

RIESGO DE TASAS DE INTERÉS E INMUNIZACIÓN POR DURACIÓN Y CONVEXIDAD CON FUTUROS: ANÁLISIS LOCAL Y DE VALOR EN RIESGO

BERNARDO GONZÁLEZ-ARÉCHIGA RAMÍREZ-WIELLA^{*}
FRANCISCO VENEGAS MARTÍNEZ^{**}
JAIME DÍAZ TINOCO^{***}

INTRODUCCIÓN

El tamaño considerable que han alcanzado los mercados de futuros financieros,¹ se debe en gran medida a la flexibilidad que estos instru-

Manuscrito recibido en marzo de 2000, versión final, abril de 2000.

Los autores agradecen a Víctor Campos Cauch, gerente de Valuación de Activos de la Bolsa Mexicana de Valores, por su valiosa asesoría sobre metodologías de valuación de Cetes y a Jiyouji Ueda Ordóñez, Especialista en Riesgos de ASIGNA (Cámara de Compensación y Liquidación), por su incansable labor en las corridas de simulación, así como a dos dictaminadores anónimos. Para comentarios o sugerencias: Mercado Mexicano de Derivados, S.A. de C.V., Av. Paseo de la Reforma 255, piso 7, col. Cuauhtémoc, CP. 06500 México, D. F., tel. 5726 - 6600, e-amil: fvenegas@bmv.com.mx

^{*} Director General de MEXDER, Mercado Mexicano de Derivados, S.A. de C.V.

^{**} Subdirector de Investigación y Análisis de Mexder, Mercado Mexicano de Derivados, S.A. de C.V.

^{***} Subdirector de Riesgos de ASIGNA, Compensación y Liquidación.

¹ Cabe mencionar que el interés abierto de todas las bolsas de productos derivados, incluyendo futuros, en el mundo fue de 30 trillones de dólares en 1997. En contraste, el valor de capitalización de las 26 principales bolsas de valores del mundo ascendió a 20 trillones de dólares.

mentos proporcionan a sus usuarios para entrar o salir rápidamente del mercado debido al alto grado de liquidez que generan (*i. e.*, siempre es posible encontrar compradores y vendedores) y al alto nivel de apalancamiento que presentan (la inversión inicial es pequeña comparada con la de otros instrumentos). Los futuros financieros, en particular, los que se refieren a tasas de interés o títulos de deuda, pública o privada, son herramientas útiles que permiten a las tesorías de corporativos controlar el riesgo de tasas de interés con costos bajos de transacción. El riesgo crédito de estos instrumentos es, por supuesto, nulo debido a la asociación del mercado con una cámara de compensación y liquidación que a cambio de una comisión funge como contraparte de todas las partes (como vendedor de todos los compradores y comprador de todos los vendedores), garantizando el cumplimiento de las obligaciones generadas en los contratos. En conclusión, los futuros financieros son instrumentos que permiten a las tesorías planear sus flujos de pasivos y activos en respuesta a sus expectativas económicas y financieras, reduciendo el riesgo y la incertidumbre del mercado con bajos costos de transacción.

El riesgo por fluctuaciones adversas en la tasa de interés que enfrentan las tesorías de las empresas se refleja en la posibilidad de que los flujos que se tienen planeados no se presenten en la magnitud y en los tiempos que se esperan, lo que a su vez tiene un impacto en el valor presente de dichos flujos, es decir, en el valor presente de los activos y pasivos de la empresa, lo que afecta no sólo la programación de las decisiones de gasto, inversión y financiamiento, sino también al propio valor de las empresas. El riesgo de tasas de interés puede reducirse, y en ocasiones eliminarse, si se cubren adecuadamente los flujos esperados tomando posiciones de futuros sobre tasa de interés o títulos de deuda gubernamentales. En este trabajo, con base en la distribución empírica del valor presente de los flujos financieros, damos respuesta a las siguientes dos preguntas fundamentales: ¿cómo podemos medir el riesgo asociado a diferentes escenarios (estados de la naturaleza)? y ¿cómo podemos inmunizar contra este tipo de riesgo el valor presente de nuestros flujos esperados?

La inmunización de un conjunto de flujos esperados consiste en determinar un portafolio de futuros que genere los flujos de efectivo que se

requieren para compensar las pérdidas en el valor presente por movimientos adversos en la tasa de interés. Es decir, se desea determinar un portafolios que cubra el valor presente de los flujos esperados contra el riesgo de tasas de interés. La inmunización es fundamentalmente un método local diseñado para analizar cambios en el valor presente debido a pequeños desplazamientos en la curva intertemporal de la tasa de interés. Por esta razón, las estrategias de inmunización requieren de actualizaciones periódicas o “rebalanceo” de la cobertura a fin de proteger eficazmente no sólo contra cambios pequeños en tasas, sino también contra cambios moderados y aun catastróficos. Si una estrategia no es rebalanceada atendiendo a las expectativas del mercado, la protección se deteriora progresivamente.

La cantidad de contratos futuros en una estrategia de inmunización se determina con base en la duración y convexidad monetarias del valor presente de los flujos y de los futuros. Para evaluar la robustez de las estrategias obtenidas en términos globales, es decir, en términos del comportamiento histórico de la tasa de interés, se genera la distribución conjunta del valor presente de los flujos financieros y de los flujos propios que producen los futuros. Se comparan las varianzas de las distribuciones empíricas de los flujos financieros con y sin futuros y se estiman pérdidas potenciales en términos del valor en riesgo para distintos niveles de confianza. Además de lo anterior, en este trabajo se discute una extensión del modelo en donde a la tasa de descuento más reciente se le incorporan valores rezagados de la variación de la tasa de descuento.

La literatura sobre inmunización utilizando los conceptos de duración y convexidad es extensa, vale la pena destacar, por ejemplo: Kolb (1998), Díaz Tinoco (1997), Zenios (1996), Fabozzi (1994), Chance (1990), Cox, Ingersoll y Ross (1979), Platt (1986), Schaefer (1986), Chua (1984), Ingersoll, Skelton y Weil, (1978), Bierwag (1987 y 1977), Bierwarg, Kaufman y Khang (1978), Bierwarg, Kaufman y Toevs (1983a,b), Fabozzi y Pollack (1987), y Granito (1984). La literatura sobre valor en riesgo es también abundante y mencionamos al respecto a: Jorion (1989) y (1999), Beckstrom y Campbell (1995), y Kupiec (1995), entre otros.

Este trabajo está organizado como sigue. En la sección dos, se presenta un método local de inmunización de flujos financieros que utiliza duración y convexidad monetarias. En la sección tres, se desarrolla un método global de inmunización con base en el valor en riesgo. En la sección cuatro, se extiende el modelo propuesto a fin de incluir valores rezagados de la variación de la tasa de descuento que incorporen la variación absoluta. En la sección cinco, se ilustra el método de inmunización propuesto en la cobertura financiera de un conjunto de flujos. Finalmente, en la sección seis, se resumen los principales resultados de la investigación, se destacan las limitaciones y ventajas del método empleado y, por último, se mencionan algunas líneas de investigación futura.

MÉTODO LOCAL DE INMUNIZACIÓN DE FLUJOS FINANCIEROS

En esta sección se presenta un modelo de decisión para inmunizar flujos financieros con futuros sobre tasas de interés bajo una perspectiva del valor presente. El modelo emplea los conceptos de duración y convexidad monetarias útiles en la medición y el control del riesgo por desplazamientos paralelos y moderados en la tasa de descuento. El primer elemento importante para la construcción del modelo de inmunización es la estimación de la curva intertemporal de tasas de interés para Cetes.

Estimación de la tasa de descuento de Cetes

El primer problema que se presenta en la estimación de la curva de rendimiento para el mercado de Cetes es la estimación del precio de estos instrumentos para cada plazo considerando todas las tasas y plazos observados.² Con este propósito, las tasas de rendimiento con diferentes plazos reportadas por los participantes del mercado, se convierten en tasas de descuento. Estas tasas de descuento, digamos, d_i , $i=1,2,\dots,n$, se utilizan para calcular el precio de mercado, PM_i , a través de la siguiente relación:

$$PM_i = 10 \left[1 - d_i \frac{DP_i}{360} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

² Esta metodología es aplicada por la Bolsa Mexicana de Valores utilizando la información de tasas de rendimiento reportada por el Banco de México.

donde DP_i son los días plazo asociados a d_i . La estructura intertemporal de precios se estima mediante el ajuste de un polinomio de cuarto grado a través de mínimos cuadrados con restricciones. Es decir, se desea estimar un polinomio de cuarto grado para el precio del Cete en la variable días plazo anualizado, t ,

$$p(t) = 10 \left[1 - (\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3) t \right]$$

de tal manera que se resuelva el problema de minimizar el error cuadrático entre el precio estimado y el precio observado, ponderado por volumen, de la siguiente manera:

$$\min_{\beta_1, \beta_2, \beta_3} \sum_{i=1}^n [PM_i - p(t_i)]^2 \sqrt{V_i} + \left(\frac{1}{5} \sum_{i=1}^n \sqrt{V_i} \right) (d'(t)_{t=t_E})^2.$$

donde V_i son los volúmenes operados. En este problema de mínimos cuadrados se establecen dos restricciones: 1) la tasa de descuento correspondiente al plazo mínimo reportado se ancla β_0 y 2) la pendiente de la curva de descuento en el punto final se estima con base en el último día plazo. Aquí, n es el número de días plazos reportados; t_i es el i -ésimo día plazo anualizado ($t_i = DP_i / 360$); PM_i es el precio promedio de mercado para el plazo i ; $d(t)$ es la función tasa de descuento: $d(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$; $d'(t)$ es la derivada de $d(t)$, es decir, $d'(t) = \beta_1 + 2\beta_2 t + 3\beta_3 t^2$; t_E es el último día plazo e igual a 720 días; y β_1 , β_2 y β_3 son los parámetros por estimar.³ Una vez estimados los parámetros, digamos $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ y $\hat{\beta}_3$, se genera el polinomio estimado

$$\hat{p}(t) = 10 \left[1 - (\beta_0 + \hat{\beta}_1 t + \hat{\beta}_2 t^2 + \hat{\beta}_3 t^3) t \right]$$

³ Los detalles de esta metodología pueden encontrarse en el documento *Metodologías para la valuación de instrumentos de deuda y capitales*, elaborado por la BMV para el Comité de Valuación, junio 1999.

el cual define el vector de precios para los días plazo desde 1 hasta 360. La estructura intertemporal de tasas de descuento estimadas, $d(DP)$, se obtienen de la siguiente expresión:

$$d(DP) = \left(\frac{10 - \hat{p}(DP)}{10} \right) \left(\frac{360}{DP} \right) = \beta_0 + \hat{\beta}_1 \left(\frac{DP}{360} \right) + \hat{\beta}_2 \left(\frac{DP}{360} \right)^2 + \hat{\beta}_3 \left(\frac{DP}{360} \right)^3$$

donde DP , como antes, son los días plazo (de 1 hasta 360 días).

Dado que, al momento de escribir este documento, no existen Cetes con un plazo al vencimiento mayor a 360 días, es necesario extrapolar para obtener tasas de descuento a plazos entre 361 y 720 días, de la siguiente manera:⁴

- 1) La tasa de descuento de 360 días se convierte en tasa de rendimiento.
- 2) La tasa de rendimiento de 360 días, r_{360} , es llevada a plazos mayores, hasta 720 días mediante:

$$r_{360+i} = \left[\left(r_{360} + 1 \right)^{\frac{360+i}{360}} - 1 \right] \left(\frac{360}{360+i} \right).$$

- 3) Finalmente, las tasas de rendimiento de 361 a 720 días se convierten en tasas de descuento.

Con un registro histórico del comportamiento de esta curva, es posible generar las distribuciones empíricas del valor presente de un conjunto de flujos financieros con y sin futuros. Estas distribuciones serán útiles en la estimación del valor en riesgo del valor presente. En la siguiente sección se estudia la sensibilidad del valor presente a cambios en la tasa de interés mediante los conceptos de duración y convexidad monetarias.

⁴ El plazo de 360 días puede variar en función del último plazo emitido de Cetes.

Duración y convexidad monetarias de los flujos esperados

El concepto de duración es sumamente útil en la medición y administración de riesgos, así como en la restructuración de activos y pasivos y en la inmunización de portafolios. Una vez obtenida la curva intertemporal de tasas de descuento,⁵ se calcula la duración y convexidad monetarias del valor presente de un conjunto de flujos financieros, tanto de pasivos como de activos, $f = \{f_1, f_2, \dots, f_l, \dots, f_m\}$, los cuales ocurren en fechas preestablecidas $t_1, t_2, \dots, t_l, \dots, t_m$. La tasa de descuento que se emplea esta asociada a un vector base de betas (v. g. el vector más reciente de betas) que podemos denotar por $(\beta_0^{(n)}, \beta_1^{(n)}, \beta_2^{(n)}, \beta_3^{(n)})$. La duración monetaria, también llamada duración del tipo Fisher-Weil, $D^{(n)}(f)$, es la sensibilidad del valor presente de los flujos, $V^{(n)}(f)$, ante cambios en la tasa de interés, es decir,

$$D^{(n)}(f) = \frac{\partial V^{(n)}(f)}{\partial r_t^{(n)}}.$$

donde

$$V^{(n)}(f) = \sum_{l=1}^m \frac{f_l}{1 + r_t^{(n)} \left(\frac{t_l}{360} \right)}.$$

Si utilizamos la relación

$$1 + r_t^{(n)} \left(\frac{t_l}{360} \right) = \left[1 - d_t^{(n)} \left(\frac{t_l}{360} \right) \right]^{-1},$$

⁵ Esta curva, con base en las operaciones del día anterior, es publicada diariamente en el Boletín Bursátil de la BMV en la sección de Análisis y Valuación de Instrumentos de Deuda.

entonces la duración monetaria de f puede escribirse como

$$D^{(n)}(f) = -\sum_{l=1}^m f_l \left(\frac{t_l}{360} \right) \left[1 - d_l^{(n)} \left(\frac{t_l}{360} \right) \right]^2.$$

Notése que la duración se determina a través de una aproximación lineal o de primer orden entre el valor presente y la tasa de descuento. La duración mide también el tiempo promedio (ponderado por el valor presente de los flujos) en el que se presentan flujos. Sin embargo, la experiencia demuestra que cuando los cambios no son pequeños desplazamientos, la relación que se presenta entre el valor presente de los flujos y la tasa de interés no es lineal. Por tanto, es importante considerar una medida de sensibilidad de segundo orden conocida como convexidad. La convexidad es una medida de dispersión de los flujos, entre mayor sea la convexidad más grande será la dispersión entre ellos. La convexidad monetaria de $V^{(n)}(f)$, $C^{(n)}(f)$, se define como:

$$C^{(n)}(f) = \frac{\partial^2 V^{(n)}(f)}{\partial r_l^{(n)2}},$$

o en términos de la tasa de descuento:

$$C^{(n)}(f) = 2 \sum_{l=1}^m f_l \left(\frac{t_l}{360} \right)^2 \left[1 - d_l^{(n)} \left(\frac{t_l}{360} \right) \right]^3.$$

La agregación de la convexidad a la duración, es decir, la expansión del valor presente en series de Taylor hasta el segundo orden, suponiendo despreciables los otros términos, nos permitirá en primer lugar tener una medida más precisa del cambio en el valor presente de los flujos esperados ante cambios en la tasa de interés. Desde la perspectiva de la administración de riesgos, la convexidad agregada a la duración nos permitirá estimar los posibles cambios en el valor presente para crear un portafolios con posiciones de futuros. La inmunización de un conjunto de flujos esperados consiste en determinar un portafolios de futuros que genere los flujos de efectivo que se requiere para compensar las pérdidas en el valor

presente por movimientos adversos en la tasa de interés. El portafolios combinado de flujos y futuros tiene duración y convexidad iguales a cero. A continuación se desarrollan los conceptos duración y convexidad para futuros de tasa de interés.

Duración y convexidad de futuros de tasas de interés

Un futuro de tasa de interés es un contrato a través del cual los agentes participantes en el mercado realizan operaciones de compra-venta de títulos de deuda de determinado plazo en fechas futuras a tasas pactadas al momento de realizar la operación. Se considera la posibilidad de que la entrega no se haga en especie y solamente se liquiden las diferencias entre la tasa pactada en el momento de la concertación y la tasa observada en el momento en que se cierra la posición (se toma una posición contraria a la originalmente pactada o el contrato vence); véase Díaz Tinoco (1997) o Díaz Tinoco y Hernández Trillo (1996).

En esta sección calculamos la duración y convexidad de los futuros sobre Cete a 91 días, los cuales son instrumentos financieros de cobertura que utilizaremos para inmunizar nuestros flujos de efectivo. Para valorar el futuro del Cete a 91 días a futuro se utilizará como referencia $(\beta_0^{(n)}, \beta_1^{(n)}, \beta_2^{(n)}, \beta_3^{(n)})$ de tal manera que el precio teórico está dado por:

$$F_{t,T,T+91}^{(n)} = M \left[\frac{1 - d_{T+91}^{(n)} \left(\frac{T+91-t}{360} \right)}{1 - d_t^{(n)} \left(\frac{T-t}{360} \right)} \right], \quad [1]$$

donde

$$d_{\tau}^{(n)} = \beta_0^{(n)} + \beta_1^{(n)} \left(\frac{\tau-t}{360} \right) + \beta_2^{(n)} \left(\frac{\tau-t}{360} \right)^2 + \beta_3^{(n)} \left(\frac{\tau-t}{360} \right)^3.$$

Aquí, $F_{t,T,T+91}^{(n)}$ es el precio del futuro del Cete a 91 días, observado al tiempo t , con vencimiento en T y plazo de inversión $T+91$; $d_{T+91}^{(n)}$ es la tasa de descuento estimada con la estructura de plazos de Cetes en el intervalo $[t, T+91]$; $d_T^{(n)}$ es la tasa de descuento estimada de Cetes para el intervalo $[t, T]$; y M es el valor nominal del contrato, el cual es igual a 10 000 Cetes, es decir, igual a \$100 000 pesos. Nótese también que el paréntesis de la ecuación [1] expresa la tasa de descuento forward ya que significa la razón entre los factores de descuento del plazo largo, $T+91$, y el plazo corto, T .

Si suponemos desplazamientos paralelos en la tasa de interés, la duración monetaria del contrato futuro de Cetes a 91 días se define como

$$D(F_{t,T,T+91}^{(n)}) \equiv \frac{\partial F_{t,T,T+91}^{(n)}}{\partial r_{\tau}^{(n)}} = - \left(P_{T+91}^{(n)} \left(\frac{T+91-t}{360} \right) - P_T^{(n)} \left(\frac{T-t}{360} \right) \right) F_{t,T,T+91}^{(n)}$$

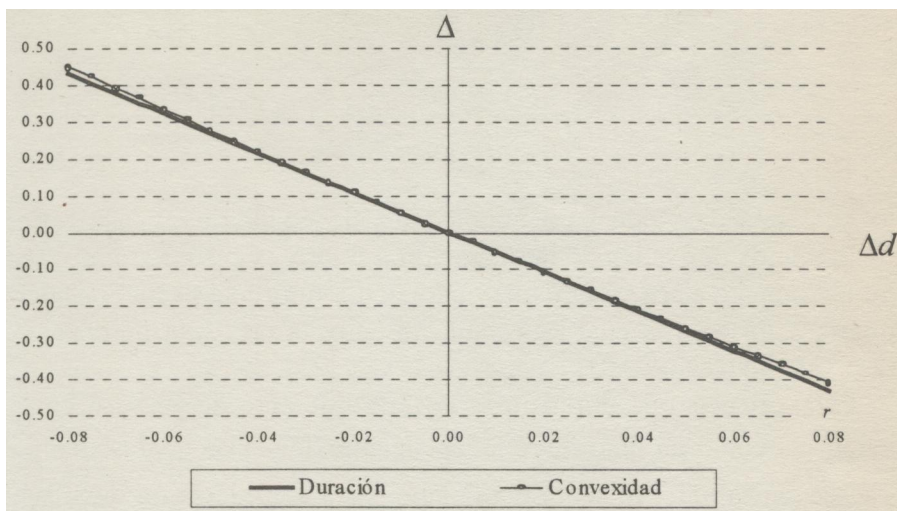
donde

$$1 + r_l^{(n)} \left(\frac{t_l}{360} \right) = \left[1 - d_l^{(n)} \left(\frac{t_l}{360} \right) \right]^{-1} \quad \text{y} \quad P_{\tau}^{(n)} = \left[1 - d_{\tau}^{(n)} \left(\frac{\tau}{360} \right) \right].$$

La convexidad monetaria del contrato futuro de Cetes a 91 días está dada por

$$C(F_{t,T,T+91}^{(n)}) \equiv \frac{\partial^2 F_{t,T,T+91}^{(n)}}{\partial r_{\tau}^{(n)2}} = 2 \left[\left(P_{T+91}^{(n)} \right)^2 \left(\frac{T+91-t}{360} \right)^2 - P_{T+91}^{(n)} \left(\frac{T+91-t}{360} \right) P_T^{(n)} \left(\frac{T-t}{360} \right) \right] F_{t,T,T+91}^{(n)}.$$

GRÁFICA 1.

Duración y convexidad monetarias de un futuro de Cetes a 91 días

En la gráfica 1, se presentan la duración y convexidad monetaria de un futuro de Cetes, se puede apreciar que para cambios moderados en la tasa de descuento la diferencia entre utilizar sólo duración y duración con convexidad es significativa.

Existen dos flujos importantes que se generan con un contrato futuro en los tiempos T y $T + 91$, el precio $F_{t,T,T+91}^{(n)}$ y valor nominal M del activo subyacente, respectivamente. Es importante destacar que conforme nos acercamos a T , el precio del futuro se aproxima al precio *spot* del Cete a 91 días. Por esta razón se presenta un flujo de efectivo por la operación pactada (compra o venta). Nótese que ambos flujos tienen signos contrarios ya que si la operación a futuro es larga (compra) entonces en T se paga el precio pactado de los Cetes a 91 días y después del plazo de inversión, *i. e.*, después de 91 días se recibe el valor nominal. En el caso de una posición corta (venta), el razonamiento es inverso. Esto es precisamente lo que generan los flujos compensatorios que inmunizan al portafolios.

El valor presente de dichos flujos está dado por:

$$\begin{aligned} v(T; T+91) &= -\left(1 - d_T^{(n)}\left(\frac{T-t}{360}\right)\right) F_{t,T,T+91}^{(n)} + \left(1 - d_{T+91}^{(n)}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)\right) M \\ &= -\left(1 - d_{T+91}^{(n)}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)\right) M + \left(1 - d_{T+91}^{(n)}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)\right) M = 0, \end{aligned}$$

lo cual nos dice que bajo condiciones de equilibrio el valor presente de los flujos derivados de la operación a futuro es cero. Este resultado es intuitivamente claro ya que una operación a futuro se pacta considerando una tasa *forward* la cual está implícita entre la tasa *spot* de plazo T y la tasa *spot* de plazo $T+91$.

Para calcular una duración monetaria diferente de cero se considera a $F_{t,T,T+91}^{(n)}$ como un flujo fijo e independiente de la tasa de descuento, y en consecuencia independiente del tiempo. Esta consideración tiene sentido, ya que al pactar una tasa a futuro, ésta queda predeterminada para la realización de los flujos derivados de cualquier operación. En este caso, la duración monetaria está dada por:

$$\begin{aligned} D(T; F_{t,T,T+91}^{(n)}) &= \left(1 - d_n^{(T)}\left(\frac{T-t}{360}\right)\right)^{-2} \left(\frac{T-t}{360}\right) F_{t,T,T+91}^{(n)} \\ &\quad - \left(1 - d_n^{(T+91)}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)\right)^{-2} \left(\frac{T+91-t}{360}\right) M. \end{aligned}$$

En forma similar, la convexidad monetaria está determinada por

$$\begin{aligned} C(T; F_{t,T,T+91}^{(n)}) &= -2 \left(1 - d_T^{(n)}\left(\frac{T-t}{360}\right)\right)^{-3} \left(\frac{T-t}{360}\right)^2 F_{t,T,T+91}^{(n)} \\ &\quad + 2 \left(1 - d_{T+91}^{(n)}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)\right)^{-3} \left(\frac{T+91-t}{360}\right)^2 M. \end{aligned}$$

Es importante destacar nuevamente que la agregación de ambas medidas proporciona una mejor aproximación a la sensibilidad del contrato futuro con respecto a cambios en la tasa de descuento.

Una vez que se establecido la manera de cuantificar la magnitud de los cambios en el valor presente de los flujos y en el precio teórico de los futuros por variaciones en la tasa de interés, estamos en condiciones de determinar el número de contratos y la posición que se requiere (larga o corta) para compensar los cambios en el portafolios combinado.

Determinación del número de contratos

La inmunización es una estrategia que reduce el riesgo que se genera por fluctuaciones adversas en la tasa de interés. La pregunta que se responde en esta sección es cómo podríamos cubrir nuestros flujos financieros para evitar que se generen pérdidas de valor presente por la exposición al riesgo del mercado. Para realizar la cobertura de flujos de efectivo que se tienen programados podríamos usar los cuatro principios siguientes:

- 1) Tomar una posición con futuros inversa a la posición que se mantiene sobre el flujo. Es decir, si estamos largos en nuestros flujos, entonces tomamos una posición corta a futuro y viceversa.
- 2) Determinar el número de contratos sobre los que necesitamos abrir posiciones en contratos futuros. Esto lo podríamos llamar "ajuste por volumen".
- 3) Si el futuro está referido a una fecha diferente a la fecha del flujo, entonces las posibles pérdidas o ganancias que se generarían en nuestros flujos pueden ser diferentes a las posibles ganancias o pérdidas que se generaría con nuestra posición en futuros, por lo que es necesario que nuestra posición en futuros, además de ajustarse por volumen, se ajuste por la duración y convexidad monetarias de nuestros flujos.
- 4) Si los cambios no son pequeños desplazamientos paralelos sino cambios moderados, podrían cometerse errores graves de aproximación. Por lo anterior, es importante considerar las limitaciones de la convexidad de nuestros flujos y de nuestros futuros, así como reconocer la necesidad de rebalancear periódicamente las posiciones de los contratos a futuro a medida que cambian las tasas.

El método que se propone para inmunizar los flujos financieros es como sigue: se igualan la duración monetaria y la convexidad monetaria del portafolios combinado, flujos y futuros, a cero, de tal manera que los

cambios en el valor presente de los flujos por variaciones en la tasa de interés se compensen con los flujos generados por los contratos futuros. El sistema resultante contempla 2 ecuaciones con 2 incógnitas, digamos N_1 y N_2 , que representan el número de contratos a futuro sobre Cetes de dos series. Así pues, el sistema que se tiene que resolver está dado por:

$$\begin{aligned} D(T_1; F_{t,T_1,T_1+91}^{(n)})N_1 + D(T_2; F_{t,T_2,T_2+91}^{(n)})N_2 + D^{(n)}(f) &= 0 \\ C(T_1; F_{t,T_1,T_1+91}^{(n)})N_1 + C(T_2; F_{t,T_2,T_2+91}^{(n)})N_2 + C^{(n)}(f) &= 0 \end{aligned} \quad [2]$$

En este caso, se puede verificar rápidamente que las soluciones están dadas por:

$$N_1 = \frac{C^{(n)}(f)D(T_2; F_{t,T_2,T_2+91}^{(n)}) - D^{(n)}(f)C(T_2; F_{t,T_2,T_2+91}^{(n)})}{D(T_1; F_{t,T_1,T_1+91}^{(n)})C(T_2; F_{t,T_2,T_2+91}^{(n)}) - C(T_1; F_{t,T_1,T_1+91}^{(n)})D(T_2; F_{t,T_2,T_2+91}^{(n)})},$$

$$N_2 = \frac{C^{(n)}(f)D(T_1; F_{t,T_1,T_1+91}^{(n)}) - D^{(n)}(f)C(T_1; F_{t,T_1,T_1+91}^{(n)})}{D(T_1; F_{t,T_1,T_1+91}^{(n)})C(T_2; F_{t,T_2,T_2+91}^{(n)}) - C(T_1; F_{t,T_1,T_1+91}^{(n)})D(T_2; F_{t,T_2,T_2+91}^{(n)})}.$$

Obsérvese que N_1 y N_2 dependen de varios factores: 1) de los montos y fechas de los flujos de efectivo y 2) de los precios y vencimientos de los contratos futuros. Si $N_i > 0$, se genera una posición larga (posición de compra en contratos), en caso contrario se genera una posición corta (posición de venta en los contratos). El costo de la estrategia de inmunización se calcula multiplicando N_1 y N_2 por los correspondientes márgenes iniciales (aportaciones iniciales mínimas) y, en su caso, por el margen adicional (aportaciones excedentes) cuando la calidad crediticia del inversionista así lo requiera, considerando los *spreads* o posiciones opuestas que se generen.

Definición 1. Se dice que los contratos futuros $F = \{F_{t,T_1,T_1+91}^{(n)}, F_{t,T_2,T_2+91}^{(n)}\}$ con fechas de vencimiento T_1 y T_2 y fechas de plazo de inversión T_1+91 y T_2+91 , en cantidades N_1 y N_2 , inmunizan a f si $F = \{F_{t,T_1,T_1+91}^{(n)}, F_{t,T_2,T_2+91}^{(n)}\}$ y N_1 y N_2 satisfacen [2].

Es importante señalar algunas limitaciones del método. Primero, cuando un mercado dispone de tres o más series de futuros de tasas de interés, se obtendría un sistema de dos ecuaciones con tres o más incógnitas. Por tanto, existe un número infinito de estrategias de cobertura, de las cuales se pueden escoger algunas que cumplan con atributos deseables como es la liquidez de los futuros. Se podría incluir también como restricción el valor presente del portafolio (flujos y futuros) lo que permitiría considerar ternas de series de futuros de CETES en lugar de pares, ya que en este caso se contaría con un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Segundo, el método cubre de manera limitada contra cambios no moderados, siendo insuficiente la incorporación de la convexidad. El rebalanceo periódico de la estrategia permitirá una mejor protección ante el riesgo. El método supone liquidez infinita (efecto precio despreciable; en el sentido de que se mantienen las relaciones de arbitraje entre futuros y contado aunque se aumente el tamaño de la transacción) y supone además que se pueden vender futuros por cantidades divisibles. Sin embargo, es importante notar que la estandarización de los contratos, no permite tomar posiciones sobre nominales distintos a los múltiplos generados por el tamaño del contrato. Por último, vale la pena señalar que existen métodos alternativos para inmunizar riesgos de tasas de interés en flujos financieros que minimizan la convexidad.

Otros patrones de variación en la tasa de interés

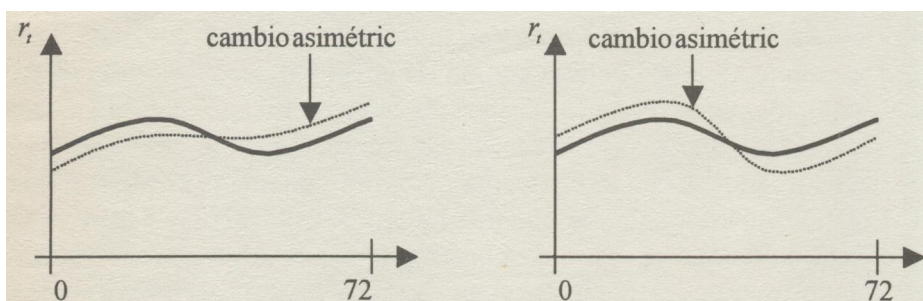
La duración proporciona una medida de sensibilidad en el valor presente por pequeños desplazamientos paralelos, a la alza o la baja, en la tasa de interés. Si los desplazamientos son moderados, la incorporación de la convexidad permite reducir errores de aproximación. Sin embargo, el comportamiento de la tasa de interés no siempre corresponde a cambios paralelos o de magnitud moderada. En la realidad se observan incremen-

tos en las tasas de corto plazo y disminuciones en las de largo plazo. Vamos a señalar algunos patrones de cambios no paralelos de las tasas de interés que se observan en el mercado.

1. **Cambios asimétricos.** En este caso, se tienen cambios en los plazos de 0 y 720 días de signos contrarios. Es decir, en el corto plazo se presenta una baja en la tasa de interés y en el largo plazo se presenta una alza y viceversa. Para aproximar plazos intermedios se interpola linealmente.

GRÁFICA 2.

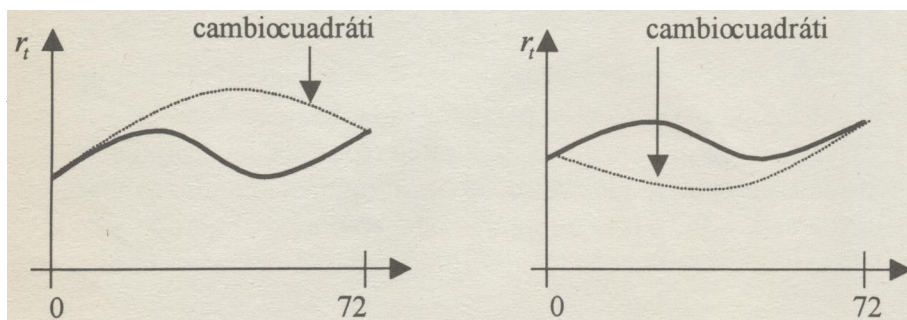
Cambios asimétricos en la estructura intertemporal en la tasa de interés



2. **Cambios cuadráticos.** No hay cambios en los plazos de 0 y 720 y el cambio absoluto máximo se presenta en un valor predeterminado. En este caso se genera un cambio en la convexidad del valor presente de los flujos de efectivo.

GRÁFICA 3.

Cambios cuadráticos en la estructura intertemporal en la tasa de interés



Dado que existe la posibilidad de observar esto u otros patrones de cambios en las tasas de interés, es importante que tengamos a la mano un método global de cobertura que elimine las limitaciones del método local. En la siguiente sección se analiza el método histórico para el análisis del valor en riesgo.

MÉTODO HISTÓRICO DE INMUNIZACIÓN DE FLUJOS FINANCIEROS (VALOR EN RIESGO)

Una vez que se han determinado las soluciones locales del problema de inmunización, éstas se evalúan en términos globales, es decir en términos de las variaciones de la tasa de interés en el escenario del último año. El supuesto básico en la evaluación de estrategias es que el futuro se comporte como en el pasado. En este caso, se genera la distribución conjunta del valor presente de los flujos financieros y de los flujos propios que producen los futuros. Se comparan las varianzas de las distribuciones empíricas de los flujos financieros con y sin futuros y se estiman pérdidas potenciales en términos del valor en riesgo para distintos niveles de probabilidad.

Distribución global del valor presente de un conjunto de flujos esperados

En esta sección llevaremos a cabo un análisis estadístico del comportamiento histórico de la curva intertemporal de tasas de descuento a fin de obtener la distribución del valor presente de un conjunto dado de flujos financieros. Considere, como antes, un conjunto de flujos esperados $f = \{f_1, f_2, \dots, f_l, \dots, f_m\}$, tanto de pasivos ($f_i < 0$) como de activos ($f_i > 0$), en fechas preestablecidas $t_1, t_2, \dots, t_l, \dots, t_m$. Suponga que se cuenta con un registro histórico de betas ordenado cronológicamente, $B = \{(\beta_0^{(j)}, \beta_1^{(j)}, \beta_2^{(j)}, \beta_3^{(j)})\}_{j=1}^n$.

El valor presente de los flujos financieros, f , con la tasa de descuento asociada al j -ésimo elemento de B está dado por:

$$V^{(j)}(f) = \sum_{l=1}^m f_l \left[1 - d_l^{(j)} \left(\frac{t_l}{360} \right) \right].$$

donde

$$d_l^{(j)} = \left(\beta_0^{(j)} + \beta_1^{(j)} \left(\frac{t_l}{360} \right) + \beta_2^{(j)} \left(\frac{t_l}{360} \right)^2 + \beta_3^{(j)} \left(\frac{t_l}{360} \right)^3 \right).$$

Si B es pensado como un conjunto de posibles escenarios (estados de la naturaleza), entonces $\{V^{(1)}(f), \dots, V^{(2)}(f), \dots, V^{(n)}(f)\}$ puede verse como una muestra proveniente de la distribución del valor presente de f , denotado por $V(f)$. La distribución empírica de $V(f)$ se define para cualquier $x \in (-\infty, \infty)$ como:

$$G_m(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < V_{(1)}(f), \\ \frac{k}{n}, & \text{si } V_{(k)}(f) \leq x < V_{(k+1)}(f) \quad (k = 1, 2, \dots, l, \dots, n-1), \\ 1, & \text{si } x \geq V_{(n)}(f), \end{cases}$$

donde $V_{(1)}(f), \dots, V_{(l)}(f), \dots, V_{(n)}(f)$ son las estadísticas de orden de la muestra $\{V^{(1)}(f), \dots, V^{(2)}(f), \dots, V^{(n)}(f)\}$, i.e., los valores muestrales ordenados en forma creciente. El percentil (o cuantil de orden p) de $V(f)$, denotado por x_p se define mediante

$$p \leq G_m(x_p) \leq p + \Pr_G\{V(f) = x_p\}.$$

La distribución empírica nos permite calcular la probabilidad de que el valor presente de nuestros flujos tome valores menores que un cierto percentil, lo cual es útil para establecer regiones de riesgo, con cier-

to nivel de confianza, en el contexto de la metodología del valor en riesgo. Es decir, bajo una distribución empírica estimamos el valor en riesgo (véase Jorion, 1995 y 1999) de nuestro portafolios (flujos de activos y pasivos) para variaciones diarias de tasas con un cierto nivel de confianza.

Distribución global del valor presente de un conjunto de flujos esperados cubiertos con futuros

Una vez que se han calculado el número de contratos futuros de dos series de Cetes, a 91 días, como soluciones locales, se determina la distribución del valor presente de un conjunto de flujos esperados incorporando futuros a fin de evaluar las soluciones globalmente y cuantificar el riesgo de este portafolios ampliado con la incorporación de estos contratos en nuestro portafolios. Considere un conjunto de flujos financieros, $f = \{ f_1, f_2, \dots, f_l, \dots, f_m \}$ en fechas preestablecidas $t_1, t_2, \dots, t_l, \dots, t_m$. Suponga que se cuenta con una muestra de betas, $B = \{ (\beta_0^{(j)}, \beta_1^{(j)}, \beta_2^{(j)}, \beta_3^{(j)}) \}_{j=1}^n$. El valor presente de los flujos financieros incluyendo los futuros, $F = \{ F_{t,T_1,T_1+91}^{(n)}, F_{t,T_2,T_2+91}^{(n)} \}$ con fechas de vencimiento T_1 y T_2 y fechas de plazo de inversión T_1+91 y T_2+91 , respectivamente, que inmunizan dicho flujos con la tasa de descuento asociada al j -ésimo elemento de B está dado por:

$$V^{(j)}(f, F) = \sum_{l=1}^m f_l \left[1 - d_t^{(j)} \left(\frac{t_l}{360} \right) \right] \\ + N_1 \left(M \left[1 - d_{T_1}^{(j)} \left(\frac{T_1 + 91}{360} \right) \right] - F_{t,T_1,T_1+91}^{(n)} \left[1 - d_{T_1}^{(j)} \left(\frac{T_1}{360} \right) \right] \right) \\ + N_2 \left(M \left[1 - d_{T_2}^{(j)} \left(\frac{T_2 + 91}{360} \right) \right] - F_{t,T_2,T_2+91}^{(n)} \left[1 - d_{T_2}^{(j)} \left(\frac{T_2}{360} \right) \right] \right).$$

donde

$$d_l^{(j)} = \left(\beta_0^{(j)} + \beta_1^{(j)} \left(\frac{t_l}{360} \right) + \beta_2^{(j)} \left(\frac{t_l}{360} \right)^2 + \beta_3^{(j)} \left(\frac{t_l}{360} \right)^3 \right).$$

Claramente, para $j = n$, se cumple que

$$V^{(n)}(f, F) = V^{(n)}(f) = \sum_{l=1}^m f_l \left[1 - d_l^{(n)} \left(\frac{t_l}{360} \right) \right].$$

ya que

$$M \left[1 - d_{T_1}^{(j)} \left(\frac{T_1 + 91}{360} \right) \right] - F_{t, T_1, T_1 + 91}^{(n)} \left[1 - d_{T_1}^{(j)} \left(\frac{T_1}{360} \right) \right] = 0,$$

$$M \left[1 - d_{T_2}^{(j)} \left(\frac{T_2 + 91}{360} \right) \right] - F_{t, T_2, T_2 + 91}^{(n)} \left[1 - d_{T_2}^{(j)} \left(\frac{T_2}{360} \right) \right] = 0.$$

En este caso, la distribución empírica de $V(f, F)$ se define para cualquier $z \in (-\infty, \infty)$ como:

$$H_m(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < V_{(1)}(f, F), \\ \frac{k}{n}, & \text{si } V_{(k)}(f, F) \leq z < V_{(k+1)}(f, F) \quad (k = 1, 2, \dots, l, \dots, n-1), \\ 1, & \text{si } z \geq V_{(n)}(f, F), \end{cases}$$

donde $V_{(1)}(f, F), \dots, V_{(l)}(f, F), \dots, V_{(n)}(f, F)$ son las estadísticas de orden de la muestra $\{V^{(1)}(f, F), \dots, V^{(j)}(f, F), \dots, V^{(n)}(f, F)\}$, i. e., son los

valores muestrales ordenados en forma creciente. El percentil (o cuantil de orden p) de $V(f, F)$, denotado por z_p se define mediante

$$p \leq H_m(z_p) \leq p + \Pr\{V(f, F) = z_p\}.$$

Nótese también que $V^{(j)}(f, F)$ se puede expresar como una función separable de flujos y futuros:

$$V^{(j)}(f, F) = V^{(j)}(f) + W^{(j)}(F)$$

donde

$$\begin{aligned} W^{(j)}(F) = & N_1 \left(M \left[1 - d_{T_1}^{(j)} \left(\frac{T_1 + 91}{360} \right) \right] - F_{t, T_1, T_1 + 91}^{(n)} \left[1 - d_{T_1}^{(j)} \left(\frac{T_1}{360} \right) \right] \right) \\ & + N_2 \left(M \left[1 - d_{T_2}^{(j)} \left(\frac{T_2 + 91}{360} \right) \right] - F_{t, T_2, T_2 + 91}^{(n)} \left[1 - d_{T_2}^{(j)} \left(\frac{T_2}{360} \right) \right] \right). \end{aligned}$$

Si $\bar{V}(f, F)$ y $\bar{V}(f)$ son las medias muestrales de $V^{(j)}(f, F)$ y $V^{(j)}(f)$, $j = 1, 2, \dots, n$, respectivamente, entonces $\bar{W}(F) = \bar{V}(f, F) - \bar{V}(f)$ y

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n [V^{(j)}(f, F) - \bar{V}(f, F)]^2 &= \sum_{j=1}^n [V^{(j)}(f) - \bar{V}(f)]^2 + \sum_{j=1}^n [W^{(j)}(F) - \bar{W}(F)]^2 \\ &+ 2 \sum_{j=1}^n [V^{(j)}(f) - \bar{V}(f)] [W^{(j)}(F) - \bar{W}(F)]. \end{aligned}$$

Equivalentemente, en términos de las varianzas muestrales

$$S^2_{V(f, F)} = S^2_{V(f)} + S^2_{W(F)} + 2 \sum_{j=1}^n [V^{(j)}(f) - \bar{V}(f)] [W^{(j)}(F) - \bar{W}(F)].$$

Podemos resumir el procedimiento antes descrito a través de la siguiente:

Proposición 1. $S^2_{V(f,F)} \leq (\geq) S^2_{V(f)}$ si y sólo si

$$S^2_{W(F)} + \sum_{j=1}^n [V^{(j)}(f) - \bar{V}(f)] [W^{(j)}(F) - \bar{W}(F)] \leq (\geq) 0.$$

La siguiente definición es fundamental en la inmunización de flujos financieros:

Definición 2. Un par de futuros $F = \{F_{t,T_1,T_1+91}^{(n)}, F_{t,T_2,T_2+91}^{(n)}\}$ que inmunizan un conjunto de flujos financieros f se dice que reduce la varianza de $V(f)$ si

$$S^2_{W(F)} + \sum_{j=1}^n [V^{(j)}(f) - \bar{V}(f)] [W^{(j)}(F) - \bar{W}(F)] \leq 0.$$

Proposición 2. Suponga que $F = \{F_{t,T_1,T_1+91}^{(n)}, F_{t,T_2,T_2+91}^{(n)}\}$ inmunizan un flujo f . Si F satisface

$$S^2_{W(F)} + \sum_{j=1}^n V^{(j)}(f) W^{(j)}(F) + n \bar{V}(f) \bar{W}(F) \leq \bar{W}(F) \sum_{j=1}^n V^{(j)}(f) + \bar{V}(f) \sum_{j=1}^n W^{(j)}(F),$$

entonces F reduce la varianza de $V(f)$.

Es importante observar que no siempre existe un par $F = \{F_{t,T_1,T_1+91}^{(n)}, F_{t,T_2,T_2+91}^{(n)}\}$ que reduzca la varianza. Como puede observarse la existencia depende de los montos y fechas de los flujos, de los precios, del tamaño y fechas de vencimiento de los futuros y del tamaño de la muestra. Sin embargo, dado que el número de pares $F = \{F_{t,T_1,T_1+91}^{(n)}, F_{t,T_2,T_2+91}^{(n)}\}$ es finito, si existe por lo menos un par que reduzca la varianza entonces se puede determinar un par de varianza

mínima. Nótese también que $\bar{V}(f, F)$ y $\bar{V}(f)$ no son, en general, iguales y que un par F puede aumentar o disminuir a $\bar{V}(f, F)$ con respecto a $\bar{V}(f)$.

Existe un caso trivial, de poco interés práctico, en el que $S^2_{V(f, F)} = 0$, el cual se presenta si se eligen los siguientes flujos de efectivo:

$$\begin{aligned} f_1 &= N_1 F_{t, T_1, T_1+91}^{(n)} \text{ en } T_1, & f_2 &= -N_1 M \text{ en } T_1 + 91, \\ f_3 &= N_2 F_{t, T_2, T_2+91}^{(n)} \text{ en } T_2, & f_4 &= -N_2 M \text{ en } T_2 + 91. \end{aligned}$$

Claramente, si los flujos difieren de estas cantidades, entonces $S^2_{V(f, F)} > 0$. Incluso, si las fechas de vencimiento de los futuros están muy alejadas de las fechas de los flujos puede obtenerse que $S^2_{V(f, F)} > S^2_{V(f)}$. En este caso, aunque $F = \{F_{t, T_1, T_1+91}^{(n)}, F_{t, T_2, T_2+91}^{(n)}\}$ inmune los flujos de efectivo, f , la varianza de los mismos aumenta, en cuyo caso es necesario rebalancear periódicamente el portafolio. Otra posibilidad consiste en partir el horizonte de planeación y aplicar el método en los tramos obtenidos. Es decir, tratar de cubrir los flujos planeados en intervalos de tiempo en función de la disponibilidad de vencimientos de futuros. Sin embargo, no siempre es posible reducir la varianza en cada tramo.

EXTENSIÓN DEL MODELO CON VALORES REZAGADOS EN LA TASA DE DESCUENTO

Uno de los paradigmas más utilizados en la medición de riesgos de mercado es el de Valor en Riesgo (VeR); véase Jorion (1999). En esta metodología se genera la distribución de pérdidas potenciales, la cual se utiliza para estimar intervalos de confianza de posibles pérdidas con cierto grado de confianza estadística y en un plazo determinado. En esta sección, estamos interesados en analizar potenciales pérdidas en el valor presente de un conjunto de flujos de efectivo a través de los valores históricos de las variaciones diarias en la tasa de descuento.

Considere, como antes, un conjunto de flujos esperados $f = \{f_1, f_2, \dots, f_l, \dots, f_m\}$ en fechas preestablecidas $t_1, t_2, \dots, t_l, \dots, t_m$. Suponga que se cuenta con un registro histórico de betas ordenadas cronológicamente, $B = \{(\beta_0^{(j)}, \beta_1^{(j)}, \beta_2^{(j)}, \beta_3^{(j)})\}_{j=1}^n$. Se define

$$q'_{\tau+i,l} = q_{n,l} + v_{\tau+i,l}, \quad \tau > 0, \quad i \geq 1,$$

donde

$$v_{\tau+i,l} = q_{\tau+i,l} - q_{i,l}$$

y

$$q_{\tau+i,l} = 1 - d_L^{\tau+i} \left(\frac{t_l}{360} \right).$$

En este caso el valor presente de los flujos financieros, f , con la tasa de descuento $q'_{\tau+i,l}$ está dado por

$$V^{(\tau+i)}(f) = \sum_{l=1}^m f_l q'_{\tau+i,l}.$$

A partir de aquí, se procede en forma similar a la metodología antes planteada pero considerando ahora los valores $V^{(j)}(f)$, $j = \tau + 1, \tau + 2, \dots, n - 1$.

APLICACIÓN DEL MÉTODO

A continuación se ilustra el método propuesto de inmunización global para un conjunto de flujos de efectivo. Los objetivos específicos de este ejercicio son: 1) evaluar el riesgo a partir de métodos locales (para cambios pequeños en tasas de interés); 2) evaluar la robustez de las estrategias obtenidas en términos del comportamiento histórico de la tasa de interés 3) analizar cómo cambios (paralelos, asimétricos y cuadráticos) en la tasa de interés afectan adversamente el valor presente de los flujos;

4) presentar varias estrategias con futuros que inmunizan los riesgos de un conjunto de flujos y conocer las peculiaridades de cada estrategia en términos de sus costos (aportaciones requeridas), y 5) evaluar las distintas estrategias con el fin de seleccionar la más adecuada para cubrir los flujos de efectivo.

En el siguiente ejercicio, a partir de un registro histórico de la estructura de plazos de la tasa de descuento de Cetes se genera la distribución del valor presente de los flujos financieros. La muestra de vectores de betas que se consideró para este ejercicio tiene tamaño $n = 252$ (de enero de 1999 a enero del 2000). Posteriormente, con referencia al vector de betas más reciente se determinan la duración y convexidad monetarias del valor presente de dichos flujos y se calculan las cantidades de contratos futuros que inmunizan dicho flujo, las cuales son soluciones locales. Estas cantidades y los precios de los futuros se utilizan para generar la distribución conjunta de los flujos financieros y de los flujos propios de los futuros, tanto para el método propuesto como para su extensión a variaciones de mercado en la tasa de descuento. Se comparan las varianzas de las distribuciones empíricas de los flujos financieros con y sin futuros para ambos métodos con el fin de analizar el efecto que en términos de reducción de riesgos tiene la incorporación de futuros en nuestro portafolio de activos y pasivos. En la cuadro 1 se presenta un conjunto de flujos dados y las fechas en que ocurren. En el cuadro 2 se listan las estrategias con base a las fechas (hipotéticas) de vencimiento de los contratos futuros. Si el número de contratos es positivo, se genera una posición larga (posición de compra), en caso contrario se genera una posición corta (posición de venta). En el cuadro 3, se presentan las características de cada estrategia en términos de la varianza y del valor en riesgo.

CUADRO 1.
Flujos de efectivo y fechas

	Monto	Fecha
f_1	\$1 000 000.00	30-Ene-00
f_2	-\$950 000.00	29-Feb-00
f_3	\$1 000 000.00	04-Mar-00
f_4	-\$950 000.00	04-Abr-00

CUADRO 2.
Estrategias locales de inmunización

	VENCIMIENTO				
	19-Ene-00	16-Feb-00	15-Mar-00	21-Jun-00	20-Dic-00
Estrategia 1	-3.85	22.02	0.00	0.00	0.00
Estrategia 2	6.37	0.00	11.89	0.00	0.00
Estrategia 3	12.86	0.00	0.00	5.61	0.00
Estrategia 4	14.92	0.00	0.00	0.00	3.38
Estrategia 5	0.00	13.73	4.47	0.00	0.00
Estrategia 6	0.00	16.95	0.00	1.29	0.00
Estrategia 7	0.00	17.51	0.00	0.00	0.69
Estrategia 8	0.00	0.00	23.55	-5.50	0.00
Estrategia 9	0.00	0.00	20.75	0.00	-2.52
Estrategia 10	0.00	0.00	0.00	40.68	-21.13

Como puede observarse, en los cuadros 1 y 2, las fechas de los flujos de efectivo no coinciden con las fechas de vencimiento de las series de Cetes. Después de igualar la duración monetaria y la convexidad monetarias de dos series de futuros de Cetes con la duración monetaria y la convexidad monetarias de los flujos financieros (salvo el cambio en el signo) se obtienen las cantidades de contratos que inmunizan los flujos.

El cuadro 3 muestra los resultados del método histórico. Obsérvese que para la estrategia 5 con fechas de vencimiento $T_1 = 16\text{-feb-00}$ y $T_2 = 16\text{-mar-00}$ se tiene una reducción en la varianza al incluir futuros, de hecho se obtiene la mínima varianza. Sin embargo, para fechas de vencimiento lejanas a las de los flujos la varianza de los flujos con futuros aumenta. Obsérvese que el par de series de la estrategia 10, con $T_1 = 21\text{-jun-00}$ y $T_2 = 20\text{-dic-00}$, aumenta la varianza en forma significa-

tiva. En la sección 2, se demostró que siempre es posible encontrar un par de series de futuros de Cetes que inmunicen a un conjunto de flujos financieros f . Sin embargo, no siempre este par reduce la varianza de los flujos. Todas las estrategias, los pares de futuros determinados, inmunican el valor presente de los flujos ante desplazamientos pequeños y moderados en la estructura de tasas de interés. Algunas estrategias reducen la varianza y los valores en riesgo más que otros. En casos extremos, un par de futuros podría incluso incrementar la varianza y los valores en riesgo para la distribución global. Toda estrategia requiere de rebalanceo y algunas son más sensibles a los cambios en tasas de interés y a las fechas de vencimiento de las series.

CUADRO 3.
Características de las estrategias

Estrategias	Desviación Estándar		Valor en Riesgo: Método Histórico		Valor en Riesgo: Variaciones 22 días	
	5 752.29	4 702.32	-6 887.07	-5 797.64	-10 480.26	-3 560.92
1	252.57	24 588.06	-1 548.50	-120.27	-965.55	166.42
2	569.58	40 744.10	-1 262.60	-544.90	-3 034.83	-1 778.92
3	3 964.77	82 390.82	-9 814.06	-3 903.22	-15 595.32	-7 021.45
4	9 255.66	96 083.03	-25 679.59	-9 909.40	-33 516.35	-13 932.39
5	56.89	72.53	-128.43	-54.90	-195.64	-69.37
6	718.07	909.71	-1 828.70	-712.82	-2 420.29	-910.14
7	1 698.05	2 149.87	-4 753.13	-1 833.29	-5 660.76	-2 058.92
8	2 763.39	3 498.70	-16 703.02	-1 369.17	-17 191.79	-4 993.42
9	5 916.93	7 490.64	-33 941.47	-3 061.32	-35 485.43	-10 114.89
10	29 491.65	3 408.16	-161 299.09	-15 571.35	-169 641.38	-50 652.95

En el cuadro 4 se muestran los costos de cobertura de cada una de las estrategias en términos de los márgenes ordinarios y adicionales (aportaciones iniciales mínimas y aportaciones excedentes). En el cuadro 5, se seleccionan dos estrategias, la 5 y la 10, y se comparan las pérdidas potenciales en el valor presente sin y con los futuros para diferentes niveles de confianza.

CUADRO 4.
Costos de la cobertura

Estrategias	Total de Contratos	AIM's y AE's
1	25.87	10 255.58
2	18.26	8 216.36
3	18.47	8 312.79
4	18.30	8 235.19
5	18.21	8 193.08
6	18.24	8 209.81
7	18.20	8 190.54
8	29.05	11 093.41
9	23.26	9 562.00
10	61.82	20 209.94

Cuadro 5.
Pérdidas potenciales sin y con cobertura (estrategias 5 y 10)

Sin futuros		Pérdida con respecto al valor presente esperado	
		Método histórico	Variaciones 22 días
VaR: Probabilidad	10.00%	-5 038.59	-1 937.01
	5.00%	-5 797.64	-3 560.92
	1.00%	-6 887.07	-10 480.26
	0.50%	1.00	1.00

Estrategia 5		Pérdida con respecto al valor presente esperado	
		Método histórico	Cambio en 22 días
VaR: Probabilidad	10.00%	-36.34	-25.66
	5.00%	-54.90	-69.37
	1.00%	-128.43	-195.64
	0.50%	-150.01	-314.37

Estrategia 10		Pérdida con respecto al valor presente esperado	
		Método histórico	Cambio en 22 días
VaR: Probabilidad	10.00%	-7 708.89	-15 383.52
	5.00%	-15 571.35	-50 652.95
	1.00%	-161 299.09	-169 641.38
	0.50%	-170 768.72	-173 852.14

En el cuadro 6, se presentan los cambios en el valor presente por cambios en el comportamiento de la tasa de interés. Varios casos son analizados: 1) cambios paralelos en la estructura intertemporal de tasas de interés; 2) cambios asimétricos en los plazos cero y 720 días con valores indicados. A plazos intermedios se interpola linealmente; 3) cambio cuadrático sin modificaciones en los plazos cero y 720 días con cambio máximo en valor indicado. Asimismo, se lleva a cabo un análisis de casos catastróficos con variaciones de 1 000 a 5 000 puntos base. Los cuadros 7 y 8 presentan el mismo análisis para las estrategias 5 y 10.

CUADRO 6.

Análisis local sin futuros: diagnóstico de cambios en el valor presente de los flujos financieros

Cambio en tasa. Puntos Base	Cambio paralelo en la estructura intertemporal de tasas de interés.		Cambio no paralelo. Cambio a plazo cero y 720 días con valor indicado. A plazos intermedios se interpola linealmente.		Cambio no paralelo. Sin cambio a plazo 0 y 720 días. Relación cuadrática con cambio máximo con valor indicado.	
	Sube plazo corto	Baja plazo corto	Baja plazo corto	Sube plazo corto	Aumenta convexidad	Disminuye convexidad
	Sube plazo largo	Baja plazo largo	Sube plazo largo	Baja plazo largo	Suben tasas en plazos medios. Se mantienen en plazos extremos.	Bajan tasas en plazos medios. Se mantienen en plazos extremos.
Valor Presente Aumenta	Valor Presen- te Disminuye	Valor Presen- te Disminuye	Valor Presen- te Disminuye	Valor Presen- te Aumenta	Valor Presente Aumenta	Valor Presente Disminuye
100.00	1 220.95	-1 230.25	-979.55	972.92	842.32	-844.77
50.00	611.63	-613.96	-488.94	487.28	421.46	-422.08
10.00	122.51	-122.61	-97.66	97.59	84.34	-84.37
5.00	61.27	-61.29	-48.82	48.80	42.17	-42.18
1.00	12.26	-12.26	-9.76	9.76	8.44	-8.44
5 000.00	51 137.72	-74 862.25	-58 290.74	41 472.58	39 291.68	-45 456.71
4 000.00	42 361.14	-57 436.18	-44 946.86	34 241.85	31 872.50	-35 812.43
3 000.00	32 918.58	-41 351.28	-32 514.01	26 517.87	24 241.89	-26 455.61
2 000.00	22 753.62	-26 486.70	-20 920.68	18 263.75	16 391.89	-17 374.98
1 000.00	11 803.85	-12 734.91	-10 102.21	9 439.18	8 314.17	-8 559.83

CUADRO 7.

Análisis local para la estrategia 5: diagnóstico de cambios en el valor presente de los flujos financieros

Cambio en tasa. Puntos base	Cambio paralelo en la estructura intertemporal de tasas de interés.		Cambio no paralelo. Cambio a plazo cero y 720 días con valor indicado. A plazos intermedios se interpola linealmente.		Cambio no paralelo. Sin cambio a plazo 0 y 720 días. Relación cuadrática con cambio máximo con valor indicado.	
	Sube plazo corto	Baja plazo corto	Baja plazo corto	Sube plazo corto	Aumenta convexidad	Disminuye convexidad
	Sube plazo largo	Baja plazo largo	Sube plazo largo	Baja plazo largo	Suben tasas en plazos medios. Se mantienen en plazos extremos.	Bajan tasas en plazos medios. Se mantienen en plazos extremos.
	Valor presente aumenta	Valor presente disminuye	Valor presente disminuye	Valor presente aumenta	Valor presente aumenta	Valor presente disminuye
100.00	0.00	0.00	-0.28	0.24	1.33	-1.28
50.00	0.00	0.00	-0.14	0.13	0.66	-0.65
10.00	0.00	0.00	-0.03	0.03	0.13	-0.13
5.00	0.00	0.00	-0.01	0.01	0.07	-0.07
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	-0.01
5 000.00	-21.76	30.02	-46.52	-48.85	119.72	-6.34
4 000.00	-11.49	14.85	-34.33	-27.89	87.30	-14.88
3 000.00	-5.00	6.06	-22.56	-12.95	59.04	-18.37
2 000.00	-1.53	1.74	-12.31	-3.64	35.01	-16.95
1 000.00	-0.20	0.21	-4.51	0.50	15.30	-10.79

CUADRO 8.

Análisis local para la estrategia 10: diagnóstico de cambios en el valor presente de los flujos financieros

	Cambio paralelo en la estructura intertemporal de tasas de interés.		Cambio no paralelo. Cambio a plazo cero y 720 días con valor indicado. A plazos intermedios se interpola linealmente.		Cambio no paralelo. Sin cambio a plazo 0 y 720 días. Relación cuadrática con cambio máximo con valor indicado.	
	Sube plazo corto	Baja plazo corto	Baja plazo corto	Sube plazo corto	Aumenta convexidad	Disminuye convexidad
	Sube plazo largo	Baja plazo largo	Sube plazo largo	Baja plazo largo	Suben tasas en plazos medios. Se mantienen en plazos extremos.	Bajan tasas en plazos medios. Se mantienen en plazos extremos.
Cambio en tasa. Puntos base	Valor presente aumenta	Valor presente disminuye	Valor presente disminuye	Valor presente aumenta	Valor presente aumenta	Valor presente disminuye
100.00	0.07	-0.07	65.37	-57.47	-1 202.33	1 214.02
50.00	0.01	-0.01	31.68	-29.71	-602.65	605.57
10.00	0.00	0.00	6.18	-6.10	-120.77	120.88
5.00	0.00	0.00	3.08	-3.06	-60.40	60.43
1.00	0.00	0.00	0.61	-0.61	-12.08	12.08
5 000.00	3 518.04	-28 442.09	17 961.60	3 886.61	-43 226.33	46 987.44
4 000.00	2 101.51	-10 852.39	11 181.89	2 300.52	-37 333.31	46 992.87
3 000.00	1 042.60	-3 513.67	6 350.37	1 021.74	-30 123.76	38 069.15
2 000.00	366.54	-817.86	3 073.90	137.03	-21 508.88	25 712.11
1 000.00	54.92	-81.86	1 040.25	-247.20	-11 448.36	12 589.22

Los cuadros 9 y 10, que a continuación se presentan, muestran las distribuciones completas para el análisis del valor en riesgo de las estrategias 5 y 10.

CUADRO 9.

Distribución completa para el análisis del valor en riesgo de la estrategia 5

	Metodo histórico con tasas en fechas indi- cadas con futuros		Metodo histórico con tasas en fechas indicadas sin futuros		Método de variaciones de 22 días		Método de variaciones de 22 días	
Media	132 777.94		134 247.03		132,787.28		133 840.67	
Desvia- ción estándar	56.89		5 752.29		72.53		4 702.32	
	Valor presente	Cambio respecto a base	Valor presente	Cambio respecto a base	Valor presente	Cambio respecto a base	Valor presente	Cambio respecto a base
Máximo	133 173.69	390.25	158 217.35	25 433.91	133 160.40	376.96	153 842.06	21 058.62
99.50%	133 148.84	365.40	155 553.23	22 769.79	133 153.55	370.11	153 047.38	20 263.94
99.00%	133 131.66	348.22	154 888.24	22 104.80	133 141.94	358.50	152 155.06	19 371.62
95.00%	132 809.56	26.11	146 228.60	13 445.16	132 881.69	98.25	141 848.73	9 065.29
90.00%	132 795.96	12.52	143 889.50	11 106.06	132 812.78	29.34	139 258.03	6 474.59
80.00%	132 784.26	0.81	136 152.49	3 369.05	132 790.05	6.61	134 798.82	2 015.38
70.00%	132 781.08	-2.36	134 408.43	1 624.99	132 783.44	0.00	132 783.44	0.00
60.00%	132 778.21	-5.23	133 769.28	985.84	132 783.44	0.00	132 783.44	0.00
50.00%	132 775.24	-8.20	133 267.00	483.56	132 783.44	0.00	132 783.44	0.00
40.00%	132 770.95	-12.49	132 786.40	2.96	132 783.44	0.00	132 783.44	0.00
30.00%	132 767.99	-15.45	132 258.81	-524.63	132 783.44	0.00	132 783.44	0.00
20.00%	132 761.67	-21.77	130 905.31	-1 878.13	132 775.65	-7.79	132 646.20	-137.24
10.00%	132 747.10	-36.34	127 744.85	-5 038.59	132 757.78	-25.66	130 846.44	-1 937.01
5.00%	132 728.54	-54.90	126 985.80	-5 797.64	132 714.07	-69.37	129 222.52	-3 560.92
1.00%	132 655.01	-128.43	125 896.37	-6 887.07	132 587.80	-195.64	122 303.18	-10 480.26
0.50%	132 633.43	-150.01	124 620.90	-8 162.54	132 469.07	-314.37	120 705.88	-12 077.56
Mínimo	132 594.69	-188.75	117 308.56	-15 474.88	132 423.01	-360.43	118 114.00	-14 669.44

CUADRO 10.

Distribución completa para el análisis del valor en riesgo de la estrategia 10

	Metodo histórico con tasas en fechas indicadas con futuros		Metodo histórico con tasas en fechas indica- das sin futuros		Método de variaciones de 22 con futuros		Método de variaciones de 22 sin futuros	
Media	137 129.18		134 247.03		130 935.97		133 840.67	
Desvia- ción estándar	29 491.65		5 752.29		37 408.16		4 702.32	
	Valor presente	Cambio respecto a base	Valor presente	Cambio respecto a base	Valor presente	Cambio respecto a base	Valor presente	Cambio respecto a base
Máximo	295 354.30	162,570.86	158,217.35	25,433.91	296,426.20	163,642.76	153,842.06	21,058.62
99.50%	226 953.47	94,170.03	155,553.23	22,769.79	284,256.48	151,473.04	153,047.38	20,263.94
99.00%	218 849.73	86 066.29	154 888.24	22 104.80	246 695.63	113 912.19	152 155.06	19 371.62
95.00%	166 056.95	33 273.51	146 228.60	13 445.16	166 050.44	33 267.00	141 848.73	9 065.29
90.00%	151 195.73	18 412.29	143 889.50	11 106.06	147 191.21	14 407.77	139 258.03	6 474.59
80.00%	146 333.50	13 550.06	136 152.49	3 369.05	138 182.18	5 398.74	134 798.82	2 015.38
70.00%	142 523.02	9 739.58	134 408.43	1 624.99	132 783.44	0.00	132 783.44	0.00
60.00%	140 420.68	7 637.24	133 769.28	985.84	132 783.44	0.00	132 783.44	0.00
50.00%	138 315.38	5 531.94	133 267.00	483.56	132 783.44	0.00	132 783.44	0.00
40.00%	135 958.29	3 174.85	132 786.40	2.96	132 783.44	0.00	132 783.44	0.00
30.00%	133 911.79	1 128.35	132 258.81	-524.63	132 783.44	0.00	132 783.44	0.00
20.00%	131 917.90	-865.54	130 905.31	-1 878.13	129 006.23	-3 777.21	132 646.20	-137.24
10.00%	125 074.55	-7 708.89	127 744.85	-5 038.59	117 399.92	-15 383.52	130 846.44	-1 937.01
5.00%	117 212.09	-15 571.35	126 985.80	-5 797.64	82 130.49	-50 652.95	129 222.52	-3 560.92
1.00%	-28 515.65	-161 299.09	125 896.37	-6 887.07	-36 857.94	-169 641.38	122 303.18	-10 480.26
0.50%	-37 985.28	-170 768.72	124 620.90	-8 162.54	-41 068.70	-173 852.14	120 705.88	-12 077.56
Mínimo	-47 335.80	-180 119.24	117 308.56	-15 474.88	-46 636.96	-179 420.40	118 114.00	-14 669.44

Así pues, por ejemplo, con u valor en riesgo del 0.5% hay una reducción de \$180 119.22 en el valor presente respecto a la base en el método histórico con futuros y una reducción de \$15 474.88 en el valor presente respecto a la base en el método de variaciones con razagos.

RESUMEN Y CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo de inmunización contra fluctuaciones adversas en la tasa de interés con futuros financieros. A partir de un registro histórico de la estructura de plazos de la tasa de interés de Cetes, se generaron las distribuciones empíricas de un flujo financiero dado, con y sin inmunización con futuros, a fin de comparar los efectos en la varianza de dichos flujos antes y después de la cobertura. Asimismo, se ha presentado una extensión del modelo en donde a la tasa de descuento más reciente se le han incorporado variaciones de valores rezagados en la tasa de descuento. Los conceptos fundamentales de duración y convexidad monetarias desempeñaron un papel importante en el desarrollo del modelo en cuanto a la medición y el control del riesgo en tasas de interés. El modelo propuesto puede ser también aplicado a futuros de TIE con mínimas modificaciones.

Siempre es posible encontrar un par de series de futuros de Cetes que inmunicen a un conjunto de flujos financieros f . Sin embargo, no siempre este par reduce la varianza de los flujos. En este caso, se logra la inmunización local pero es necesario el rebalanceo frecuente de las posiciones en futuros. Este trabajo proporciona las condiciones necesarias y suficientes para que un par de series de futuros de Cetes que además de inmunizar al portafolios reduzcan la varianza. Este problema es equivalente a uno de programación entera en donde se tiene un conjunto de puntos factibles sin restricción en el signo (pares de series) y se desea encontrar aquél que minimice la dispersión. Sin embargo este problema podría no tener solución. Más investigación se necesita para extender el conjunto factible con otros instrumentos de cobertura a fin de que el problema de programación entera sin restricciones en el signo de dispersión mínima tenga solución. Finalmente, a manera de ilustración, los modelos fueron aplicados en la cobertura de los flujos financieros hipotéticos de una tesorería.

BIBLIOGRAFÍA

- Beckstrom, R. O., and A. Campbell, *An Introduction to VAR*, CATS software, Palo Alto, CA, 1995.
- Bierwarg, G. O., "Immunization, Duration and the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 12, 1977, pp. 725-743.
- Bierwarg, G. O., *Duration Analysis: Managing Interest Rate Risk*, Cambridge, MA: Ballinger, 1987.
- Bierwarg, G. O., G. G. Kaufman, and C. Khang (1978), "Duration and Bond Portfolio Analysis: An Overview", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 13, núm. 4, pp. 671-681.
- Bierwarg, G. O., G. G. Kaufman, and A. Toevs, "Duration: Its Development and Uses in Bond Portfolio Management: An Overview", *Financial Analysts Journal*, vol. 39, núm. 4, 1983a, pp. 15-35.
- , *Innovations in Bond Portfolio Management*, Greenwich, CT: JAI Press, 1983b.
- Bolsa Mexicana de Valores, *Metodologías para la valuación de instrumentos de deuda y capitales*, 1999.
- Chance, D. M., "Default, Risk and the Duration of the Zero Coupon Bonds", *Journal of Finance*, vol. 55, 1990, pp. 265-274.
- Chua, J. H., "A Closed-Form Formula for Calculating Bond Duration", *Financial Analysts Journal*, vol. 40, núm. 3, 1984, pp. 76-78.
- Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross, "Duration and the Measurement of Basis Risk", *Journal of Business*, vol. 52, 1979, pp. 51-61.
- Díaz Tinoco, J., "Riesgo en Instrumentos de Deuda y Futuros sobre Tasa de Interés", *Derivados Financieros. Teoría y Práctica*, H. Sabau García y G. Roa Béjar eds, Operadora de Bolsa Serfin, 1997, pp. 194-200.
- Díaz Tinoco J. y F. Hernández Trillo, *Futuros y Opciones Financieras: Una Introducción*, Limusa-BMV, 1996.
- Fabozzi, F. J. and I. M. Pollack, *The Handbook of Fixed Income Securities*, Dow-Jones, Irwin, 1987c.

- Fabozzi, F. J., *Advanced Strategies in Risk Management Fixed Income Securities*, Mc Millan, 1994.
- Granito, *Bond Portfolio Immunization*, Lexington Books, D. C. Heath and Company, 1984.
- Ingersoll, J. E., J. Skelton, and R. L. Weil, "Duration Forty Years Later", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 13, núm. 4, 1978, pp. 627-650.
- Kupiec, P., "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models", *Journal of Derivatives*, núm. 2, 1995, pp. 73-84.
- Jorion, P., *Valor en Riesgo*, Editorial Limusa, S.A. de C.V., Grupo Noriega Editores, 1999.
- , "Risk 2; Measuring the Risk in Value-At-Risk", *Financial Analysts Journal*, in press., 1989.
- Kolb, R. W., *Practical Reading in Financial Derivatives*, Robert W. Kolb ed., Blackwell publishers Ltd, 1998.
- Platt, R. B., *Controlling Interest Rate Risk: New Techniques and Applications for Money Management*, John Wiley & Sons, 1986.
- Schaefer, S., *Immunization and Duration: A Review of Theory, Performance and Applications*, Reprinted in J. M. Stern and D. H. Chew Jr. eds, *The Revolution in Corporate Finance*, New York: Basil Blackwell, 1986.
- Zenios, S. A., *Financial Optimization*, Stavros A. Zenios ed., Cambridge University Press, 1996.