Investigación Económica, vol. LXI: 238, octubre-diciembre de 2001, pp. 13-35

LA TABLA DE INSUMO-PRODUCTO DESDE UNA PERSPECTIVA DINÁMICA ESTRUCTURAL*
EN HOMENAJE A WASSILY LEONTIEF

MARTÍN PUCHET ANYUL,** Y LIONELLO F. PUNZO,***

La tabla de insumo-producto de Leontief, un dispositivo contable basado en una descripción desagregada e interdependiente de la oferta y la demanda y una noción circular de la producción, y el modelo especificado a partir de ella, han merecido diversas interpretaciones en la teoría y la metodología económicas del siglo pasado.

Conviene recordar, desde el punto de vista teórico, las siguientes ubicaciones del modelo de insumo-producto en distintas genealogías. El modelo es una versión cuantitativa de la teoría walrasiana del equilibrio general.[1] La contribución de Leontief es una culminación de la contabilidad de los flujos de mercancías producidas y distribuidas en la economía siguiendo la línea iniciada en el *Tableau économique* de Quesnay, continuada por Marx en los esquemas de reproducción y formalizada por medio de los esquemas extendidos de Von Bortkievicz que fue el tutor de su

* Los autores agradecen los comentarios y sugerencias de dos árbitros anónimos de esta revista y manifiestan que cualquier error persistente es de su entera responsabilidad.
** Profesor titular de Métodos cuantitativos, Facultad de Economía, Av. Universidad 3000, Edif. O.A. 2, 1er piso, 04510, D.F., México. CE: anyul@servidor.unam.mx
*** Profesor ordinario de Análisis económico, Facultad de Economía "Richard M. Goodwin", Piazza S. Francesco 7, 53100, Siena, Italia. CE: punzo@unisi.it
[1] Véase Solow (1998).

tesis doctoral.[2] Finalmente, el modelo de insumo-producto es una contribución culminante a la teoría económica clásica de cuño ricardiano que se ubica entre las raíces "clásicas" —que van desde Petty y Cantillon, pasando por Quesnay, Isnard, Torrens, Marx, hasta Dimitriev, Von Bortikievicz y Von Charasoff— y su florecimiento formal en Von Neumann y Sraffa.[3]

Desde un ángulo metodológico las teorías multisectoriales (o desagregadas) de la producción se desarrollaron, de manera predominante, desde dos perspectivas divergentes: la *formal* que, por lo general, parte de un conjunto de axiomas para formular un modelo en la forma de sistema abierto (o de entrada-salida), y la *empírica* que comienza definiendo un marco contable y sus variables observables para especificar un modelo en su seno. En las primeras teorías la desagregación distingue mercancías o procesos, en las segundas diferencia ramas de actividad económica (u otros conglomerados empíricamente reconocibles). Así, ya desde sus términos iniciales, las teorizaciones son distintas.[4] La contribución de Leontief se sitúa en esta dicotomía del lado de las teorizaciones de base empírica y tiene un marco contable característico y distinto respecto al de otros modelos multisectoriales.[5]

Esta multiplicidad de perspectivas interpretativas muestra la importancia de la contribución de Leontief y las divergencias que ocasionó. Hacer una valoración de las mismas y ubicar sus rasgos distintivos y su papel teórico y metodológico rebasa largamente la intención de este artículo.

El objetivo que aquí se persigue es mostrar la concepción de la tabla de insumo-producto tal como su autor la formuló y la usó para, a partir de ella, esclarecer diferencias cruciales entre el arquetipo lineal

---

[2] Véase Baumol (2000).

[3] Véanse Kurz y Salvadori (2000), y Lager (2000).

[4] Entre las primeras se destacan las contribuciones de Von Neumann (1945) y Koopmans (1951), y entre las segundas las de Leontief (1941), Goodwin (1953), Stone (1954) y Sraffa (1960). Véase el capítulo 4 de Punzo (1984) para conocer más a fondo las bases de esta distinción.

[5] Véase Punzo (1984), p. 97.

estático de la teoría de la producción y el modelo de insumo-producto que está implícito en la construcción de la tabla.[6]

Proponerse este limitado objetivo tiene fundamento en el sentido común de la profesión. Las interpretaciones teóricas habituales del modelo de insumo-producto afirman que se trata de la representación de un proceso de producción con tecnología lineal y, por tanto, es un caso del modelo de análisis de actividades.[7] La cuantificación empírica más comúnmente usada parte de una tabla que representa los balances contables sectoriales observados en un momento dado del tiempo y utiliza dicha información para calcular unos coeficientes que son equivalentes a las propensiones medias al gasto de los modelos macroeconómicos de cuño keynesiano y no a los coeficientes técnicos de la teoría de la producción.

Es más, resulta frecuente escuchar que el modelo representa el proceso de producción de forma atemporal y, por tanto, se trata de un modelo estático de producción lineal. No obstante, cuando se hacen simulaciones de la producción futura se supone que la matriz de coeficientes permanece constante durante el *periodo* τ en el cual no se observan las transacciones intermedias y, por el contrario, se modifican las entradas del modelo en cada *momento t* del periodo mencionado para determinar sus salidas.

También es típico usar la tabla de insumo-producto para cuantificar un modelo de ingreso-gasto que, por lo general, se supone basado en un modelo lineal de gasto. Por esa razón es posible confrontar el modelo lineal de consumo con el modelo contable de ingreso-gasto que, también, puede considerarse implícito en la matriz de transacciones que constituye esa tabla.

Así, al objetivo establecido para la producción se agrega, de manera subsidiaria, hacer el contraste entre el modelo lineal de consumo, y el modelo de ingreso-gasto que se origina en la tabla de Leontief partiendo de especificaciones contables.

Está claro que el ejercicio simple que aquí se realiza conduce a una toma de posición que sitúa la contribución principal de Leontief lejos de

---

[6] Véanse Leontief [1941 (1951)], (1954) y (1965).

[7] Véase esta interpretación en Mas-Colell, Whinston y Green (1995) pp. 154-160.

las genealogías teóricas descritas y dentro de una particular perspectiva metodológica de raíz no sólo observacional sino, específicamente, dinámica y contable. Y coloca así su aportación en el camino de los economistas que necesitan hacer análisis empírico de las economías teniendo en cuenta que sus dinámicas presentan cambios discontinuos y que los datos que éstas emiten deben ser captados mediante procedimientos contablemente consistentes.[8]

Por ello, el análisis siguiente está orientado por dos enfoques distintos pero complementarios de la tabla de insumo-producto. El primero la considera una representación del *Estado* de un sistema económico concebido como sistema dinámico. El segundo la concibe como la descripción de los *flujos contables* de entradas y salidas que se observan en una economía en un momento dado. El primer enfoque parte del trabajo pionero de Goodwin sobre los modelos lineales concebidos desde un punto de vista dinámico y el segundo de los desarrollos conceptuales primigenios de Stone sobre la contabilidad económica y social.[9]

1. Matriz de transacciones

La tabla de insumo-producto está definida a partir de una matriz de transacciones entre agentes económicos, en ese caso, entre grupos de empresas clasificados por su actividad económica y denominados ramas. En términos formales la matriz de transacciones es:

$$Z = \{z_{ij}\} \qquad [1]$$

donde cada entrada *(i, j)* registra el *ingreso* percibido por la rama *i* por venderle su producto a la rama *j* que realiza un *gasto* igual a dicho ingreso. Así, los renglones registran los ingresos del sector de origen de la mercancía vendida a sus sectores compradores, y las columnas estipulan

[8] En esta línea de construcción de modelos altamente desagregados de base empírica se ubican aquellos que parten de las matrices de contabilidad social y los modelos interdependientes del sistema INFORUM. Véanse al respecto Stone (1986) y Almon (1984).

[9] Véanse al respecto Goodwin (1949) y (1953), y Stone (1954) y Stone y Stone (1977).

los gastos del respectivo sector de destino por adquirir mercancías a sus sectores proveedores.

Desde un punto de vista empírico contable cada transacción en un momento dado *t* es el resultado de multiplicar el *precio unitario* (p_i) de la mercancía vendida por su *cantidad en unidades físicas* (w_{ij}) adquirida por el sector *j*:

$$z_{ij} = p_i w_{ij} \qquad [2]$$

El precio unitario y la cantidad pueden ser, respectivamente, índices de precios y de cantidades que resultan de agregar las medidas de precios y de cantidades de las mercancías específicas de un sector según el criterio de formación de sectores que se use.

Las interpretaciones que siguen se basan en dos formas diferentes de considerar esa transacción: *a)* como una cantidad física (o un valor deflactado por su correspondiente precio), w_{ij},[10] o bien: *b)* como un valor corriente, z_{ij}.

Así, las matrices de transacciones en cantidades físicas *(W)* y en valores corrientes *(Z)* están relacionadas por el vector de precios *(p)* de la siguiente manera:

$$Z = \hat{p}W \qquad [3]$$

donde *p* con acento ^ indica que el vector está escrito como matriz diagonal.

2. Modelo lineal de producción y modelo contable de insumo-producto

El modelo lineal de producción supone que las *n* ramas de actividad económica producen mediante una tecnología lineal: así la rama *j*, a partir de cantidades físicas de insumos intermedios m_{ij} $(i=1, ..., n)$ y de un insumo

[10] Esta es la forma de concebir la matriz *W* que está en Goodwin y Punzo (1987), p. 178.

primario l_j, la mano de obra genera su producción *(q_j)* usando la siguiente función:

$$q_j = \max_i \left\{ \frac{m_{ij}}{\alpha_{ij}}, \frac{l_j}{\beta_j} \right\} \qquad [4]$$

Cuando se impone este modelo de producción, representado por [4], en los balances contables de producción-demanda de cada rama:

$$q_i = \sum_j m_{ij} + d_i \qquad [5]$$

se satisface la siguiente ecuación en cantidades físicas que muestra el equilibrio entre oferta *(q_i)* y demanda total —intermedia más final (d_i)— de mercancía i:

$$q_i = \sum_j \alpha_{ij} q_j + d_i; \quad \alpha_{ij} = \frac{m_{ij}}{q_j} \qquad [6]$$

Sin embargo, este modelo lineal supone que los procesos de producción tienen muchos más rasgos que aquellos requeridos para concebir la matriz de transacciones en términos de cantidades, W, que se hará a continuación.

La matriz es la siguiente:

$$W = \begin{bmatrix} Q - M & -d \\ -l' & N \end{bmatrix} \qquad [7]$$

donde $Q = \{q_{ij}\}$ es la matriz *(n, n)* de producción bruta por ramas, $M = \{m_{ij}\}$ es la matriz *(n, n)* de demandas intermedias de las distintas mercancías, d es el vector *(n, 1)* de demandas finales de los hogares, l' es el vector *(1, n)* de unidades de trabajo ofrecidas por los hogares a cada

rama y N es la matriz *(1, 1)* del total de unidades de trabajo empleadas para producir Q.[11]
En un periodo t la matriz W hace posible expresar la identidad contable:

$$W\iota = 0 \qquad [8]$$

donde ι es el vector de unos (o vector suma), y cuya versión normalizada es:

$$\begin{aligned} \left[I - MQ^{-1}\right]Q\iota &= d \\ (lQ^{-1})Q\iota &= N \end{aligned} \qquad [9]$$

Ahora en lugar de postular funciones de producción con *rendimientos a escala constantes* es posible hacer la siguiente interpretación más adecuada en relación con el origen empírico y contable de la tabla de insumo-producto descrita por Leontief.

Tal interpretación se basa en dos consideraciones que provienen de la teoría de sistemas, tanto en su acepción amplia, como en los términos restringidos de teoría de los sistemas dinámicos.

La primera consideración consiste en concebir el vector *(n, 1)*: $q=Q\iota$ como el conjunto de *variables de estado* del sistema y separarlo de ciertas *variables exógenas* que en este caso son la demanda final d, y el empleo total, N.[12] Así, hay un núcleo de parámetros internos invariantes que aproximan las formas funcionales que describen el comportamiento observado y hacen factible determinar tales indicadores del estado del sistema. En este caso dichas formas funcionales están dadas por los componentes de la matriz *(n+1, n)*:
$\begin{bmatrix} M(x)Q^{-1} \\ l'Q^{-1} \end{bmatrix}$, cuyas entradas, como se indica, dependen de la oferta total, x.

[11] Los vectores se escriben como columnas y cuando se trasponen se indican con apóstrofe ‘.
[12] Las variables de estado en estos modelos son las variables endógenas. En el lenguaje de la teoría de sistemas dinámicos las variables endógenas son las variables de salida, y las exógenas las de entrada.

Conviene señalar que los estados del sistema x, de los cuales dependen las funciones que transforman insumos en productos, se observan en un momento t como q que son las realizaciones de x.

La segunda consideración se basa en suponer que el exceso de oferta $E(x)$, observado en equilibrio en t_0 $(E(q)=0)$, es igual a la oferta neta: $x-M(x)\iota$, que se define sustrayéndole a la oferta total la demanda intermedia, y a ésta se le resta la demanda final d:

$$E(x,t_0) = x - M(x,t_0)\iota - d; \qquad x = q \Rightarrow E(q) = 0 \qquad [10]$$

cuya aproximación de Taylor de primer orden en torno a dicho equilibrio es:

$$E(x,t_0) = [I - A](x - q) + D^{(2)}E + \ldots \qquad [11]$$

donde $A = \{a_{ij}\},\ a_{ij} = \dfrac{\partial M_i(x,t_0)}{\partial x_j}$ es la matriz jacobiana de $M(x, t_0)$ y los sumandos $D^{(2)}E + \ldots$ son los términos de orden mayor que uno de la fórmula tayloriana.[13]

En consecuencia, el enfoque sistémico aclara que cuando la tabla de insumo-producto es concebida como matriz de transacciones en términos de cantidades, *el modelo de producción de insumo-producto que es posible especificar basándose en ella* posee las siguientes características:

i) en un periodo t, un conjunto de variables exógenas determina, mediante un núcleo de parámetros internos, los indicadores de estado del sistema económico como en una "computadora teórica",[14]

ii) los parámetros resultan de una aproximación local en torno al equilibrio observado, válida en dicho periodo de observación y que supone el conoci-

---

[13] Véase *op. cit.*, pp. 179-181.

[14] Esta expresión se usa en el sentido de la computabilidad de un algoritmo de manera que se afirma que el modelo de insumo-producto no sólo posee la capacidad de determinar un vector de variables de estado q –es decir, que satisface las condiciones de existencia de la solución– sino que también puede computar los valores de dichas variables mediante su funcionamiento como una computadora teórica. Al respecto véanse *op. cit.*, p. 179 y Punzo (1995), pp. 1542-45 y 1549-51.

miento en ese periodo de las formas funcionales que transforman variables exógenas en variables de estado, y

iii) la matriz de coeficientes: $A = MQ^{-1}$ que muestra en cada columna la proporcionalidad entre los insumos y su respectivo producto es válida dentro de las cotas de la aproximación lineal y cuando la oferta es igual a la producción bruta.[15]

El modelo de insumo-producto concebido según la interpretación resumida dista claramente de aquel basado en las tecnologías lineales denominadas de Leontief. Así, se muestra que los coeficientes empíricamente calculados (a_{ij}), en la medida que resultan de las aproximaciones locales de las funciones que transforman insumos en producto para cada rama, difieren de los coeficientes técnicos (α_{ij}) de las funciones de producción que se postulan de manera independiente respecto a las transacciones observadas y registradas en la tabla de insumo-producto.

No está de más señalar que esta interpretación reúne de manera integrada que *i)* la contabilidad registrada en W no supone funciones de producción con rendimientos constantes a escala como lo señaló Sraffa,[16] y que *ii)* la matriz de coeficientes contables es sólo una aproximación lineal como reiteradamente lo señaló Goodwin.[17]

Ahora bien, la matriz de transacciones considerada como base de este primer modelo contable de insumo-producto está definida en términos de cantidades físicas. A continuación se pasa de W a la matriz en valores corrientes Z. En esta última el balance contable de una rama es el siguiente:

$$z_i = \sum_j zm_{ij} + f_i = p_i \sum_j m_{ij} + f_i; \quad z_i = p_i q_i, \quad zm_{ij} = p_i m_{ij}, \quad f_i = p_i d_{ii}; \quad i = 1,...n \quad [12]$$

Los n balances de la ecuación [12] son proporcionales a los n respectivos primeros renglones de la ecuación matricial [9] por medio del precio p_i.

---

[15] Véase *Ibid., p.* 181.

[16] Véase el prefacio de Sraffa (1960).

[17] Véase Goodwin (1953).

La especificación del modelo de insumo-producto que parte de la matriz de transacciones en términos de valores corrientes supone, para cada rama, propensiones medias al gasto en insumos intermedios fijas durante el periodo $\tau=\{t{:}t_0\leq t\leq t_1\}$. Así, el modelo para un momento t del periodo está dado por la siguiente ecuación:

$$z_{it}=\sum_j \bar{a}_{ij\tau} z_{jt}+f_{it};\quad \bar{a}_{ij\tau}=\frac{zm_{ij}(t_0)}{z_j(t_0)}=\frac{p_i(t_0)m_{ij}(x,t_0)}{p_j(t_0)q_j(t_0)},\quad t_0,t\in\tau \qquad [13]$$

En este modelo contable se está postulando linealidad respecto al gasto en insumos intermedios por medio de la constancia de los coeficientes: $\bar{a}_{ij}$ durante el periodo τ. Debe señalarse que esta clase de linealidad respecto al gasto es diferente de aquella relativa a la tecnología y de la que resulta de aproximar linealmente $M(x, t_0)$ cuando la oferta total (x) es igual a la producción (q).[18]

Ahora, para poder afirmar que en este modelo de insumo-producto subyace (o está implícito) un modelo de producción de rendimientos constantes a escala (o lineal) se necesitarán realizar dos operaciones lógicas distintas.

La primera conduce a establecer la relación entre dichas propensiones medias que resultan de los registros contables y las aproximaciones lineales de las funciones de la "computadora teórica" que transforma las demandas finales (d_i) en las producciones (q_i). Así se tiene que las propensiones $\bar{a}_{ij}$ resultan de multiplicar los coeficientes de las aproximaciones lineales (a_{ij}), hechas en t_0, por los precios relativos de los insumos respecto a cada producto (p_i/p_j) de t_0, como se plantea a continuación:

$$\bar{a}_{ij\tau}=\frac{zm_{ij}(t_0)}{z_j(t_0)}=\frac{p_i(t_0)m_{ij}(x,t_0)}{p_j(t_0)q_j(t_0)}=\frac{p_i(t_0)\dfrac{\partial m_{ij}(x,t_0)}{\partial x_j}x_j}{p_j(t_0)q_j(t_0)}=\frac{p_i(t_0)a_{ij}(t_0)x_j}{p_j(t_0)q_j(t_0)}=\frac{p_i(t_0)a_{ij}(t_0)}{p_j(t_0)} \qquad [14]$$

[18] Para profundizar en este argumento véanse Goodwin y Punzo (1987) y Puchet (1994).

Al introducir los coeficientes de la aproximación lineal en la definición de las propensiones medias resulta que los precios relativos actúan como coeficientes de proporcionalidad entre los parámetros aproximados y dichas propensiones.

Ahora bien, la segunda operación lógica consiste en remplazar los parámetros aproximados (a_{ij}), aquellos que resultaron de obtener el jacobiano de las funciones que transforman variables exógenas en variables de estado, por los parámetros de la función de producción lineal (α_{ij}). Pero en la medida que los parámetros aproximados que proceden de la matriz de transacciones observada no tienen por qué ser iguales con los parámetros teóricos de la tecnología, se tiene que la operación de remplazo debe suponer que el sistema de precios relativos que está operando en la economía en t_0 responde con perfecta elasticidad ante la demanda de insumos intermedios requeridos para producir cada mercancía.
Así, en la ecuación [14] la nueva expresión para la propensión media al gasto es:

$$\bar{a}_{ij} = \left[\frac{p_i(t_0)}{p_j(t_0)} \right]_{a=\alpha} \alpha_{ij} = p_{ij}(t_0, \alpha)\alpha_{ij} \qquad [15]$$

Como $\bar{a}_{ij}$ sólo varía de un periodo τ a otro, en tanto que los precios y la tecnología pueden cambiar en cada momento t, la constancia de esa propensión supone que si se cambian los coeficientes de la aproximación lineal de las funciones observadas $m_{ij}(x, t_0)$ por los parámetros de las funciones lineales de producción (α_{ij}) se necesitará, para mantener constante $\bar{a}_{ij}$, que los precios relativos respondan de manera exactamente proporcional. Por tanto se tiene que dar una elasticidad perfecta de cada precio relativo respecto a la demanda de cada insumo intermedio que se ha expresado, en este caso, mediante el coeficiente de la aproximación lineal. Dicha elasticidad es:

$$\left(\frac{\dfrac{\dot{p}_{ij}}{p_{ij}}}{\dfrac{\dot{a}_{ij}}{a_{ij}}} \right) = -1, \quad \dot{p} = \frac{dp_{ij}}{dt}, \dot{a} = \frac{da_{ij}}{dt} \qquad [16]$$

El modelo de insumo-producto que es posible especificar basándose en la matriz de transacciones en valores Z, que está expresado en la ecuación [13], posee las siguientes características que conviene ordenar de manera similar a las que tiene el modelo basado en W. El modelo supone:

i) una distinción idéntica entre variables exógenas —las demandas finales— y las variables de estado —las producciones brutas— y admite la misma interpretación computacional,
ii) unos coeficientes observables definidos como propensiones medias al gasto que resultan de multiplicar los *coeficientes de las aproximaciones lineales* de las funciones que componen este modelo por los *precios relativos de insumos a producto,* y
iii) los parámetros de las funciones lineales de producción difieren de las propensiones medias no sólo por las restricciones implícitas en toda linealización de funciones observadas sino, también, porque son proporcionales, por medio de la razón de precios, a dichos parámetros aproximados.

Conviene observar además que ambos modelos contables de insumo-producto, los expresados en las ecuaciones [9] y [13], son modelos que representan los procesos de producción desde el lado de la demanda. Las funciones que se aproximan son aquellas que transforman las demandas en ofertas y los parámetros internos de las mismas son propensiones medias al gasto. En el primer caso, las propensiones medias coinciden con los coeficientes de la aproximación lineal y, en el segundo, son proporcionales a dichos coeficientes.

En ambos modelos, la forma de determinar unas variables de estado por medio de otras exógenas sigue la lógica del multiplicador keynesiano. En este sentido también debe remarcarse la diferencia entre los modelos de insumo-producto que determinan las variables de estado por la demanda y las representaciones de las condiciones de producción y de la tecnología que se hacen en los modelos de análisis de actividades de las teorías de la producción.

3. *Modelo lineal de consumo y modelo contable de ingreso-gasto*

La matriz de transacciones W y los modelos especificados en [9] y [13] hacen posible: *a)* mostrar el equilibrio entre producción y demanda total, y *b)* determinar el estado de la economía, su producción, a partir de la demanda final, mediante una aproximación lineal en t_0 de los parámetros internos de las funciones que transforman insumos en productos. Sin embargo, esa matriz de transacciones no permite determinar el estado de la economía a partir de la disponibilidad de recursos primarios y de los ingresos generados por ellos. Desde un punto de vista teórico ésta sería la lógica de determinación del estado de la economía que resulta de invertir la propuesta keynesiana y de insertarla en la descripción contenida en Z.

Aplicando un modelo lineal de consumo a las n ramas de actividad económica éstas determinan sus cantidades demandadas según los consumos de las otras ramas y de los hogares. Así la rama i, a partir de cantidades físicas de consumos intermedios m_{ij} ($j=1, \ldots, n$) que hacen las ramas y del consumo final d_i ejercido por los hogares, establece su demanda total (q_i) usando la siguiente función de consumo basada en las propensiones fijas ε_{ij}, δ_i derivadas del comportamiento de los respectivos consumidores:

$$q_i = \max_j \left\{ \frac{m_{ij}}{\varepsilon_{ij}}, \frac{d_i}{\delta_i} \right\} \qquad [17]$$

Pero para introducir estas funciones de consumo en los balances contables de cada rama se tiene que observar que éstos no pueden estar en cantidades físicas como los de la ecuación [5]. Ello es así porque a la demanda ejercida por cada rama, que es una demanda de insumos, se le enfrentan cantidades ofrecidas de diferentes mercancías, a diferencia de lo que ocurre con la producción de cada rama a la que se le enfrentan demandas de esa misma mercancía.

Los balances de la ecuación [5] son entre la producción de cada rama y las demandas intermedia de las ramas y final de los hogares, ahora los balances son entre el gasto de cada rama y los ingresos intermedios de las ramas y primario de los hogares. Cada rama tiene un balance representado por la siguiente ecuación:

$$z_j = \sum_i zm_{ij} + wl_j = \sum_i zm_{ij} + s_j; \quad j = 1,\ldots,n \qquad [18]$$

Así, cuando se impone el modelo de consumo, representado por [7], en los balances de ingreso-gasto de cada rama se satisface la siguiente ecuación:

$$z_j = \sum_i \varepsilon_{ij} z_i + s_j; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{m_{ij}}{q_i} \qquad [19]$$

que muestra cómo se determina el gasto total —generado por la demanda que se le hace a la rama j (q_j)— mediante el ingreso total —proveniente de ofertas de insumos intermedios de las ramas $(m_{i.})$ más oferta del insumo primario (mano de obra) proporcionado por los hogares (l_j).

De manera similar a como se planteó arriba la relación entre el modelo lineal de producción y los modelos contables de insumo-producto se hará a continuación el contraste entre el modelo lineal de consumo formulado y el modelo contable de ingreso-gasto.

La matriz de transacciones en valores corrientes Z también posibilita el planteamiento de un modelo contable de ingreso-gasto análogo al de insumo-producto. Como quedó claro, ello no es posible hacerlo a partir de la matriz de cantidades físicas W por razones de compatibilidad contable.

La matriz de partida es:

$$Z = \not{p}W = \begin{bmatrix} \underline{p}(Q-M) & -\underline{p}d \\ -\omega l' & \omega N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{p}(Q-M) & -f \\ -s' & \omega N \end{bmatrix} \qquad [20]$$

donde ahora *p*, el vector *(n+1, 1)* de precios, se partió en el subvector *(n,1)* de los precios de las mercancías $\underline{p}$ y de la tasa de salario ω.

En este modelo las variables de estado son los gastos totales de cada rama $z' = \iota'\underline{p}Q + \omega l'$, las variables exógenas son las ofertas de recursos primarios, en este caso la mano de obra, *l'*, y los parámetros internos son aquéllos de las funciones que transforman ingresos intermedios —aquéllos originados por la venta de insumos a una rama— en gasto, es decir, las entradas de la matriz *(n, n+1)*: $\left[Q^{-1}M(y), \quad Q^{-1}d\right]$ que dependen, como se indica, del gasto planeado total, *y*.[19]

Ahora el exceso de gasto *F(y)*, observado en equilibrio *(F(z)=0)*, es igual al gasto neto $y' - \iota'\underline{p}M(y)$, que se define sustrayéndole al gasto total el ingreso intermedio, y luego se le resta el ingreso primario *s'*:

$$F(y) = y' - \iota'\underline{p}M(y) - s'; \qquad y = z \Rightarrow F(z) = 0 \qquad [21]$$

Entonces planteando la condición de equilibrio equivalente a (8) se tiene:

$$\iota' Z = 0 \qquad [22]$$

En esta ecuación matricial los balances para cada una de las *n* ramas son los siguientes:

$$z_j = \sum_i zm_{ij} + w_j l_j = \sum_i p_i m_{ij} + s_j; \quad z_j = p_j q_j, \quad zm_{ij} = p_i m_{ij}, \quad s_j = w_j l_j; \quad j = 1,\dots n \qquad [23]$$

Así, en cada balance, se especifica el modelo contable de ingreso-gasto para un momento *t* del periodo τ que está dado por las siguientes ecuaciones de cada rama:

[19] Este enfoque parte del artículo de Ghosh (1958).

$$z_{jt} = \sum_i \bar{e}_{ij\tau} z_{it} + s_{jt}; \quad \bar{e}_{ij\tau} = \frac{zm_{ij}(t_0)}{z_i(t_0)} = \frac{m_{ij}(y,t_0)}{q_i(t_0)}, \quad j = 1,\ldots,n, \quad t_0, t \in \tau \qquad [24]$$

Nuevamente, para estipular la relación entre este modelo contable y el modelo lineal, se procede haciendo dos operaciones lógicas similares a las realizadas para establecer la vinculación entre el modelo de insumo-producto y el modelo lineal de producción.

En primer término se aproxima linealmente el exceso de gasto alrededor del equilibrio en t_0:

$$F(y,t_0) = (y-z)'[I - \hat{p}E] + D^{(2)}F + \ldots \qquad [25]$$

donde $E = \{e_{ij}\}$, $e_{ij} = \dfrac{\partial M_i(y,t_0)}{\partial y_j}$ es la matriz jacobiana de $M(y, t_0)$ y los sumandos $D^{(2)}F + \ldots$ son los términos de orden mayor que uno de la fórmula tayloriana, y se introduce dicha aproximación en la definición de los coeficientes del modelo contable:

$$\bar{e}_{ij\tau} = \frac{zm_{ij}(t_0)}{z_j(t_0)} = \frac{m_{ij}(y,t_0)}{z_i(t_0)} = \frac{\dfrac{\partial m_{ij}(y,t_0)}{\partial y_j} y_j}{z_i(t_0)} = \frac{e_{ij}(t_0) y_j}{z_i(t_0)} = e_{ij}(t_0) \qquad [26]$$

El resultado de esta primera operación lógica es que los coeficientes que resultan de la aproximación lineal, en torno al equilibrio, de las funciones que transforman ingreso en gasto, son iguales a los que se obtienen al especificar el modelo contable de ingreso-gasto.

La segunda operación consistiría en sustituir los coeficientes e_{ij}, que se obtuvieron al aproximar linealmente, por las propensiones a consumir que están especificadas en el modelo lineal. Pero esta sustitución no es posible porque no existen, como en el caso del modelo de insumo-producto, coeficientes de proporcionalidad, en dicho caso razones de precios, que hagan factible la equiparación de los coeficientes observados $\bar{e}_{ij}$ con los coeficientes teóricos ε_{ij}.

Tal como se establecieron las características para los modelos contables de insumo-producto es posible plantear las que tiene el modelo contable de ingreso-gasto. Este modelo supone:

i) una distinción entre variables exógenas, que ahora son los ingresos obtenidos en cada rama por el insumo primario (mano de obra), y variables de estado representadas por los gastos totales, y unos vínculos entre ellas que admiten la misma interpretación computacional,

ii) unos coeficientes observables definidos como distribuciones del ingreso que resultan ser iguales a los *coeficientes de las aproximaciones lineales* de las funciones que transforman ingresos en gasto, y

iii) los parámetros de las funciones lineales de consumo difieren de los coeficientes de las distribuciones y de los coeficientes de la linealización en la medida en que se trata de parámetros teóricos y no aquellos que resultan de la observación o de la aproximación lineal a las funciones de entrada-salida.

Una vez planteados los modelos contables de insumo-producto y de ingreso–gasto es posible mostrar cuáles son las relaciones entre ellos.

Del modelo de insumo-producto especificado en [13], y considerando la sustitución hecha en [14] de la transacción observada $m_{ij}(x, t_0)$ por su aproximación lineal respectiva, se tiene:

$$\underline{\hat{p}}M = \bar{A}\underline{\hat{z}}; \quad \bar{A} = \underline{\hat{p}}A\underline{\hat{p}}^{-1} \qquad [27]$$

A la vez, del modelo de ingreso-gasto que está planteado en [24], y de la sustitución que se hace en [26] de la transacción observada $p_i m_{ij}(y, t_0)$ por su respectiva aproximación lineal, resulta:

$$\underline{\hat{p}}M = \underline{\hat{z}}\bar{E}; \quad \bar{E} = E \qquad [28]$$

Así, se observa que la matriz del modelo de insumo-producto que registra las propensiones medias $\bar{A}$ es similar a la matriz de los coeficientes de las aproximaciones lineales $\mathrm{A} = \{a_{ij}\}$, $a_{ij} = \dfrac{\partial M_i(x, t_0)}{\partial x_j}$, de las transacciones intermedias.[20] A su vez, la matriz del modelo de ingreso–gasto que registra las distribuciones medias $\bar{E}$ es igual a la matriz de los coeficientes de las aproximaciones lineales $E=\{e_{ij}\}$, $e_{ij}=\dfrac{\partial M_i(y,t_0)}{\partial y_j}$, de las transacciones intermedias.

Mediante la igualación de [27] y [28] se obtiene que la matriz *E*, de los coeficientes de la aproximación lineal de las funciones del modelo de ingreso-gasto, es similar a la matriz $\underline{\hat{p}}A\underline{\hat{p}}^{-1}$, que resulta de pre y pos multiplicar la matriz de los coeficientes de la aproximación lineal de las funciones del modelo de insumo-producto por las matrices diagonales del vector de precios y de sus inversos. Tal similaridad está representada por la ecuación:

$$E=\hat{q}^{-1}\underline{\hat{p}}A\underline{\hat{p}}^{-1}\hat{q} \qquad [29]$$

Estas relaciones entre las matrices de los modelos de insumo-producto y de ingreso-gasto están mostrando que las características observadas del sistema económico se preservan en ambos y subyacen de manera común en los modelos contables que determinan ambas variables de estado.

Conclusiones sobre linealidad, estructura y dinámica

La tabla de insumo-producto resulta del análisis intersectorial que tiene un carácter orientado empíricamente que difiere de la naturaleza apriorística de la teoría del equilibrio general. Dicho mediante las palabras de Leontief el análisis insumo-producto es "...un procedimiento bastante reciente que pretende combinar, en el terreno económico, los hechos con la teoría...".[21] Por su parte: "Las teorías razonables del equilibrio general que desarrolló la escuela de Lausana son, en esencia, grandiosos aparatos

---

[20] Nótese que una matriz cuadrada *P* es similar a otra *Q* si existe una matriz no singular *N* tal que: $P=NQN^{-1}$. La similaridad es una relación de equivalencia en las matrices de que se trate que preserva invariantes determinante, traza y valores característicos.

[21] Leontief (1965), p.64.

clasificatorios taxonómicos."[22] Pero: "La teoría de la interdependencia general (...) no pretendía ser, desde el punto de vista de sus creadores, un instrumento para el análisis fáctico."[23]

El carácter fáctico del análisis hace que, su resultado, la tabla de insumo-producto sea una observación de un proceso económico interdependiente en el momento en que se equiparan sus entradas y salidas. Así, ella adquiere sus connotaciones específicas de captación de unas transformaciones observadas de entradas en salidas: $M(x, .)$, de satisfacción de una condición de equilibrio: $E(x)=0 \leftrightarrow x=q$, y de temporalidad en tanto dichas transformaciones son captadas en t_0. Por ello, la linealidad de la tabla tiene una diferencia sustancial con la que suponen: *a)* los rendimientos constantes a escala incorporados a las funciones lineales de producción, y *b)* el comportamiento de los consumidores mediante propensiones fijas medias o marginales que sustentan las funciones lineales de consumo.

El carácter lineal de la matriz de transacciones proviene de la forma en que se concibe y organiza la información empírica y no de los supuestos sobre el comportamiento de los agentes involucrados en los intercambios que son observados. De hecho, como aquí se ha mostrado, se trata de la aproximación lineal de funciones que transforman entradas en salidas: insumos en productos dependiendo de la oferta en un caso, ingresos en gastos dependiendo de la demanda en el otro. En consecuencia el proceso económico está representado por esas transformaciones no lineales que se aproximan linealmente en virtud de la disponibilidad y tipo de información empírica utilizada.

Las transacciones registradas en la matriz representan la complejidad de las relaciones existentes entre los agentes de una economía y, a la vez, presentan tal grado de estabilidad en el tiempo que hacen posible tomar la tabla como expresión de la estructura del proceso económico observado. Esa concepción de la tabla fundamenta su carácter estructural y posibilita el análisis de este orden de la economía.

Para Leontief: "La teoría económica se esfuerza por explicar aquellos aspectos y operaciones materiales de nuestra sociedad en función de las

---

[22] Leontief (1954), p. 13.
[23] *Ibid.,* p. 13.

interacciones que se dan entre variables tales como la oferta y la demanda o los salarios y los precios."[24] Pero esas formas en que se trasmiten los efectos de unas variables sobre otras no son unidireccionales y simples sino que por el contrario y, siguiendo el ejemplo de Leontief: "Entre el instante en que se modifican los salarios y aquel en que dicha modificación se deja sentir en los precios, tiene lugar una compleja serie de transacciones a través de las cuales las personas reales se intercambian entre sí bienes y servicios."[25] Por ello la tabla está concebida como representación de esa complejidad y ella ocurre en el seno de un proceso.

La estabilidad de las transacciones sustenta la capacidad de la tabla como medio para detectar la estructura de la economía. El concepto fundamental del análisis de insumo-producto está en afirmar la existencia de relaciones estables entre insumos y producto de una rama. "Estas relaciones reflejan la estructura de la tecnología..."[26] Pero los gastos que están indicados en la tabla "...están determinados por una serie de consideraciones técnicas relativamente inmutables o por una serie de hábitos institucionales igualmente invariables, ..."[27]

Así es factible el análisis estructural en el sentido estricto de examinar las características de una estructura cualitativa. El análisis de insumo-producto concentra "... la fase empírica de recolección de datos del análisis económico sobre la observación directa de las características estructurales básicas propias de la economía particular que se va a estudiar."[28] Y entonces: "Dependencia e independencia, jerarquía y circularidad (o interdependencia multirregional) son los cuatro conceptos básicos del análisis estructural."[29] Como surge de lo expuesto al final del parágrafo anterior, esas características de la estructura subyacente de una economía quedan conceptualizadas por los invariantes de similaridad de las matrices de los distintos modelos y por otros indicadores derivados de ellas.

---

[24] Leontief (1965), p. 65.
[25] *Ibid.*, p. 65.
[26] *Ibid.*, p. 73.
[27] *Ibid.*, p. 74.
[28] Leontief (1954), p. 15.
[29] Leontief (1965), p. 102.

Es importante poner el acento en el hecho de que la tabla de insumo-producto en la medida que es concebible como la realización de un sistema dinámico[30] contiene: *a)* la no linealidad de las transformaciones de entradas en salidas representadas en la tabla, y *b)* la estructura subyacente de las relaciones cuantificadas en ella. Por ello, este enfoque dinámico estructural de la tabla concibe mejor el carácter empíricamente orientado de la contribución principal de Leontief respecto a aquellos otros que la suponen una expresión directa de ciertas teorías.

La ubicación de la tabla de insumo-producto como el punto de partida de un modelo de raíz empírica de la teoría de la producción coloca la contribución de Leontief en un lugar distinto respecto a las interpretaciones teóricas mencionadas al principio. Ella constituye un dispositivo analítico privilegiado para observar el proceso económico desde un punto de vista dinámico y estructural. Y así se distancia de los papeles de: *a)* marco contable de la teoría clásica de la producción y de los precios, *b)* balance para los esquemas marxianos de reproducción simple y ampliada, y *c)* compilación de datos para cuantificar la teoría walrasiana del equilibrio general.

Finalmente, desde una perspectiva metodológica la tabla se encuentra en la encrucijada entre la descripción contable de la actividad económica y la concepción de la economía como un sistema dinámico. Es así que ella adquiere la enorme potencialidad para el análisis empírico de las economías y para el sustento de explicaciones pertinentes de la dinámica estructural de las mismas. Y en ese sentido representa un legado invaluable como lo prueban más de cincuenta años de investigación basada en ella.[31]

---

[30] Recuérdese que el concepto de realización de un sistema dinámico significa que: dada una observación de las entradas y salidas de un sistema su realización está constituida por la matriz identificada como la que hace posible transformar esas entradas en esas salidas.

[31] Véanse al respecto Miller y Blair (1985), Carter y Petri (1989) y Polenske (1999).

BIBLIOGRAFÍA

Almon, Clopper, "The INFORUM-IIASA International Systems of Input-Output Models", in *Proceedings of the Seventh International Conference on Input-Output Techiques*, Nueva York: UN, 1984.

Baumol, William J., "Leontief's Great Leap Forward Beyond Quesnay, Marx and von Bortkiewicz", *Economic Systems Research,* vol. 12, núm. 2, 2000.

Carter, Anne P. y Peter A. Petri, "Leontief's Contribution to Economics", *Journal of Policy Modelling,* vol. 11, núm. 1, 1989.

Ghosh A., "Input-output approach to an allocative system", *Economica*, 25, 58-64, 1958.

Goodwin, Richard M. (1949) "The Multiplier as a Matrix", *Economic Journal,* recopilado en Goodwin, R. M., *Linear Economic Structures,* Londres: MacMillan, 1983.

——, "The Static and Dynamic Linear General Equilibrium Models", *Input-Output Relations, Proceedings of a Conference at Driebergen,* Driebergen, Holanda: Netherlands Economic Institute, recopilado en Goodwin, R. M., *ibid.,* 1953.

Goodwin, Richard M. y Lionello F. Punzo, *The Dynamics of a Capitalist Economy. A Multi-Sectoral Approach*, Boulder: Westview Press, 1987.

Koopmans, Tjalling C. (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, Nueva York: Wiley. Cowles Commission Monograph 13, 1951.

Kurz, Heinz D. y Neri Salvadori, "'Classical' Roots of Input-Output Analysis: a Short Account of its Long Prehistory", *Economic Systems Research,* vol. 12, núm. 2, junio, pp. 153-180, 2000.

Lager, Christian, "Production, Prices and Time: a Comparison of Some Alternative Concepts", *Economic Systems Research,* vol. 12, núm. 2, junio, pp. 231-254, 2000.

Leontief, Wassily (1941), *The Structure of American Economy, 1919-1939*, Nueva York: Oxford University Press, 1951.

——, "El análisis de insumo-producto y la teoría del equilibrio general", en *Modelo insumo-producto. 2. Bases teóricas y aplicaciones especiales,* México: CGSNEGI/SPP, 1980, 13-20. (Tomado de Barna, Tibor (1954), *Proceedings of an International Conference on Input – Output Analysis.*

Varenna, 27 de junio a 10 de junio de 1954, Nueva York: Wiley and Sons, Inc., Publishers), 1954.

——, *Análisis input-output*, Barcelona: Ariel, 1975.

Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston y Jerry R. Green, *Microeconomic Theory*, Nueva York: Oxford University Press, 1995.

Miller, Ronald E. y Peter D. Blair, *Input-Output Analysis*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1985.

Polenske, Karen, "Wasily W. Leontief, 1905-1999", *Economic Systems Research,* vol. 11, núm. 4, pp. 341-348, 1999.

Puchet Anyul, Martín, *Sistemas contables y bases analíticas de modelos de regulación para economías abiertas y semi-industrializadas*, tesis de doctorado, Facultad de Economía, UNAM, México, 1994.

Punzo, Lionello F., *Essays on Formalism and Empiricism in Economics: Origins, Theory, Methods*, Siena: Instituto di Economia, Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie, Università degli Studi di Siena, 1984.

——, "Some Complex Dynamics for a Multisectoral Model of the Economy", *Revue Economique,* L' économie hors de l' équilibre, bajo la dirección de Jean-Luc Gaffard y Lionello F. Punzo, vol. 46, núm. 6, noviembre, 1995.

Solow, Robert M., *"Rereading The Structure of the American Economy", Economic Systems Research* vol. 10, núm. 4, 1998.

Sraffa, Piero (1960), *Producción de mercancías por medio de mercancías*, Madrid: Oikos-tau, 1966.

Stone, J. R. N., "La matriz de insumo-producto y las cuentas sociales", en *Modelo insumo-producto. 1. Bases teóricas y aplicaciones generales, ibid,* 211-225, 1954.

——, "Nobel Memorial Lecture 1984. The Accounts of Society", *Journal of Appied Economics,* vol. 1, num. 1, 1986.

Stone, J. R. N. y Giovanna Stone, *National Income and Expenditure*, Londres: Bowes and Bowes, 1977.

Von Neumann, John, "A Model of General Economic Equilibrium", *Review of Economic Studies*, vol. XIII, núm. 1, 1945.