Investigación Económica, Vol. LXIII, 247, enero-marzo, 2004, pp. 143-170

Gasto público y efectos de los impuestos en los modelos de crecimiento endógeno con capital humano

MARÍA JESÚS FREIRE*

INTRODUCCIÓN

Uno de los tópicos de la literatura económica en las últimas décadas es el crecimiento del gasto público como indicador de la presencia del Estado en la asignación de los recursos escasos de la economía. La creciente intervención de los gobiernos que tiene lugar en las economías de los países desarrollados, más allá de la simple garantía de los derechos de propiedad, se ha convertido en un rasgo típico en nuestros días.

La abundante literatura acerca de la expansión del gasto público y las propuestas para frenar su crecimiento no han conseguido un acuerdo sobre cuál debería ser el tamaño óptimo del sector público en una economía moderna. Sin embargo, en lo que sí existe unanimidad, entre los analistas de este proceso, es en señalar cuáles han sido las circunstancias de este crecimiento.

Manuscrito recibido en mayo de 2002; aceptado en agosto de 2003.
* Facultad de Ciencias Económicas y empresariales, Universidad La Coruña, España; <maje@udc.es>. La autora agradece los comentarios de dos dictaminadores anónimos.

En primer lugar, podemos indicar la importancia del capital humano como factor de producción que afecta al crecimiento económico, de modo que se sientan las bases para una intervención del sector público en el terreno educativo, pero hay que pensar que la provisión pública de bienes y servicios exige su correspondiente financiación. Segundo, el factor ideológico. El arraigo de una filosofía político-económica favorable a la intervención del sector público para atender los fallos del mercado. Tercero, la expansión económica ha hecho más fácil la recaudación de impuestos y la posibilidad de financiar los déficit públicos que, en caso contrario, se hubiesen producido. Por último, el funcionamiento de las instituciones democráticas ha permitido asegurar un cierto nivel de bienestar. En su conjunto, el gasto público, sobre todo las partidas de gasto social, tanto en valores absolutos como en relación con el producto interno bruto (PIB), en los países desarrollados se ha mostrado como la macromagnitud más dinámica.

La actuación del sector público, a través de políticas de gasto en educación en relación con el producto total, sobre todo en sus niveles básicos, se justifica con la creación de un entorno de igualdad de oportunidades que, a largo plazo, tendrá efectos sobre la tasa de crecimiento.

Una característica imputable a la educación es la de ser una fuente importante de generación de externalidades positivas. Si bien no existe un acuerdo unánime respecto del nivel educativo en el que predominan tales economías externas, la idea de que la educación no sólo beneficia a quien la recibe, sino también al conjunto de la sociedad constituye un hecho indiscutible que plantea considerables problemas al análisis microeconómico; pero, si la externalidad no se incluye en las valoraciones marginales éstas dejan de ser señales que orienten de manera eficiente las decisiones de producción y de consumo.

La teoría del crecimiento ha conocido un desarrollo importante en los últimos 20 años. A finales de la década de los cincuenta, Solow (1957) había puesto los cimientos de la teoría moderna del crecimiento. La ruptura que representaba su modelo respecto de contribuciones anteriores estribaba básicamente en que el tiempo podía ser dividido en dos etapas.

En una primera etapa, la llamada fase de transición, la acumulación de capital constituía el motor básico del crecimiento. Sin embargo, la combinación de la tecnología de la producción con el comportamiento del capital como factor de acumulación (ambos medidos en términos por trabajador) daba lugar a una dinámica que conducía al estado estacionario como consecuencia de la existencia de rendimientos constantes a escala en la función de producción. Así, en el estado estacionario los deseos de acumulación de las personas se reducen simplemente a ahorrar para reponer el capital que se ha amortizado y para dotar a la economía con nuevo capital, de modo que en esta situación, el producto per cápita y otras variables relevantes quedaban fijas.

En una segunda etapa, para compaginar la evidencia empírica con los resultados de su modelo, Solow introdujo, entonces, el progreso tecnológico. De este modo, una economía que alcanza el estado estacionario podía crecer, no como consecuencia de una mayor acumulación de capital, sino por la existencia de progreso técnico.

El problema con esta teoría, al utilizar el progreso técnico como una fuerza exógena, es que dejaba en la penumbra el funcionamiento de la variable crucial del modelo, que según el propio Solow se convertía en la muestra más clara de nuestra ignorancia sobre los problemas del crecimiento económico.

El refinamiento introducido por Cass, Shell y Koopmans, sobre la base del modelo de Ramsey (1928) permitió, al endogeneizar las decisiones de consumo y de ahorro, dotar de un mayor fundamento microeconómico al modelo de Solow, aunque el desconocimiento sobre los factores que dirigía las sendas de crecimiento sostenido continuó.

La introducción del modelo lineal en la literatura del crecimiento endógeno se atribuye a Rebelo (1991), aunque algunos economistas habían utilizado algún tipo de tecnología lineal, tal es el caso de Von Neuman (1937), Eaton (1981) y Cohen y Sachs (1986). En este modelo se postula la existencia de una función de producción que es lineal en el único factor de producción, el capital. Esta tecnología presenta rendimientos constantes de escala y rendimientos constantes de capital. Esto conlleva necesariamente a la situación de que la función de producción dependa sólo de la tecnología (*A*), y del factor de producción capital (*K*). Por ello, este modelo se denomina *AK*, y proporciona el caso más simple de crecimiento endógeno.[1] Este modelo genera un crecimiento sostenido sin fases de transición, en el que la economía salta continuamente de un estado estacionario a otro, merced a la introducción de rendimientos constantes a escala.

Lucas (1988) ofrece, sin embargo, un tratamiento más elegante al construir su modelo de crecimiento con capital humano. De una parte, utiliza una tecnología de producción que incluye dos factores de producción acumulables (capital físico y capital humano). En su conjunto, la tecnología exhibe rendimientos constantes de escala, mientras que cada uno de los factores exhibe rendimientos decrecientes a nivel individual. Sin embargo, la suma de rendimientos de los factores acumulables suma la unidad, con lo que esta tecnología presenta puntos de contacto con el modelo *AK*. Por otra parte, la existencia de dos factores acumulables permite jugar al capital humano un papel similar al del progreso tecnológico de Solow. Dentro de la estructura del modelo, cuando se alcanza la senda de crecimiento sostenido, las tasas de crecimiento del PIB por trabajador y del consumo crecen al mismo ritmo. Sin embargo, como la tasa de crecimiento del capital físico depende de la tasa de crecimiento del capital humano, entonces el aumento de este último factor permite que se acumule capital indefinidamente y que el producto interno bruto por trabajador crezca, también, indefinidamente.

Una característica adicional del modelo de Lucas es que la tecnología de producción incluye una externalidad originada por la existencia de capital humano. Ello hace que la solución de la economía competitiva (que no internaliza la externalidad) sea distinta de la de un planificador

[1] La función *AK* es lineal en el monto de capital, donde *A* es una constante. Esta función no cumple todas las condiciones neoclásicas: *a*) exhibe rendimientos constantes a escala; *b)* tiene rendimientos positivos; *c)* no presenta rendimientos decrecientes del capital, y *d)* no satisface las condiciones de Inada, dado que el producto marginal del capital es siempre igual a *A*.

(que sí la internaliza), de modo que sienta las bases para una intervención del sector público en el terreno educativo. Pero, una vez se ha concebido la existencia de un sector público incentivando una mayor provisión de capital humano, hay que pensar que esa provisión exige su correspondiente financiación y hay que introducir los impuestos en el modelo. Si en la solución competitiva del modelo de Lucas (1988) se introduce un impuesto proporcional τ sobre todas las rentas ganadas, entonces aunque las condiciones de primer orden de maximización para los consumidores cambian, las tasas de crecimiento de equilibrio sostenido continúan siendo las mismas, ya que las relaciones entre las tasas de crecimiento del capital físico y del capital humano se mantienen.

Este resultado, interesante en sí mismo pero que resultó poco creíble desde un punto de vista empírico, ha atraído la atención de diversos autores [Rebelo (1991), Pecorino (1993), Devereux y Love (1994), Stokey y Rebelo (1995), Milesi-Ferreti y Roubini (1993, 1996)], con resultados dispares. Nuestro objetivo consiste en construir un modelo de crecimiento endógeno con capital humano en donde analizamos los efectos provocados por la introducción de los impuestos. Para ello elaboramos una versión del modelo de Lucas (1988) en la que existen tipos impositivos distintos para el capital y el trabajo, construyendo una variante de un modelo elaborado por Sorensen (1993), en el que hemos sustituido su función de acumulación de capital humano que utiliza una tecnología de Leontief, por otra más clásica que permite cierta sustituibilidad entre los factores.

La investigación afronta dos tipos distintos de cuestiones. En la primera calculamos las tasas de crecimiento de una economía tipo Lucas, en la que el gobierno dedica cierta fracción del producto a educación, tanto para una economía competitiva como para una economía gobernada por un planificador social. La otra cuestión que abordamos consiste en calcular la estructura de impuestos y subsidios óptimos, que haría que, en caso de introducirlos, los actores económicos encontraran los incentivos para comportarse igual que el planificador y obtener una solución que fuera Pareto óptima. Para conseguir estos resultados utilizamos técnicas de optimización dinámica en tiempo continuo; y, posteriormente, para derivar la estructura de impuestos y subsidios óptimos ajustamos las condiciones de optimización de la economía competitiva a la planificada de forma que los precios sombra del capital físico y humano coincidan.

EL MODELO BÁSICO

El modelo básico que vamos a construir constituye una variante del modelo de Lucas (1988). La economía consta de dos sectores. El primero está formado por un conjunto grande de empresas que actúan en un mercado competitivo para producir un bien final único que puede utilizarse tanto para fines de consumo como de inversión. El segundo está formado por el sector educativo, cuyo objetivo es la producción de capital humano. El capital humano se incorpora en las personas, y, por ello, debe considerarse como un bien rival y excluible.

Los sectores productivos

En nuestro modelo existen dos sectores productivos: uno dedicado a la producción de un bien final que puede ser consumido e invertido, y un sector educativo dedicado a la producción de capital humano. Los factores de producción pertenecen a los consumidores que los alquilan a las empresas, obteniendo las remuneraciones adecuadas en el contexto competitivo de la economía.

El sector productor de bienes finales

La producción del bien final se hace de acuerdo con una tecnología de producción que utiliza tanto el capital físico como el capital humano. En concreto, la tecnología de producción es una tecnología del tipo Cobb-Douglas que adopta la forma:

$$Y_t = AK_t^{\beta}\left(u_t H_t\right)^{1-\beta} H_{a,t}^{\psi} \qquad [1]$$

donde:

Y_t, producto
A, parámetro que mide el grado de eficiencia con que se utilizan los factores de producción, aunque el hecho de que no vaya afectado por el subíndice t indica que no existe "progreso técnico"
$K_t H_t$, nivel de capital físico y humano, respectivamente
$H_{a,t}$, valor de la externalidad del monto medio de capital humano
u_t, tiempo que los trabajadores dedican a la producción del bien final. Cada trabajador dispone de una unidad de tiempo que distribuye entre la producción del bien final (u_t) y la adquisición de capital humano en el sector educativo ($1 - u_t$)
$\psi \geq 0$, externalidad asociada con la existencia del capital humano promedio de los trabajadores

La existencia de esta externalidad hace que existan rendimientos constantes a escala para K_t y H_t cuando las empresas no tienen en cuenta la existencia de la externalidad en sus decisiones, y rendimientos crecientes en el caso de que sí lo hicieran. Los consumidores igualmente pueden no tener en cuenta esta externalidad, de modo que su demanda de educación que harían sería distinta a la que realizarían en el caso de que sí tuvieran en cuenta esta externalidad. Si suponemos que todos los individuos son iguales, entonces la cantidad de capital humano que posee cada individuo se corresponde con el promedio. De este modo, la función de producción puede expresarse en términos del producto por trabajador como:

$$y_t = Ak_t^{\beta}\left(u_t h_t\right)^{1-\beta}\ h_{a,t}^{\psi} \qquad [2]$$

Las empresas actúan en un marco competitivo y demandan capital físico y humano hasta que el valor de su productividad marginal se iguala con su precio. Los precios de los factores de producción son r (tipo de interés) para el capital físico y *w* (salario) para el capital humano. Si el precio del bien final se utiliza como numerario, entonces las empresas demandarían factores productivos hasta que su productividad marginal coincida con su precio. Las condiciones de maximización de beneficios en un entorno competitivo, (véase Barro, R. y Sala-i-Martin, X. [1990, p. 173], donde se obtienen igualando el precio del capital físico y humano a la productividad marginal de cada factor), son:

$$r_t = \beta A k_t^{\beta-1} (u_t h_t)^{1-\beta} h_{a,t}^{\psi} = \beta A \left(\frac{u_t h_t}{k_t} \right)^{1-\beta} h_{a,t}^{\psi} \qquad [3]$$

y

$$w_t = (1-\beta) A k_t^{\beta} (u_t h_t)^{-\beta} h_{a,t}^{\psi} = (1-\beta) A \left(\frac{k_t}{u_t h_t} \right)^{\beta} h_{a,t}^{\psi} \qquad [4]$$

Tanto en la remuneración del capital físico como del capital humano interviene el nivel promedio de educación existente. Cuanto mayor sea el valor de la externalidad ψ y menor el monto de capital humano en relación con el físico, mayor es la divergencia entre el rendimiento privado y social del capital humano.

La restricción de acumulación del capital físico es:

$$\dot{K}_t = A K_t^{\beta} (u_t H_t)^{1-\beta} H_{a,t} - C_t - G_t \qquad [5]$$

donde:

$\dot{K}_t = \dfrac{dK_t}{dt}$, inversión neta en capital físico

Podemos expresar esta idea formalmente, en términos per cápita, de la siguiente manera:

$$\dot{k}_t = Ak_t^{\beta}(u_t h_t)^{1-\beta} h_{a,t} - c_t - g_t - nk_t \qquad [6]$$

El sector educativo

El sector educativo está dedicado a la producción de capital humano. Siguiendo la metodología propuesta por Sorensen (1993) se supondrá que para producir capital humano se necesitan dos factores de producción:[2] capital humano, en primer lugar, y un bien público. El capital humano adquiere la forma de tiempo dedicado a la educación por parte de la población de esta economía. El bien público consiste en un conjunto de edificios, laboratorios y profesores. A diferencia de Sorensen que supone que la tasa de crecimiento del capital humano está determinada por una tecnología tipo Leontief, la tasa de crecimiento del capital humano que nosotros utilizaremos permite cierto grado de sustituibilidad entre el trabajo y el bien público, es decir, parte de la inversión en edificios o laboratorios puede sustituirse por trabajo o viceversa. Así, la función de producción de capital humano (Lucas, R., 1988, p. 18) que se propone adopta la forma:

$$\dot{H}_t = \delta(1-u_t)H_t f\left(\frac{G_t}{Y_t}\right) \qquad [7]$$

donde:

$\dot{H}_t = \dfrac{dH_t}{dt}$, inversión neta en capital humano

[2] Pecorino (1993), por ejemplo, utiliza un modelo en el que existen tres sectores productivos: un sector dedicado a la producción de capital físico, un sector dedicado a la producción de capital humano y un sector dedicado a producir un bien final de consumo. La estructura y las tecnologías de producción en cada sector son idénticas.

δ, parámetro de productividad del sector educativo
$(1 - u_t)$, tiempo que los individuos deciden dedicar a crear capital humano
H_t, nivel de capital humano existente
G_t, gasto público en educación
Y_t, producto total[3]

Para mantener el modelo dentro de un marco neoclásico se supondrá que $f' > 0$ y $f'' < 0$. Así, la función de producción de capital humano expresada en términos por trabajador queda:

$$\dot{h}_t = \delta(1 - u_t)h_t f\left(\frac{g_t}{y_t}\right) \qquad [8]$$

Obsérvese que la cantidad de bien público proporcionado por el gobierno se mide en relación con el producto total. Eso quiere decir que un crecimiento constante de las habilidades adquiridas a través de la educación sólo puede conseguirse si la cantidad de recursos dedicados a g_t crecen al tiempo que crece y_t.

El gobierno

El gobierno recauda impuestos únicamente sobre las rentas obtenidas por los factores productivos y las destina al gasto en capital y profesorado del sector educativo, en el pago de un subsidio (que puede ser positivo o negativo) a las personas que reciben educación en función del nivel promedio de capital humano existente, y en unas transferencias de cuota fija para los consumidores. El presupuesto del gobierno siempre está en

[3] Si supiéramos que el capital humano se adquiere a través de procesos *learning by doing,* entonces, la producción de capital humano tendría la forma: $H_t = \delta uH$. El tiempo representativo sería el pasado en el sector productor del bien final, y no existiría un sector educativo formal financiado por el gobierno.

equilibrio. Esta condición de equilibrio presupuestario implica que los ingresos por impuestos deben ser iguales a los gastos que realiza el sector público:

$$\tau_{t,k} r_t K_t + \tau_{t,h} w_t u_t H_t = G_t + \varsigma_t w_t (1 - u_t) H_t + T_t \qquad [9]$$

En términos por trabajador, la ecuación anterior puede expresarse como:

$$\tau_{t,k} r_t k_t + \tau_{t,h} w_t u_t h_t = g_t + \varsigma_t w_t (1 - u_t) h_t + T(p)_t \qquad [10]$$

Es intuitivo que τ_k representa el tipo impositivo sobre las rentas del capital físico, τ_h el tipo impositivo sobre las rentas del capital humano y ς_t el subsidio sobre el esfuerzo educativo de los trabajadores. Según sea positivo o negativo, el valor del subsidio se calcula sobre el coste de oportunidad en términos de salarios perdidos por acudir a un centro educativo. *T(p)* representa el valor de las transferencias pagadas por el gobierno a los consumidores.

Los consumidores

Los consumidores de nuestro modelo tienen vida infinita y altruismo intergeneracional. En cada momento del tiempo deciden qué cantidad de su renta desean consumir y qué parte de su tiempo quieren dedicar a trabajar en el sector de bienes finales u_t y qué parte de su tiempo van a dedicar en acudir a una institución educativa $(1 - u_t)$. El comportamiento de los consumidores puede modelizarse como un problema de optimización en el que los consumidores maximizan una función de utilidad intertemporal, respecto a c, k, u y h, condicionados por su restricción presupuestaria. Siguiendo la tradición existente en la literatura, se supondrá que la función de utilidad es una función con elasticidad de sustitución constante.

Por consiguiente el problema de maximización de un consumidor representativo, siguiendo a Lucas, R. (1988, p. 7) y a Sala-i-Martin, X. (1994, p. 77) puede describirse como:

$$\text{máx } U = \int_0^{\infty} e^{-(\rho - n)t} \quad \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \; dt \qquad [11]$$

condicionados a su restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned} c_t + \dot{k}_t \leq (1-\tau_{t,k}) r_t k_t + (1-\tau_{t,h}) w_t (u_t h_t) \\ + \varsigma_t w_t (1-u_t) h_t + T(p)_t \end{aligned} \qquad [12]$$

donde:

c_t, consumo en el período
n, tasa de crecimiento de la población
σ, inversa de la elasticidad de sustitución, que también es constante
ρ, tasa de descuento subjetiva

Al actuar así, los individuos toman como dados el valor de los montos de capital físico y humano iniciales k_0 y h_0, y el del capital humano medio de toda la economía h_a.

LA SOLUCIÓN DEL MODELO

Ahora resolvamos el modelo de crecimiento que resulta de la descripción que hemos hecho en la sección anterior. Como es sabido, la existencia de una externalidad hace que la solución del modelo, y por ello la senda de crecimiento que seguirá la economía, varíe según se tenga en cuenta o no a la externalidad. La solución de la economía competitiva implica no tener en cuenta a la externalidad, mientras que un planificador social actuará en sentido contrario. Con objeto de desarrollar el tema por pasos, primero se resolverá el modelo correspondiente a una economía competitiva.

La solución de una economía competitiva

Los agentes dedicados a la producción de bienes maximizan una función de utilidad de horizonte infinito. La expresión indica que la utilidad de los individuos es la integral de sus funciones instantáneas de utilidad descontadas a la tasa ρ, entre el período cero e infinito. Sala-i-Martin, X. (1994, p. 45) y Lucas, R. (1988, p. 7), plantean el problema que tiene que resolver un agente representativo como:

$$\text{máx } U(0) = \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} dt \qquad [13]$$

condicionado al comportamiento de la acumulación del capital físico y del capital humano:

$$\begin{aligned} c_t + \dot{k}_t \leq & \left(1-\tau_{t,k}\right) r_t k_t + \left(1-\tau_{t,h}\right) w_t \left(u_t h_t\right) \\ & + \varsigma_t w_t \left(1-u_t\right) h_t + T(p)_t \end{aligned} \qquad [14]$$

$$\dot{h}_t = \delta\left(1-u_t\right) h_t f\left(\frac{g_t}{y_t}\right) \qquad [15]$$

donde: $0 \leq u_t \leq 1$; $c_t \geq 0$; $k_t \geq 0$; $h_t \geq 0$.

Éste es un problema típico de teoría del control óptimo. El hamiltoniano del problema es:

$$H = e^{-(\rho - n)t}\left(\frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}\right) +$$

$$+\lambda_t\left[\left(1-\tau_{t,k}\right)r_t k_t + \left(1-\tau_{t,h}\right)w_t\left(u_t h_t\right) + \varsigma_t w_t\left(1-u_t\right)h_t + T\left(p\right)_t - c_t - nk_t\right] +$$

$$+\mu_t\left[\delta\left(1-u_t\right)h_t f\left(\frac{g_t}{y_t}\right)\right] \qquad [16]$$

que tiene que ser resuelto para las variables de control c_t y u_t, y las variables de estado que son los dos tipos de capital, k_t y h_t, donde λ_t y μ_t son los multiplicadores dinámicos de Lagrange, λ_t se interpreta como el precio implícito de los bienes de inversión en capital físico y μ_t es el precio implícito de los bienes de capital humano.

El consumidor representativo posee previsión perfecta (*perfect foresight*) y puede anticipar la evolución de las variables τ_k, τ_h, ς, T y g/h. Bajo este supuesto, las condiciones de primer orden, propuestas por Lucas, R. (1988, p. 8) y Sala-i-Martin, X. (1994, p. 78), para maximizar H son las siguientes (respecto a *c, k, h* y *u*).

$$c_t^{-\sigma} = \lambda_t \qquad [17]$$

[18]

$$\left(\rho - n\right)\lambda_t = \lambda_t\left[\left(1-\tau_{t,k}\right)r_t - n\right] + \dot{\lambda}_t \qquad [19]$$

$$\left(\rho - n\right)\mu_t = \lambda_t\left[\left(1-\tau_{t,h}\right)w_t u_t + \varsigma_t w_t\left(1-u_t\right)\right] + \mu_t\delta\left(1-u_t\right)f\left(\frac{g_t}{y_t}\right) + \dot{\mu}_t \qquad [20]$$

Además, deben cumplirse las siguientes condiciones de transversalidad:

$$l\grave{\imath}m_{t\to\infty}\lambda_t k_t = 0\,;\; l\grave{\imath}m_{t\to\infty}\mu_t h_t = 0$$

Realizando las operaciones pertinentes obtenemos la expresión correspondiente a la tasa de crecimiento del consumo que es:

$$\gamma_c = \frac{\left(1-\tau_{t,k}\right)\left[\beta A\left(\dfrac{u_h h_t}{k_t}\right)^{1-\beta} h_t^{\psi}\right]-\rho}{\sigma} \qquad [21]$$

El resultado obtenido para la tasa de crecimiento del consumo es idéntico al del modelo de Lucas (1988) excepto por la presencia del término $(1 - \tau_{t,k})$. Ante este resultado podríamos pensar que, puesto que $(1 - \tau_{t,k})$ es menor que la unidad, el valor de γ_c es menor en esta versión del modelo que en la del modelo original. Sin embargo, la expresión que hemos obtenido no está exclusivamente en función de parámetros del modelo, ya que los valores de *h* y *k* están por determinarse. Por ello, una vez que hemos obtenido la tasa de crecimiento del consumo hay que encontrar las relaciones entre las tasas de crecimiento del consumo, del capital físico y del capital humano en la senda de crecimiento sostenido.[4] En esta senda, las tasas de crecimiento de las variables son constantes, por lo que el producto por trabajador, el capital físico y el consumo crecen a la misma tasa, mientras que la existencia de la externalidad haría que el capital humano aumente a una tasa proporcional a la del capital físico.

Para obtener la tasa de crecimiento del producto por trabajador debemos rescribir la ecuación [18], con el siguiente resultado:

---

[4] Puesto que es sabido, en este trabajo, vamos a suponer que esta senda existe sin necesidad de demostración.

$$\frac{\lambda_t}{\mu_t} = \frac{\delta h_t f\left(\frac{g_t}{y_t}\right)}{(1-\tau_{t,h}-\varsigma_t)w_t h_t} \qquad [22]$$

Tomando logaritmos y derivando con respecto al tiempo en la senda de crecimiento sostenido:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} - \frac{\dot{\mu}}{\mu} = -\gamma_w^* \qquad [23]$$

Las empresas en un entorno competitivo demandarían factor trabajo hasta que su productividad marginal coincida con su precio, de donde nos queda:

$$w = (1-\beta)A\left(\frac{k_t}{u_t h_t}\right)^{\beta} h_t^{\psi},$$

tomando logaritmos y derivando respecto al tiempo, se obtiene:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} - \frac{\dot{\mu}}{\mu} = -\frac{\psi}{1-\beta} \quad \gamma_h^* \qquad [24]$$

De las condiciones de primer orden que debe cumplir el modelo, sabemos que:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\sigma\gamma_c^*$$

Por tanto, la ecuación [21], que representa la tasa de crecimiento del consumo, puede rescribirse como:

$$\gamma_c^* = \frac{1}{\sigma}\left[\frac{\psi}{1-\beta}\ \gamma_h^* - \frac{\dot{\mu}}{\mu}\right] \qquad [25]$$

Sea γ^*_h la tasa de crecimiento del capital humano en el estado de crecimiento sostenido. Puesto que c y k aumentan a la misma tasa en esta senda, es posible emplear la ecuación [21] para hallar las relaciones entre las tasas de crecimiento de k y h a partir de la tasa de crecimiento del consumo.

$$\gamma_k^* = \frac{1-\beta+\psi}{1-\beta}\gamma_h^* \qquad [26]$$

Puesto que $\psi > 0$, el valor del quebrado es mayor que la unidad, implicando que la tasa de crecimiento del capital humano es inferior a la tasa de crecimiento del capital físico y dado que en el estado de crecimiento sostenido $\tau_{t,k}$ tiene un valor constante, entonces la existencia de impuestos sobre el capital no altera las relaciones entre las tasas de crecimiento del capital físico y humano que se obtienen en el modelo original de Lucas (1988).

En la senda de crecimiento sostenido sabemos que sustituyendo la tasa de crecimiento del consumo por la del capital por trabajador, y expresando la tasa de crecimiento del capital humano por trabajador en función de la tasa de crecimiento del capital, la expresión anterior se transforma en:

$$\gamma = \left(\frac{1-\beta+\psi}{\sigma(1-\beta+\psi)-\psi}\right)\left(\frac{\delta f\left(\frac{g}{y}\right)(1-\tau_h)}{1-\tau_h-\varsigma} - (\rho-n)\right) \qquad [27]$$

La solución obtenida es la misma que la del modelo de Lucas (1988) excepto para el término

$$\frac{f\left(\frac{g}{y}\right)(1-\tau_h)}{1-\tau_h-\varsigma}$$

que modifica la tasa de crecimiento obtenida originalmente. En la solución del modelo hay que destacar que sólo los impuestos sobre el capital humano (τ_h) afectan a la tasa de crecimiento. Los impuestos sobre el capital físico (τ_k) no aparecen en la ecuación [27], por lo que difícilmente podría justificarse no gravar las rentas del capital. Esta situación supone que la tasa de crecimiento de la economía en un país en la que el gobierno dedica una parte de los recursos a ofrecer servicios educativos podría originar una tasa de crecimiento mayor que la del modelo original. Este resultado contrasta con los argumentos mencionados por algunos autores, como por ejemplo Prescott y Parente (2000) que ponen en duda la relevancia del capital humano en los procesos de crecimiento.

Por otra parte, la mayoría de las estimaciones coinciden en suponer que $\sigma > 1$, de este modo la expresión dentro del primer paréntesis será positiva, ya que el valor de ψ es relativamente pequeño. También lo será la expresión del segundo paréntesis salvo que la tasa de descuento subjetiva ρ o la tasa de crecimiento de la población sean muy altas.

La solución del planificador

Imaginemos que hubiera en la economía un planificador social que considerara desde el primer momento la existencia de las externalidades en la educación. En este caso, el problema que intentará resolver consistirá en maximizar la función de utilidad intertemporal de un agente representativo, teniendo en cuenta la ecuación de acumulación del capital humano y la restricción sobre los recursos que afectan al conjunto de toda la economía. Formalmente, siguiendo a Lucas, R. (1988, p. 7), Sala-i-Martin, X.

(1994, p. 77), el problema del planificador que pretende maximizar la suma de las utilidades descontadas de un consumidor representativo es:

$$\text{máx } U(0) = \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} \frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\, dt \qquad [28]$$

En Lucas, R. (1988, p. 18), la maximización está condicionado a:

$$\dot{h}_t = \delta(1-u_t)h_t f\left(\frac{g_t}{y_t}\right) \qquad [29]$$

$$\dot{k}_t \leq y_t - c_t - g_t - nk_t \qquad [30]$$

Sustituyendo el valor de g_t que puede derivarse de la restricción presupuestaria del gobierno, la ecuación anterior puede rescribirse como:

$$\begin{aligned}\dot{k}_t \leq\ & y_t - c_t - \tau_{t,k} r_t k_t - \tau_{t,h} w_t u_t h_t \\ & + \varsigma_t w_t (1-u_t) h_t + T(p)_t - nk_t\end{aligned} \qquad [31]$$

Sustituyendo y_t por su valor, y bajo el supuesto de que el planificador tiene en cuenta desde el primer momento la existencia de la externalidad originada por la presencia del término $h^{\Psi}{}_{a,t}$ en la función original, la anterior restricción queda como:

$$\begin{aligned}\dot{k}_t \leq\ & Ak_t^{\beta} u_t^{1-\beta} h_t^{1-\beta+\psi} - c_t - \tau_{t,k} r_t k_t - \tau_{t,h} w_t u_t h_t \\ & + \varsigma_t w_t (1-u_t) h_t + T(p)_t - nk_t\end{aligned} \qquad [32]$$

El hamiltoniano correspondiente a la solución del planificador es:

$$H = e^{-(\rho-n)t}\left(\frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right)+$$

$$+\lambda_t\left[Ak_t^{\beta}u_t^{1-\beta+\psi}-c_t-\tau_{t,k}r_tk_t-\tau_{t,h}w_tu_th_t+\varsigma_t w_t(1-u_t)h_t+T(p)_t-nk_t\right]+$$

$$+\mu_t\left[\delta(1-u_t)h_t f\left(\frac{g_t}{y_t}\right)\right] \qquad [33]$$

Para este caso las variables de estado y de control continúan siendo las mismas de la economía competitiva, por lo que las condiciones de primer orden, suponiendo que existe un equilibrio interior son:

$$c_t^{-\sigma} = \lambda_t \qquad [34]$$

$$\lambda_t[(1-\beta)AK_t^{\beta}u_t^{-\beta}h_t^{1-\beta+\psi} - \tau_{t,h}w_th_t - \varsigma_t w_t h_t] = \mu_t\delta h_t f(g_t/y_t) \qquad [35]$$

$$(\rho-n)\lambda_t = \lambda_t\left[\beta Ak_t^{\beta-1}u_t^{1-\beta}h_t^{1-\beta+\psi}-\tau_{t,k}r_t-n\right]+\dot{\lambda}_t \qquad [36]$$

$$(\rho-n)u_t = \lambda_t\left[(1-\beta+\psi)Ak_t^{\beta}u_t^{1-\beta}h_t^{-\beta+\psi}-\tau_{t,h}w_tu_t+\varsigma_t w_t(1-u_t)\right]$$

$$+\mu_t\delta(1-u_t)f\left(\frac{g_t}{y_t}\right)+\dot{\mu}_t \qquad [37]$$

Haciendo las sustituciones pertinentes, obtenemos la tasa de crecimiento del consumo:

$$\gamma_c = \frac{\beta Ak_t^{\beta-1}u_t^{1-\beta}h_t^{1-\beta+\psi}(1-\tau_{t,k})-\rho}{\sigma} \qquad [38]$$

Formalmente la expresión que hemos obtenido es idéntica a la de una economía competitiva. Sin embargo, eso no significa que en una economía competitiva y en una economía con planificador social el consumo crezca a la misma tasa. Como ya se indicó anteriormente, los valores de *h* y *k* están por determinarse.

Para calcular las relaciones entre las diversas tasas de crecimiento utilizamos la ecuación [35], de modo que:

$$\mathrm{v}\frac{\lambda_t}{\mu_t}=\frac{\delta h_t f(\frac{g_t}{y_t})}{(1-\beta)Ak_t^{\beta}u_t^{-\beta}h_t^{1-\beta+\psi}-w_t h_t(\tau_{t,h}+\varsigma_t)} \qquad [39]$$

Y, siguiendo un procedimiento análogo al del modelo competitivo, tendremos que la tasa de crecimiento para el consumo, el producto y el capital por trabajador, vendrá dada por:

$$\gamma=(\frac{1-\beta+\psi}{\sigma(1-\beta+\psi)-\psi})$$
$$(\frac{\delta f(\frac{g}{y})\left[(1-u^*)(1-\tau_h-\varsigma)+(1+\psi)\right]}{(1-\tau_h-\varsigma)}(1-\tau_h u^*+\varsigma-\varsigma u^*)-(\rho-n)) \qquad [40]$$

La expresión que hemos obtenido es ciertamente compleja. Intuitivamente, la tasa de crecimiento de esta economía gobernada por el planificador tiene que ser más alta que la tasa de crecimiento de la economía competitiva, puesto que el planificador ha tenido en cuenta la existencia de la externalidad originada por la educación. Si nos fijamos en la segunda parte de la fórmula, vemos que en ella aparece la externalidad en el numerador, lo que hace aumentar su valor, y por tanto tiene una incidencia positiva en la tasa de crecimiento. Mantendremos entonces este supuesto, y consideremos que la solución del planificador es un óptimo de

Pareto, con objeto de deducir de lo realizado hasta aquí unos impuestos óptimos.

IMPOSICIÓN ÓPTIMA

En el análisis de la teoría del control óptimo que hemos utilizado para resolver los problemas de asignación dinámica en las situaciones de economía competitiva y del planificador, observamos que las condiciones de primer orden de los hamiltonianos tienen estructuras parecidas. Esta situación nos ha permitido encontrar los impuestos y subsidios óptimos, simplemente calculando los valores de τ_h, τ_k y ς, de modo que los precios sombra del capital físico y el capital humano, es decir, los multiplicadores dinámicos λ y μ tomen el mismo valor en ambas ecuaciones. Así la planificación social se convierte simplemente en la elección de las tasas óptimas de imposición.

Tomando las condiciones de primer orden para la maximización del hamiltoniano correspondiente a la solución de la economía competitiva resumida en las ecuaciones [17] a [20], así como la situación del planificador en las ecuaciones [34] a [37], condicionadas a la restricción relativa a la acumulación del capital humano y a la restricción sobre los recursos totales, se obtiene directamente el resultado de que el tipo impositivo óptimo sobre las rentas del capital físico es: $\tau^*_k = g/y$.

Por otro lado, para obtener el resto de los multiplicadores es más conveniente sustituir el gasto público por las diversas partidas que lo componen, es decir (expresado en términos por trabajador):

$$gp = g + \varsigma w(1-u)h + T(p) \qquad [41]$$

Buscamos las condiciones de primer orden respecto a k, h y u, e incorporando g como variable de control adicional, tenemos:

$$c_t^{-\sigma} = \lambda_t \qquad [42]$$

$$\rho\lambda = \lambda\left[f'(k) - \varsigma f'(k)(1-\beta+\psi)(1-u^*)\right] + \dot{\lambda} = \\ = \lambda f'(k)\left[1 - \varsigma(1-\beta+\psi)(1-u^*)\right] + \dot{\lambda} \tag{43}$$

$$\rho\mu = \lambda\left[f'(h) - \varsigma(1-\beta+\psi)(1-u^*)f'(h)\right] + \mu\left[\delta(1-u)f\left(\frac{g}{y}\right)\right] + \dot{\mu} \tag{44}$$

$$\lambda = \mu\delta(1-u^*)hf'_g(1/y) \tag{45}$$

$$\lambda\left[f'(u) - \varsigma(1-\beta+\psi)f'(u)(1-u^*)\right] = \mu\delta hf\left(\frac{g}{y}\right) \tag{46}$$

Comparamos la condición de primer orden relativa a k, teniendo en cuenta que $f'(k) = r$, y que el valor de esta variable es el mismo en la economía planificada y en la economía competitiva, ya que la externalidad sobre el capital humano no afecta a la productividad marginal del capital. Por consiguiente:

$$\lambda\left[\rho - f'(k)(1-\tau_k)\right] = \dot{\lambda} \\ \lambda\left[\rho - f'(k)(1-\varsigma(1-\beta+\psi)(1-u^*)\right] = \dot{\lambda} \tag{47}$$

de donde:

$$\tau_k = \varsigma(1-\beta+\psi)(1-u^*) = g/y \tag{48}$$

Las ecuaciones [43] y [44] nos permiten obtener el subsidio óptimo sobre el esfuerzo educativo de los trabajadores, del cual:

$$\varsigma^* = \frac{(g/y)^*}{(1-\beta+\psi)(1-u^*)} \tag{49}$$

Finalmente, tomamos las respectivas condiciones de primer orden para *h*, donde existen estructuras homogéneas de comparación:

$$\begin{aligned} \rho\mu &= \lambda f'(h)\left[(1-\tau_h)u^* + \varsigma(1-u^*)\right] + \mu\delta(1-u^*) f(g/y)^* + \dot{\mu} \\ \rho\mu &= \lambda f'(h)\left[1-\varsigma(1-\beta+\psi)(1-u^*)\right] + \mu\delta(1-u^*) f(g/y)^* + \dot{\mu} \end{aligned} \qquad [50]$$

Estos resultados son muy interesantes pues explican el porqué el Estado puede maximizar el crecimiento de la economía adoptando un tamaño igual al que resultaría del mercado en un equilibrio competitivo. De la ecuación [49] obtenemos:

$$(1-\tau_h)u^* + \varsigma(1-u^*) = 1-\varsigma(1-\beta+\psi)(1-u^*) \qquad [51]$$

de donde se obtiene el siguiente impuesto óptimo sobre el trabajo:

$$\tau_h^* = \frac{\varsigma(1-u^*)(2-\beta+\psi)+u^*-1}{u^*} \qquad [52]$$

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en este trabajo indican, en primer lugar, que a diferencia de lo que sucede en muchos modelos de crecimiento con impuestos, en este caso el impuesto sobre el capital no converge a cero, sino que es inequívocamente positivo e igual a la fracción del gasto público en educación sobre el PIB. El motivo de este resultado es que cuando se acumula capital y el producto aumenta, una parte de este crecimiento debe ser apartado para ser destinado al sector educativo si la sociedad desea mantener el mismo nivel de habilidades.

En segundo lugar, la acumulación de capital estimula el crecimiento, provoca un aumento de los salarios, y ello también produce presiones sobre el valor de gasto público en educación (*g*). De ahí que el valor social de las inversiones públicas sea distinto a su valor privado, y que el impuesto se utilice para igualar ambas valoraciones.

Por último, el Estado puede maximizar el crecimiento de la economía adoptando un tamaño igual al que resulta del mercado en un equilibrio competitivo con factores de producción privados.

El mecanismo es similar al utilizado por Barro, R. y Sala-i-Martin, X. (1990), aunque en este trabajo el encargado de corregir este tipo de situaciones es un impuesto general sobre la renta. De la misma forma que nosotros, el modelo de Barro y Sala-i-Martin (1990) permite cierta sustituibilidad entre la inversión privada y el uso de los servicios productivos del gasto público dentro de la función de producción. En este sentido, nuestro trabajo ha ampliado las conclusiones de Sorensen en el sentido de que la justificación de un gravamen sobre el capital no depende de la tecnología de producción elegida. Desde nuestro punto de vista, el uso de una tecnología de Leontief sólo sirve para hacer más fáciles y directos los cálculos.

Bibliografía

Aghion, P. y P. Howitt, "Endogenous Growth Theory", MIT *Press*, 1998.

Albi, E. *et al*., *Gestión pública. Fundamentos, técnicas y casos*, Barcelona, Ariel, 1997.

Barro, R.J., "Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth", en *Journal of Political Economy*, núm. 98, 1990, pp.103-125.

—— y X. Sala-i-Martin, "Public Finance in Models of Economic Growth", NBER *Working Papers*, núm. 3362, 1990.

——, *Economic Growth*, Mcgraw-Hill, Advanced Series In Economics, 1990.

——, "Public Finance in Models of Economic Growth", *Review Of Economic Studies*, vol. 59, núm. 4 1992, pp. 645-661.

——, G. Mankiw y X. Sala-I-Martin, "Capital Mobility in Neoclassical Models of Growth", NBER *Working Paper*, núm. 4206, 1992.

Baumol, W., "Productivity Growth, Convergence, and Welfare: What the Long-Run Date Show", *American Economic Review*, vol. 76, núm. 5, 1986, pp. 1072-1085.

Becker, G., "Human Capital", *NBER*, Nueva York, Universidad de Columbia, 1964.

——, "A Theory of the Allocation of Time", *Economic Journal*, núm. 75, 1965, pp. 493-517.

——, *Human Capital: A Theoretical and Empirical Analysis, with Special Reference to Education*, 2da. edición, Chicago, Universidad de Chicago, 1975.

——, K.M. Murphy, R. Tamura, "Human Capital, Fertility, and Economic Growth", *Journal of Political Economy*, núm. 98, 1990, pp. S12-S37.

Buchanan, J., *Etica y Progreso Económico*, Barcelona. Ariel, 1996.

Caballé, J. y M. Santos, "On Endogenous Growth with Physical and Human Capital", *Journal of Political Economy*, núm. 101, 6, 1993, pp. 1042-1067.

Cass, D., "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation", *Review of Economic Studies*, núm. 32, 1965, pp. 233-240.

Devereux, M. y D.R.F. Love, "The Effects of Factor Taxation in a Two-Sector Model of Endogenous Growth", *Canadian Journal of Economics*, núm. 27, 1994, pp. 509-536.

Glomm, G. y B. Ravikumar, "Public *Versus* Private Investment in Human Capital: Endogenous Growth and Income Inequality", *Journal of Political Economy*, núm. 100, 1992, pp. 818-834.

Griliches, Z. y D. Jorrgenson, "The Explanation of Productivity Change", *Review of Economic Studies*, núm. 34, 1967, pp. 249-282.

Hanushek E., A., "The Economics of Schooling: Production and Efficiency in Public Schools", *Journal Economic Literature*, núm. 24, 1986, pp. 1141-1177.

Harrod, R.F., "An Essay in Dynamic Theory", *Economic Journal*, núm. 49, 1939, pp. 14-33.

Jones, L, R. Manuelli, P. Rossi, "Optimal Taxation in Models of Endogenous Growth", *Journal of Political Economy*, núm. 101, 1993a, pp. 485-517.

——, "On The Optimal Taxation Of Capital Income", NBER *Working Papers*, núm. 4525, 1993b.
Lucas, R.E., "On the Mechanics of Economic Development", *Journal of Monetary Economics*, núm. 22, 1988, pp. 3-42.
——, "Supply-Side Economics: An Analytical Review", *Oxford Economic Papers*, núm. 42, 1990, pp. 293-316.
Milesi-Ferreti, G.M. y N. Roubini, "Taxation and Endogenous Growth: on the Effects of Consumption Taxes", mimeo, 1994.
——, "Optimal Taxation in Endogenous Growth Models", NBER *Working Papers*, núm. 4882, 1996.
Nuxoll, D, "Differences in Relative Prices and International Differences in Growth Rates", *American Economic Review*, núm. 84, 1994, pp. 1423-1436.
Parente y E. Prescott, "Barriers to Riches", *The* MIT *Press*, 2000.
Pecorino, P., "Tax Structure and Growth in a Model with Human Capital", *Journal of Public Economics*, núm. 52, 1993, pp. 251-271.
Psacharopoulos, G. y Tzannatos, Z., "Women's Employment and Pay in Latin America", Washington, D.C., Banco Mundial, 1992.
Ramsey, F., "A Mathematical Theory of Saving", *Economic Journal*, núm. 38, 1928, pp. 543-559.
Rebelo, S., "Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy*, núm. 99, 1991, pp. 500-521.
Sala-I-Martin, X., *Apuntes de crecimiento económico*, Barcelona, Antoni Bosch Editor, 1994.
Samuelson, P., "The Pure Theory of Public Expenditure", *Review of Economics and Statistics*, núm. 36, 1954, pp. 387-389.
Schultz, T., *The Economic Value Of Education*, Nueva York, Universidad de Columbia, 1960.
Solow, R., "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, núm. 70, 1956, pp. 65-94.
——, "Technical Change and the Aggregate Production Function", *Review of Economics and Statistics*, núm. 39, 1957, pp. 312-320.
Sorensen, P.B., "Human Capital Investment, Government, and Endogenous Growth", *Finanz Archiv*, 1993, pp. 73-93.
Stiglitz, J. *et al*., *El papel económico del Estado*, Madrid, Instituto de Estudios Fiscales, 1993.

Stokey, N., "Human Capital, Product Quality, and Growth", *Quarterly Journal of Economics*, núm. 106, 1991, pp. 587-616.
—— y S. Rebelo, "Growth Effects of Flat-Rate Taxes, *Journal of Political Economy*, núm. 103, 1995, pp. 519-550.
Summers, R. y A. Heston, "The Penn World Table (Mark 5): An Expanded Set of International Comparisons, 1950-1988", *Quarterly Journal of Economics*, núm. 106, 1991, pp. 327-368.
Swan,T.W., "Economic Growth and Capital Accumulation", *Economic Record*, núm. 32, 1956, pp. 334-361.
Trostel, Ph. A., "The Effect of Taxation on Human Capital", *Journal of Political Economy*, núm. 101, 1993, pp. 327-350.
Uzawa, H., "Optimal Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth", *International Economic Review*, núm. 6, 1965, pp. 18-31.