	0,0153	40,64	<0,0001
$\hat{\rho}_2$	0,642951	0,0193	33,23	<0,0001	0,635115	0,0197	32,17	<0,0001
$\hat{\rho}_3$	0,542643	0,0207	26,25	<0,0001	0,538622	0,0137	39,30	<0,0001

La incorporación de un modelo de autocorrelación de los residuales en el ajuste de modelos de perfiles fustales tiene un efecto positivo sobre la eficiencia en la estimación de parámetros (Pompa-García et al., 2012), la cual se refleja en la disminución del error estándar de los modelos evaluados en el presente estudio. Para el caso del presente estudio, el modelo (10) muestra una disminución de 20% del error estándar con la incorporación de un modelo CAR(3). El número de condición (NC) presenta también una disminución de 17% con respecto al modelo original sin tener en cuenta la autocorrelación. Sin embargo, la corrección de la autocorrelación no tiene un mejoramiento de la capacidad predictiva de los modelos de perfiles fustales (Kozak, 1997), sino más bien su propósito es el de mejorar la interpretación de las propiedades estadísticas de los modelos (Pompa-García et al., 2012).

En el estudio se encontraron diferencias en la capacidad predictiva entre los tres tipos de modelos evaluados. Los modelos de exponente variable generalmente mostraron los mejores resultados en la fase de evaluación de la bondad de ajuste y capacidad predictiva a nivel del fuste entero. Este resultado reafirma los obtenidos en estudios recientes en los que se ha señalado que los modelos de perfiles fustales de exponente variable permiten obtener predicciones de diámetros fustales con menor sesgo y mayor precisión en comparación con los modelos polinomiales simples y segmentados (Kozak, 2004; Heidarsson y Pukkala, 2011; Li et al., 2012; De-Miguel et al., 2012).

Los modelos polinomiales simples presentaron mayor sesgo, menor precisión y mayor error promedio. Sin embargo, el modelo (2) ocupó el primer lugar en la predicción de alturas fustales. Este resultado fue inesperado debido que el modelo (2) se desempeñó deficientemente en



la predicción de diámetros y volúmenes comerciales. Otros estudios han mostrado que los modelos polinomiales simples presentan deficiencias para describir la porción basal de los árboles, especialmente en árboles que exhiben una alta conicidad (Heidarsson y Pukkala, 2011). Gaillard *et al.* (1997) ajustaron los modelos polinomiales simples de Kozak *et al.* (1969) y Dermarschalk (1972) a perfiles de *E. tereticornis* en Argentina, encontrando que ambos modelos tenían deficiencias para describir la base y el ápice del árbol. La conicidad de los árboles depende en gran medida del nivel de competencia al interior del rodal. Árboles creciendo en rodales densos tienden a tener una menor conicidad que árboles desarrollándose a bajas densidades (Larson, 1963). Los modelos de perfiles fustales deben tener la capacidad de describir estas variaciones debidas a la silvicultura, en algunos casos requiriéndose la incorporación de variables que den cuenta del sitio y nivel de competencia (Muhamirwe *et al.*, 1994; Calama y Montero, 2006).

Los modelos segmentados evaluados presentaron una alta multicolinealidad lo que llevó a que solo los modelos (6) y (7) fueran evaluados en su capacidad predictiva. A pesar de esto, el modelo de Max y Burkhart (1976) ocupó la tercera posición en el *ranking* de modelos. La multicolinealidad es típica de modelos con muchos parámetros o muchos términos polinómicos y otras transformaciones de la misma variable regresora (Kozak, 1997). Por lo tanto, se deben descartar modelos demasiado complejos, ya que la incorporación de parámetros adicionales no representa un aporte significativo en la capacidad predictiva de los modelos.

Los modelos de exponente variable (10) y (14) propuestos por Pérez *et al.* (1990) y Kozak (2004) se ubicaron en las primeras posiciones del *ranking* con los menores errores promedio en la predicción de diámetros y alturas fustales y volumen acumulado a partir de diámetros y alturas conocidas. El modelo (10) presentó la mejor capacidad predictiva de volúmenes comerciales a partir de diámetros y alturas conocidas. Contrariamente, el modelo (14) presentó la mejor capacidad predictiva de diámetros y alturas fustales. Sin embargo, el modelo (10) presentó una

menor multicolinealidad ( $NC = 35$ ) en comparación con el modelo (14) ( $NC = 70$ ).

Finalmente, considerando la capacidad predictiva de los modelos de Pérez *et al.* (1990) y Kozak (2004) y la moderada multicolinealidad existente entre sus parámetros estimados, se sugiere su empleo en plantaciones de *E. tereticornis*. Estos modelos presentan propiedades adecuadas como (i)  $d = 0$  cuando  $b/H = 1$ ; (ii)  $d = DI$  (diámetro al punto de inflexión) cuando  $b/H =$  punto de inflexión ( $p$  en el modelo 10 y  $t$  en el modelo 14); (iii) la función cambia de dirección cuando  $b/H =$  punto de inflexión ( $p$  en el modelo 10 y  $t$  en el modelo 14) (Burkhart y Tomé, 2012). La aplicación de los modelos seleccionados requiere utilizar métodos de integración numérica para el cálculo de volúmenes totales y comerciales y métodos iterativos para interpolar la altura fustal para un determinado diámetro límite de utilización (Pérez *et al.*, 1990; Kozak, 2004; Rojo *et al.*, 2005).

## CONCLUSIONES

Se observaron diferencias entre los tres tipos de modelos tanto en la bondad de ajuste como en la capacidad predictiva, siendo los de exponente variable los mejor evaluados. La autocorrelación de los residuales de todos los modelos fustales evaluados fue modelada adecuadamente a través de la incorporación de una estructura autorregresiva del error de orden 3 CAR(3). Los modelos de exponente variable propuestos por Pérez *et al.* (1990) y Kozak (2004) presentaron las mejores capacidades predictivas de diámetros y alturas fustales, y volumen acumulado hasta un cierto diámetro fustal o altura fustal. Ambos modelos de exponente variable fueron igualmente competitivos, el modelo propuesto por Pérez *et al.* (1990) presentó una menor multicolinealidad entre sus parámetros estimados en comparación al modelo de Kozak (2004). Sin embargo, los estadísticos de sesgo, precisión y error probable no evidenciaron diferencias en la capacidad predictiva de diámetros y alturas fustales y volúmenes comerciales a lo largo del fuste. Debido a lo anterior, los modelos (10) y (14) son recomendados para ser utilizados en la estimación de volúmenes comerciales en plantaciones de *E. tereticornis* establecidas en la costa atlántica colombiana.

## RECONOCIMIENTOS

El financiamiento necesario para el desarrollo de esta investigación se obtuvo de los proyectos de investigación 2008K7812-3814 y 2008K7812-3818 ejecutados por La Corporación Nacional de Investigación y Fomento Forestal-CONIF y cofinanciados por el Ministerio de Agricultura y Desarrollo Rural de Colombia y COLCIENCIAS a través del programa cierre de brechas 2013.

## REFERENCIAS

- Arabatzis, A. y H.E. Burkhart. 1992. An evaluation of sampling methods and model forms for estimating height-diameter relationships in loblolly pine plantations. *Forest Science* 38(1):192-198.
- Avery, T.E. y H.E. Burkhart. 2001. Forest measurements. 5a ed. McGraw-Hill. Nueva York, EUA. 456 p.
- Barrios, A., A.M. López y V.M. Nieto. 2011. Experiencias y avances en el manejo silvícola de plantaciones forestales comerciales. Corporación Nacional de Investigación y Fomento Forestal-CONIF- Ministerio de Agricultura y Desarrollo Rural-MADR. Bogotá, Colombia. 92 p.
- Belsey, D.A., E. Kuh y R.E. Welsch. 2004. Regression diagnostics: Identifying influential data and sources of collinearity. John Wiley & Sons. Nueva York, EUA. 292 p.
- Benbrahim, M. y A. Gavaland. 2003. A new stem taper function for short-rotation poplar. *Scandinavian Journal of Forest Research* 18:377-383.
- Berhe, L. y G. Arnoldsson. 2011. Ds-optimal designs for Kozak's tree taper model. *Journal of Applied Statistics* 38(5):1087-1102.
- Bi, H. 2000. Trigonometric variable-form taper equations for Australian *Eucalyptus*. *Forest Science* 46:397-407.
- Biging, G.S. 1984. Taper equations for second growth mixed conifers of northern California. *Forest Science* 30:1103-1117.
- Bruce, D., R.O. Curtis y C. Vancoevering. 1968. Development of a system of taper and volume tables for red alder. *Forest Science* 14:339-350.
- Burkhart, H.E. y M. Tomé. 2012. Modeling forest trees and stands. Springer, Nueva York, EUA. 457 p.
- Calama, R. y G. Montero. 2006. Stand and tree-level variability on stem form and tree volume in *Pinus pinea* L.: A multi-level random components approach. *Investigación Agraria: Sistemas y Recursos Forestales* 15(1):24-41.
- Cao, Q.V., H.E. Burkhart y T.A. Max. 1980. Evaluating of two methods for cubic-volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. *Forest Science* 26:71-80.
- Demaerschalk, J.P. 1972. Converting volume equations to compatible taper equations. *Forest Science* 18:241-245.
- De-Miguel, S., L. Mehtätalo, Z. Shater, B. Kraid y T. Pukkala. 2012. Evaluating marginal and conditional predictions of taper models in the absence of calibration data. *Canadian Journal of Forest Research* 42:1383-1394.
- Gaillard, C., M.G. Pece y N. Ríos. 1997. Ajuste de funciones de forma en *Eucalyptus tereticornis*. *Quebracho* 5:51-62.
- Garber, S.M. y D.A. Maguire. 2003. Modeling stem taper of three central Oregon species using nonlinear mixed effects models and autoregressive error structures. *Forest Ecology and Management* 179:507-522.
- Gezan, S.A., M. Moreno, C. Paulo y A. Ortega. 2009. Modelos fustales para renovales de roble, raulí y coigüe en Chile. *Bosque* 30(2):61-69.
- Gómez, E., F. Crecente y U. Diéguez. 2013. Selection of mixed-effects parameters in a variable-exponent taper equation for birch trees in northwestern Spain. *Annals of Forest Science* 70:707-715.
- Gordon, A. 1983. Comparison of compatible polynomial taper equations. *New Zealand Journal of Forestry Science* 13(2):146-158.
- Guimarães, C.A., M.L. Bolzan, P.R. Schneider, J.E. Meyer y M.C. Bueno. 1995. Funções de forma para *Eucalyptus dunnii* Maiden implantados na depressão central e encosta do sudeste do Rio Grande do Sul. *Ciência Rural* 25(3):399-403.
- Heidarsson, L. y T. Pukkala. 2011. Taper functions for lodgepole pine (*Pinus contorta*) and siberian larch (*Larix sibirica*) in Iceland. *Icelandic Agricultural Sciences* 24:3-11.
- Jiménez, J., O. Aguirre, M. Niembro, J. Navar y A. Domínguez. 1994. Determinación de la forma externa de *Pinus hartwegii* Lindl. en el noreste de México. *Investigación Agraria: Sistemas y Recursos Forestales* 3(2):175-182.



- Kozak, A., D.D. Munro y J.H.G. Smith. 1969. Taper functions and their application in forest inventory. *The Forestry Chronicle* 45:278-283.
- Kozak, A. 1988. A variable exponent taper equation. *Canadian Journal of Forest Research* 18:1363-1368.
- Kozak, A. 1997. Effects of multicollinearity and autocorrelation on the variable-exponent taper functions. *Canadian Journal of Forest Research* 27:619-629.
- Kozak, A. 2004. My last words on taper equations. *The Forestry Chronicle* 80(4):507-515.
- Larson, P.R. 1963. Stem form development of forest trees. *Forest Science* (Monograph 5). 42 p.
- Li, R., A.R. Weiskittel, A. Dick, J. Kershaw y R. Seymour. 2012. Regional stem taper equations for eleven conifer species in the Acadian region of North America: development and assessment. *Northern Journal of Applied Forestry* 29(1):5-14.
- López, A.M., A. Barrios, G. Trincado y V.M. Nieto. 2011. Monitoreo y modelamiento del crecimiento para el manejo de plantaciones forestales comerciales. Corporación Nacional de Investigación y Fomento Forestal-CONIF- Ministerio de Agricultura y Desarrollo Rural-MADR. Bogotá, Colombia. 90 p.
- MADEFLEX. 2010. Informe de desempeño convenio F-050-06-6-035. Suscrito entre USAID MIDAS- MADEFLEX. Barranquilla, Colombia. 120 p.
- Max, T.A. y H.E. Burkhart. 1976. Segmented polynomial regression applied to taper equations. *Forest Science* 22:283-289.
- Mendonça, A.R., G.F. Silva, J.T. Silva, G.S. Nogueira y A.L. Assis. 2007. Avaliação de funções de afilamento visando a otimização de fustes de *Eucalyptus sp.* para multiprodutos. *Cerne* 13(1):71-82.
- Muhairwe, C.K., V.M. Le May y A. Kozak. 1994. Effects of adding tree, stand and site variables to Kozak's variable-exponent taper equation. *Canadian Journal of Forest Research* 24:252-259.
- Muhairwe, C.K. 1999. Taper equations for *Eucalyptus pilularis* and *Eucalyptus grandis* for the north coast in New South Wales, Australia. *Forest Ecology and Management* 113:251-269.
- Newnham, R.M. 1992. Variable-form taper functions for four Alberta tree species. *Canadian Journal of Forest Research* 22:210-223.
- Obregón, C., N Restrepo. 2007. El Eucalipto: Una opción de alta rentabilidad. *El Mueble y La Madera* 53:14-19.
- Ormerod, D.W. 1973. A simples bole model. *The Forestry Chronicle* 49(3):136-138.
- Parresol, B.R., J.E. Hotvedt y Q.V. Cao. 1987. A volume and taper prediction system for bald cypress. *Canadian Journal of Forest Research* 17:250-259.
- Pérez D.N., H.E. Burkhart y C.T. Stiff. 1990. A variable-form taper function for *Pinus oocarpa* Schiede in central Honduras. *Forest Science* 36(1):186-191.
- Pompa-García, M., J. Vega-Muñoz, R. Soto-Gutiérrez, G. Trincado y F. Cruz-Cobos. 2012. Estimates of the bark thickness in bole profiles of oak in northern Mexico. *Research Journal of Forestry* 6(2):32-40.
- Real, P.L. y J.A. Moore. 1986. An individual tree system for Douglas-fir in the inland north-west. In Ek A.R., S.R. Shifley y T.E. Burk. "Forest growth modelling and prediction". Proceeding of IUFRO Conference, 24-28 August 1986, Minneapolis, Minnesota, USDA Forestry Service General Technical Report NC-120. p. 1037-1044.
- Rentería, A. 1995. Estimación del volumen comercial de *Pinus cooperi* Blanco mediante modelos de ahusamiento en Durango. II Congreso Mexicano de Recursos Forestales, Resumen de Ponencias. Montecillo, México. 91 p.
- Rojo, A., X. Perales, F. Sánchez, J. Álvarez y K.V. Gadow. 2005. Stem taper functions for maritime pine (*Pinus pinaster* Ait.) in Galicia (northwestern Spain). *European Journal of Forest Research* 124:177-186.
- Seber, G.A.F. y C.J. Wild. 2003. Nonlinear regression. John Wiley & Sons. Hoboken, NJ, EUA. 752 p.
- Statistical Analysis System Institute Inc. (SAS). 2009. User's guide 2a ed. Version 9.2 for Windows. Cary, NC, EUA. 7869 p.
- Souza, C.A., G. Silva, A. Xavier, J.F. Chichorro, C.P. Soares y A. Souza. 2008. Avaliação de modelos de afilamento segmentados na estimativa da altura e volume comercial de fustes de *Eucalyptus sp.* Árvore 32(3):453-463.

- Tasissa, G. y H.E. Burkhart. 1998. An application of mixed effects analysis to modeling thinning effects on stem profile of loblolly pine. *Forest Ecology and Management* 103:87-101.
- Thomas, C.E. y B.R. Parresol. 1991. Simple, flexible, trigonometric taper equations. *Canadian Journal of Forest Research* 21:1132-1137.
- Tomé M., J. Tomé, F. Ribeiro y S. Faias. 2007. Equação de volume total, volume percentual e de perfil do tronco para *Eucalyptus globulus* Labill. em Portugal. *Silva Lusitana* 15(1):25-39.
- Torrubiano, C. y H. Salinas. 1998. Herramientas de cubicación para pino oregón (*Pseudotsuga menziesii* (Mirb) Franco) ubicado en la zona de Valdivia. *Bosque* 19(2):11-21.
- Trincado, G. y H.E. Burkhart. 2006. A generalized approach for modeling and localizing stem profile curves. *Forest Science* 52(6):670-682.
- Verbeek, M. 2004. A guide to modern econometrics. 2a ed. John Wiley & Sons. West Sussex, Inglaterra. 429 p.
- Zimmerman, D. y V. Núñez-Antón. 2001. Parametric modelling of growth curve data: An overview. *Test* 10(1):1-73.

Manuscrito recibido el 13 de julio de 2014.  
Aceptado el 2 de abril de 2015.

Este documento se debe citar como:

López, A.M., A. Barrios y G. Trincado. 2015. Modelos de perfiles fustales con una estructura de error autorregresiva para plantaciones de *Eucalyptus tereticornis* en Colombia. *Madera y Bosques* 21(2):73-88.