

CRECIMIENTO EN ECONOMÍAS MONETARIAS. REVISIÓN DE ALGUNOS RESULTADOS CENTRALES

RAMÓN TIRADO JIMÉNEZ*

“El dinero es el gran prestidigitador”
Octavio Paz. *Entre la Piedra y la Flor* (1937)

INTRODUCCIÓN

Hay un ámbito de investigación en la teoría del crecimiento económico poco conocido, lo cual no significa que se haya dejado de escribir sobre él: me refiero al de la teoría del crecimiento en que se incluye el dinero.

Manuscrito recibido en julio de 1998; versión final, noviembre de 1998.

* Profesor-investigador de la Universidad Autónoma Metropolitana-Xochimilco. Departamento de Producción Económica y Maestría en Economía y Gestión del Cambio Tecnológico. Calz. del Hueso 1100, Col. Villa Quietud. Teléfonos: 57-24-51-00 y 57-24-51-01. E-mail: rtirado@cueyatl.uam.mx. Agradezco los útiles comentarios y sugerencias hechos a versiones preliminares del presente artículo de Carlo Benetti, Etelberto Ortiz y Martín Puchet, así como de dos dictaminadores anónimos. En cualquier caso, la responsabilidad por lo planteado en este artículo es exclusiva del autor.

Los grandes avances en el estudio del desempeño de largo plazo del sistema económico se han concentrado en el lado real. Desde los trabajos de Harrod (1939), atravesando por los aportes de Solow (1956) hasta la moderna teoría del crecimiento endógeno, la investigación teórica y empírica se ha orientado al análisis de los datos reales que explican tal proceso: la acumulación de capital físico y humano, el cambio tecnológico, la inversión pública, las externalidades que resultan de la difusión del conocimiento, o la existencia de rendimientos crecientes aparecen, de un modo u otro, como las causas que lo determinan, según la investigación realizada hasta ahora. El tema de la presencia del dinero no aparece.

Pero el estudio del crecimiento en economías monetarias puede ser importante al menos por una causa: es una guía inicial sobre los efectos de la actividad del banco central –el cual, por supuesto, tiene el monopolio de la emisión de dinero– en las condiciones de equilibrio estacionario de las variables reales fundamentales. En otras palabras, el problema es responder a la siguiente pregunta: ¿la política monetaria puede alterar las condiciones de equilibrio estacionario correspondiente a determinadas variables que describen el comportamiento del lado real de la economía?

Si se responde afirmativamente, entonces tenemos que el dinero no es neutral y, con más precisión, en la teoría del crecimiento interesa evaluar si la tasa de crecimiento del acervo de dinero afecta al lado real de la economía, en tal caso, *no es superneutral*. Resta después evaluar en qué sentido se afecta a las variables reales.

Pero si se responde negativamente a lo anterior, la moneda es *superneutral* debido a que en el largo plazo no afecta las condiciones de equilibrio estacionario correspondiente a las variables reales.

En la respuesta, afirmativa o negativa, a la pregunta anterior reside el debate dentro del ámbito de la teoría del crecimiento con dinero. Por supuesto que el interés del tema podría trascender el planteamiento de los párrafos anteriores, sin embargo, y como se verá más adelante, las condiciones de la discusión actual se concentran en ese tópico.

Y el debate comenzó de forma paradójica. Tobin (1955) buscaba un fundamento analítico con el cual responder al trabajo de Harrod (1939). De la contribución de Harrod se desprende que la economía en el largo

plazo tiende a exhibir comportamientos inestables que la alejan, ante cualquier perturbación, del equilibrio estacionario.

Desde la perspectiva neoclásica, las conclusiones de Harrod pueden refutarse directamente si suponemos plena sustituibilidad de factores. Tobin (1955) consideraba lo anterior como obvio, pero añadió lo siguiente: "...me propongo presentar un modelo agregado sencillo que permite las posibilidades de sustitución y los efectos monetarios", (Tobin, 1955; p. 225), en vista de que ambos elementos son los mecanismos de ajuste esenciales que la tradición de Harrod y aun Domar (1946) dejaron fuera.

Según este planteamiento, el programa de investigación neoclásico debía incluir el estudio de los efectos monetarios en el crecimiento y la introducción explícita del supuesto de plena sustituibilidad de factores. Un año después Robert Solow publicó un modelo neoclásico de crecimiento suponiendo sólo lo último sin añadir los problemas monetarios, la teoría del crecimiento ha circulado desde entonces, y en modo predominante, por los estudios del lado real.

De los trabajos de Tobin sobre crecimiento y dinero, que abarcan de la mitad de la década de 1950 hasta la mitad de la siguiente, se obtuvieron las primeras conclusiones sobre las condiciones de no superneutralidad del activo monetario: lo que se ha denominado el efecto Tobin.

Miguel Sidrauski (1967), insatisfecho con los resultados conocidos hasta ese momento mostró, primero en su tesis de doctorado y después en la reunión anual de la *American Economic Association*, que en el largo plazo el dinero es superneutral. Es decir, se trata de una refutación directa a las conclusiones expuestas por Tobin.

A partir de ese momento las condiciones del debate estaban trazadas. Los siguientes treinta años de investigación sobre la relación entre crecimiento y dinero, se han desenvuelto entre estos extremos y en ello se deben de incluir los modelos de crecimiento endógeno con dinero, los cuales son pocos en relación con el caudal de obras publicadas en dicha línea.

El objetivo esencial de éste artículo es presentar una síntesis crítica de la teoría del crecimiento con moneda. En la primera parte se presenta el

punto de partida de éste debate, es decir, las condiciones del efecto Tobin y las condiciones en que la propiedad de superneutralidad se verifica siguiendo a Sidrauski. En la segunda parte se describe la forma en que algunos modelos de crecimiento endógeno introducen el dinero. Finalmente, en la tercera parte se presenta una evaluación del estado de la discusión y se analiza el alcance de los resultados que se encuentran en ésta subrama de estudio de la teoría del crecimiento.

Aun cuando en otros contextos pudieran ser diferentes, en este caso se emplean los conceptos de dinero y moneda como sinónimos, en la medida en que no se distingue dentro de esta corriente entre diversos agregados monetarios, ni se incluye la participación de los bancos en el proceso de creación de medios de cambio, en tal virtud no hay posibilidad de confusión.

I. TOBIN Y SIDRAUSKI

A. El efecto Tobin

Condiciones iniciales

Supongamos una economía en la que hay una tecnología de producción convexa, la cual exhibe rendimientos constantes a escala y decrecientes a los factores empleados, los cuales pueden sustituirse plenamente en el proceso productivo. Las firmas, que poseen la misma tecnología, producen una cantidad de bien, $Q(t)$, en cada instante de la economía, t , empleando dos factores de producción, un acervo de capital, $K(t)$, y una determinada cantidad de trabajo, $L(t)$. Existe una función F que relaciona los insumos con el producto, tal que podemos expresar

$$Q(t)=F(K(t), L(t)) \quad [1]$$

En las diversas especificaciones presentadas por Tobin (1955, 1961 y 1965) se introduce un activo en la economía al cual se le denomina la moneda. Es decir, se concibe al dinero como una forma de riqueza, un

depósito de valor que se mantiene en el tiempo. Como veremos, el dinero en este contexto no juega ningún papel relevante en tanto medio de cambio.

Se tiene una economía compuesta por dos activos: el acervo de capital y el dinero. La riqueza total agregada, medida en términos reales con la cual se cuenta será entonces, suprimiendo la notación temporal

$$V=K+M/P \quad [2]$$

el acervo real de capital más los saldos reales, donde P expresa el nivel de los precios monetarios. Sean $v=V/L$, $k=K/L$ y $m=M/PL$, tal que [2] puede reescribirse en términos de la posesión individual de activos:

$$v=k+m \quad [3]$$

Los agentes se enfrentan, en cada instante, a una decisión de portafolio, mediante la cual escogen la proporción de su riqueza a mantener como acervo de capital y la proporción a mantener como saldos monetarios.

Por hipótesis, tenemos que el costo de oportunidad por mantener dinero en vez de capital será de una magnitud $r+\pi$, es decir, la tasa real de interés, —que, en equilibrio, es igual al producto marginal del capital—, más la tasa de inflación, es decir, la tasa a la cual aumentan los precios monetarios. Consecuente con lo anterior se introduce una función de demanda de dinero

$$m=g(r + \pi)k, \text{ con } g' < 0 \quad [4]$$

En [4] se describe el hecho de que la cantidad de moneda a mantener es inversamente proporcional a su costo de oportunidad. Es decir, los agentes disminuirán su tenencia de saldos reales cuando aumente la tasa real de interés o cuando aumente la tasa de inflación porque transferirán una parte de su riqueza a capital, en vez de mantener dinero.

Implícitamente se está señalando que el acervo de capital ofrece un rendimiento positivo en el tiempo, mientras que el mantenimiento de saldos reales, en el tiempo, ofrece un rendimiento negativo dado por su costo de oportunidad.

La ecuación del movimiento para el acervo agregado de capital, tomando en cuenta la presencia de los saldos reales, se describe en el modo siguiente

$$\dot{K} = s \left[Q + \frac{\dot{M}}{P} \right] - \frac{\dot{M}}{P} \quad [5]$$

lo cual podemos interpretar como el hecho de que la inversión real agregada es la fracción del ahorro que no se absorbe en mantenimiento de saldos reales.

Para cerrar el modelo, se añade una ecuación que muestra la evolución de los saldos reales *per cápita* en el tiempo

$$\dot{m} = (\mu - \pi - n)m \quad [6]$$

es decir, la variación de los saldos reales que en el tiempo cada individuo mantiene dependen de la cantidad real de moneda, m , en poder de cada persona multiplicada por la tasa de crecimiento de los saldos nominales, μ , menos la tasa de inflación y menos la tasa de crecimiento de la población. Es una ecuación diferencial en m .

De lo anterior se deduce que en el estado estacionario, es decir, cuando los saldos reales *per cápita* no se modifican, entonces la tasa de inflación dependerá de la diferencia entre la tasa de crecimiento de los saldos nominales y la tasa de aumento de la población:

$$\pi = \mu - \nu \quad [6.1]$$

A partir de [6] se deduce una hipótesis general presente en todos los modelos que se describen y es el hecho de que la inflación es un fenómeno puramente monetario, lo cual es evidente en [6.1].

Crecimiento estacionario con moneda

Siguiendo a Hahn y Matthews (1965), el problema metodológico esencial de la teoría del crecimiento es describir una situación de equilibrio donde las variables relevantes del modelo crecen a una tasa constante, es decir, alcanzan una ruta de crecimiento estacionario, de modo que cuando se analiza el cambio en el tiempo de una variable X , cualquiera, respecto –o en proporción– a otra cualquiera, Y , por ejemplo, se tendrá que es cero.

Para encontrar una ruta de crecimiento estacionario se parte de la ecuación [5]. Se reordenan términos. Por otro lado se toma en cuenta que $k=K/L$ y que $K=kL$, tal que derivando esto último respecto al tiempo se obtiene que $\dot{K} = \dot{k}L + k\dot{L}$, lo que se sustituye en la parte izquierda de [5] y se despeja la variación del acervo de capital por persona

$$\dot{k} = sf(k) - (1 - s)(\mu - \pi)m - nk \quad [7]$$

Ahora bien, en el estado estacionario, la ecuación [7] deviene en

$$0 = sf(k) - (1 - s)nm - nk$$

e introduciendo la función de demanda por dinero [4], definida antes:

$$0 = sf(k) - (1 - s)n g(f'(k) + \mu - n)k - nk \quad [8]$$

La ecuación [8] describe la solución de equilibrio estacionario en una economía con moneda, donde el ahorro realizado por persona se iguala con la cantidad de moneda que los agentes mantienen y con la tasa de crecimiento de la población multiplicada por la razón capital trabajo.

De la ecuación [8] se deduce inmediatamente el efecto Tobin. La derivada implícita del acervo de capital con respecto a la tasa de crecimiento del acervo monetario es positiva, $dk/d\mu > 0$, considerando que en [4] $g' < 0$. Es decir, el efecto Tobin da cuenta de que un incremento en la tasa de crecimiento del dinero tiene un efecto positivo en el nivel de acervo de capital de equilibrio, esto es, incrementa el nivel de acumulación de capital por persona.

Profundicemos sobre esta idea. Cuando el banco central modifica la tasa de variación del dinero, digamos que la aumenta, entonces el costo de oportunidad por mantener saldos reales aumenta, tal y como se describe en la ecuación de demanda por dinero [4]. Si los agentes se enfrentan a una decisión de portafolio sobre dos activos financieros, y dado que el costo de uno de ellos ha aumentado, entonces los individuos preferirán deshacerse de una mayor cantidad de moneda y convertirla en acervo de capital. El incremento en la tasa de variación del dinero y el consiguiente aumento de la inflación estimulan el proceso de acumulación de capital. En último análisis, debido a que la acumulación de capital físico en este contexto es la única fuente del crecimiento –no hay capital humano, no hay cambio tecnológico–, entonces la inflación que resulta de un aumento en la tasa de variación del dinero tiene efectos positivos en los niveles de producto y capital por persona, aunque la tasa de crecimiento no se modifica. El dinero no es superneutral.

B. El modelo de Sidrauski

La economía que a continuación se estudia mantiene los mismos supuestos en relación con los presentados en el modelo de Tobin arriba expuesto, fundamentalmente los relacionados con la producción. Habrá que añadir, sin embargo, algunos elementos nuevos en la medida en que en este esquema se introduce el lado de la demanda de bienes empleando el modelo de preferencias intertemporales del tipo de Ramsey.

Acerca del horizonte de duración de la economía no se había señalado nada en la exposición sobre el modelo de Tobin. En cambio, en el modelo de Sidrauski se plantea explícitamente que el horizonte de duración

tanto de la economía como del consumidor representativo es infinito, se incorpora aquí la noción de un consumidor inmortal que maximiza el valor presente total de una función de utilidad intertemporal desde un instante cero y para todo el futuro.

Los argumentos de la función de utilidad son el consumo instantáneo que cada agente realiza y el saldo real que mantiene. Así, la moneda es un activo con utilidad, es decir, los agentes obtienen bienestar en la medida en que poseen una cantidad instantánea de saldo real en un esquema intertemporal. El dinero se incorpora como en los modelos temporales de Patinkin (1965), donde forma parte de los argumentos de la función de utilidad: el saldo real que hoy se aparta es transmitido al periodo siguiente para financiar el consumo.

El consumidor se enfrenta a la maximización de la siguiente función objetivo

$$U = \int_0^\infty u(c, m) e^{-\rho t} dt \quad [9]$$

El valor presente de la utilidad total es descontado a la tasa ρ , que se supone es positiva en la medida en que el individuo se preocupa más por el bienestar presente que por el bienestar futuro.

El consumidor se enfrenta a dos restricciones. La primera, de acervo, indica que el total de activos, v , mantenidos en una fecha t se dividen en acervo de capital, k , y saldo real, m , tal y como se mostró en [3]. Por otra parte, el consumidor se enfrenta a una restricción de flujo, la cual indica el cambio en la posición de activos en poder del consumidor en cada instante:

$$\dot{v} = f(k) - c - nv - \pi m \quad [10]$$

es decir, que el cambio en el tiempo de la cantidad de activos que el individuo mantiene dependen del ingreso total del consumidor, menos el consumo que realiza, la cantidad de activos que adquiere en cada instan-

te, nv , y la pérdida del poder de compra de los saldos reales que mantiene, πm . El problema del consumidor es maximizar la función objetivo [9] sujeta a las restricciones [3] y [10]. Suponemos las condiciones competitivas usuales: los precios están dados y son plenamente flexibles, los cuales además son perfectamente anticipados.

Condiciones de primer orden y superneutralidad de la moneda

El hamiltoniano de valor corriente que se deduce del sistema [9], [3] y [10] es

$$H = u(c, m) + \eta f(k) - c - nv - \pi m + \lambda(v - k - m)$$

Las condiciones de primer orden a las que se arriba son

$$\frac{\partial H}{\partial c} = u_c - \eta = 0 \quad [11]$$

$$\frac{\partial H}{\partial m} = u_m - \eta\pi - \lambda = 0 \quad [12]$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = \eta f'(k) - \lambda = 0 \quad [13]$$

$$-\frac{\partial H}{\partial v} = \dot{\eta} = (\rho + n)\eta - \lambda \quad [14]$$

La condición de primer orden [11] señala que la utilidad marginal debida al consumo es igual a la variable de coestado, η . La condición [12] describe que un aumento en la posesión de saldo real –lo cual incrementa la utilidad– tendrá que igualarse con la pérdida del poder adquisitivo del dinero cuando se multiplica por η que indica un aumento del ingreso

valuado en $t=0$, más el aumento del ingreso λ , cuando aumenta la cantidad total de activos valuado en $t=0$.

La condición [13] da cuenta de que el producto marginal del capital multiplicado por el precio sombra, η , se iguala con la variable de coestado, λ , asociada a la restricción de acervo. Finalmente, tenemos por [14] que la variación del precio sombra en el tiempo asociada con la restricción de flujo se iguala con la tasa de descuento más la tasa de crecimiento de la población, multiplicada por η , menos la variable de coestado λ .

Una diferencia sustancial entre el modelo de Sidrauski y el de Tobin es que en el primero, como a continuación se muestra, la función de demanda por saldos reales se deduce, mientras que en el segundo, como ya se mostró, dicha función se impone como parte de las condiciones iniciales. El resultado, sin embargo, es similar.

1. La función de demanda por saldos reales

Por [13] sabemos que $\eta f'(k) = \lambda$, lo cual se puede sustituir en [12] y considerando que por [11] la utilidad marginal del consumo es igual al precio sombra del ingreso, lo cual también se sustituye en [12] tenemos que

$$[\pi + f'(k)]u_c' = u_m' \quad [15]$$

lo cual describe la decisión de portafolio que el consumidor realizará. El individuo mantendrá saldos reales hasta el punto en que la utilidad marginal del dinero se iguale con la utilidad marginal del consumo multiplicada por el costo de oportunidad por mantener saldos reales, la tasa de inflación más el producto marginal del capital.

A partir de [15] se deduce inmediatamente que, en equilibrio, el individuo mantendrá saldos reales hasta el punto en que la tasa marginal

de sustitución entre dinero por consumo se iguale con el costo de oportunidad por mantener moneda:

$$\frac{u_m}{u_c} = f'(k) + \pi \quad [16]$$

La función de demanda por saldos reales es equivalente tanto en el modelo de Sidrauski como en el de Tobin porque la cantidad de saldo real que el individuo desea mantener depende directamente del costo en que incurre por poseer dinero y no destinarlo al otro activo.

2. Propiedad de superneutralidad

Por [13], nuevamente, sabemos que $\eta f'(k) = \lambda$. Lo anterior se sustituye en [14], tal que

$$\dot{\eta} = [\rho + n - f'(k)]\eta$$

pero en el estado estacionario se deberá de cumplir que $\dot{\eta} = 0$, tal que la expresión anterior deviene en

$$f'(k) = \rho + n = r \quad [17]$$

Es decir, el producto marginal del capital que en equilibrio es igual a la tasa real de interés depende de la tasa de descuento más la tasa de crecimiento de la población.

Con esto se demuestra directamente que el dinero es superneutral en tanto que la tasa real de interés no depende ni de la tasa de crecimiento de la cantidad nominal de dinero ni de la tasa de inflación. A un aumento en la tasa de crecimiento de la cantidad de moneda no se sigue una variación de la tasa r , solamente se sigue un incremento proporcional de los precios monetarios, es decir, de la tasa de inflación.

Siguiendo a Orphanides y Solow (1990), en [17] se cumple con la relación de Fisher, es decir, que la tasa de interés real es independiente de la tasa de inflación. A pesar de que tenemos una función de demanda por saldos reales equivalente a la del modelo de Tobin y, más aún, a pesar que el dinero se incorpora como un activo formando parte de una cartera más amplia, se obtiene un resultado opuesto al de Tobin.

Este se modifica, esencialmente, por la especificación de ahorro. Esto es, en el modelo de Tobin la tasa de ahorro, s , está dada. En el modelo de Sidrauski ya descrito la tasa de ahorro es endógena en el sentido de que es un resultado del modelo, es decir, la cantidad de producto sacrificado al consumo se deduce del modelo mismo y ello permite, asimismo, deducir la función de demanda de saldos reales y no postularla como parte de las condiciones iniciales.

Los elementos anteriores sentaron las bases de la discusión. Se parte de condiciones similares por el lado de la producción, se presentan funciones de demanda por saldos reales las cuales son equivalentes y se reducen al mismo problema de elección de cartera: los agentes escogen entre mantener dinero o mantener capital. Los resultados que se alcanzan son diferentes.

Las diferencias normativas son, por supuesto, considerables: de Tobin se podría deducir que a medida que una política monetaria activa esté presente, el nivel de acervo de capital por persona y de producto por persona aumentarán, aun cuando por hipótesis la tasa de inflación también se incremente. De Sidrauski, en cambio, se deduce que una política monetaria activa sólo aumenta la tasa de inflación sin modificar el nivel de las variables reales que describen las condiciones de equilibrio estacionario.

Faltaría evaluar una posibilidad adicional en que a un aumento de la tasa de crecimiento del acervo de dinero no se sigue inmediatamente el efecto Tobin o las condiciones de superneutralidad, sino que la tasa real de interés sí es afectada por las variables monetarias pero donde ésta tasa disminuye con aumentos en la tasa de inflación.

Se puede plantear el problema de modo simple en un medio ambiente donde se utiliza el modelo de preferencias intertemporales del tipo de

Ramsey, pero a diferencia del esquema utilizado por Sidrauski, la moneda no es un bien con utilidad, esto es, la moneda no se incorpora como un argumento de la función de utilidad, sino que solamente entra en la restricción presupuestaria en la forma de *cash-in-advance*. El único argumento de la función de utilidad es el consumo instantáneo que realiza el individuo. El problema del consumidor representativo se plantea como la maximización de la siguiente función de utilidad intertemporal.

$$\int_0^{\infty} u(c(t)) e^{-(\rho-n)t} dt, \text{ con } u(c) = \ln c \quad [18]$$

la cual está sujeta a una restricción de acervo como [3] y a una restricción de flujo del tipo

$$\dot{v} = f(k) - c - nv - (\pi + n)m \quad [19]$$

El hamiltoniano de valor presente que se deduce es

$$H = u(c)e^{-(\rho-n)t} + \eta(f(k) - c - nv - (\pi+n)m) + \lambda(v - k - m)$$

Las condiciones de primer orden a las que se arriba son

$$\frac{\partial H}{\partial c} = u'(c)e^{-(\rho-n)t} - \eta = 0 \quad [20]$$

$$\frac{\partial H}{\partial m} = -\eta(\pi + n) - \lambda = 0 \quad [21]$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = \eta f'(k) - \lambda = 0 \quad [22]$$

$$-\frac{\partial H}{\partial v} = \dot{\eta} = \eta n - \lambda \quad [23]$$

En relación con el modelo de Sidrauski, la condición de primer orden que se modifica es la vinculada con la derivada de la función hamiltoniana respecto a los saldos reales [21], debido a que en el presente modelo los saldos reales no forman parte de los argumentos de la función objetivo y por tanto no se obtiene la utilidad marginal del saldo real.

Para mostrar la no superneutralidad del dinero, partimos de [21] despejando n , la tasa de crecimiento de la población, de lo cual se obtiene que $n = -\lambda/\eta - \pi$. Por [22] se tiene que $\lambda = \eta f'(k)$, lo que sustituyendo en la expresión precedente nos permite deducir que $n = -f'(k) - \pi$. Sustituyendo el resultado anterior en [23] se tiene

$$\dot{\eta} = -\eta[2f'(k) + \pi] \quad [23.1]$$

tal que si se deriva [20] respecto al tiempo, lo cual se sustituye en la parte izquierda de [23.1], se toma en cuenta el hecho de que el valor presente de la utilidad marginal debida al consumo es igual a η , lo cual se sustituye en la parte derecha de [23.1], y reordenando términos se tiene

$$f'(k) = \frac{1}{2} \left[\rho + \frac{\dot{c}}{c} - n - \pi \right] \quad [24]$$

y en el estado estacionario, cuando $\dot{c} = 0$, se tiene

$$f'(k) = \frac{1}{2} [\rho - n - \pi] = r \quad [25]$$

El resultado que se presenta en [25] describe que bajo condiciones de equilibrio estacionario, la tasa real de interés depende de la tasa de descuento menos la tasa de crecimiento de la población y menos la tasa de inflación, es decir, depende de una variable nominal y, a diferencia del modelo de Sidrauski, la relación de Fisher no se verifica, es decir, no en

cumple el hecho de la tasa real de interés de largo plazo depende únicamente de determinantes reales.

Más precisamente, en [25] se describe que un aumento de la tasa de inflación, —lo cual se sigue de un aumento en la tasa de crecimiento del acervo monetario—, implica una reducción del producto marginal del capital y por tanto de la tasa real de interés asociada con el acervo de capital físico.

En este último caso hay una conclusión distinta en relación con el modelo de Sidrauski debido a que la moneda no es superneutral, pero los efectos de la no superneutralidad operan en forma distinta en relación con el efecto Tobin, porque en esta última especificación un aumento de la tasa de inflación disminuye los incentivos para invertir en tanto que el producto marginal del capital se reduce. Las consecuencias normativas de lo anterior, por supuesto, son radicalmente distintas en relación con los trabajos de Tobin.

Veamos en el apartado que sigue, cuáles son los aportes de la teoría del crecimiento endógeno en el ámbito de la incorporación de un activo monetario, una vez revisado el asunto para las condiciones de crecimiento exógeno o, en otras palabras, siguiendo las condiciones de los trabajos de Solow, con ahorro exógeno, así como los de Cass y Koopmans con ahorro endógeno.

III. CRECIMIENTO ENDÓGENO Y MONEDA

Es hasta principios de la década de 1990 cuando en la teoría del crecimiento endógeno comienzan a publicarse algunos trabajos vinculados con la introducción del dinero en la economía. En este tipo de modelos, generalmente, se han encontrado situaciones de no superneutralidad que, como veremos, no están directamente relacionadas con las condiciones de crecimiento endógeno.

Marquis y Reffet (1991) han dado cuenta de que en condiciones de introducción de la moneda en la forma de *cash-in-advance*, y donde hay acumulación tanto de capital físico como de capital humano, en un modelo de dos sectores, se puede concluir que un aumento en la tasa de

inflación reduce la tasa de crecimiento de largo plazo. Gomme (1993) ha descrito un resultado similar, asumiendo también que el dinero entra en la forma de *cash-in-advance*, en términos del crecimiento y el bienestar de corto plazo, en tanto que un aumento de la tasa de inflación reduce el bienestar de los individuos. De Gregorio (1992) encuentra un resultado equivalente a los dos anteriores.

En cambio, Mino y Shibata (1995) muestran un resultado diferente: describen que en una economía de un sector, empleando un esquema de generaciones traslapadas en tiempo continuo, integrando la moneda en la función de utilidad, se verifica algo similar al efecto Tobin, tal que un aumento de la tasa de inflación, la cual se sigue después de un aumento en la tasa de crecimiento del acervo monetario estimula a la acumulación de capital.

Este último modelo, debido a su sencillez será descrito a continuación como un ejemplo de las condiciones en que se concibe la relación entre crecimiento endógeno y moneda, pero es importante tener en cuenta que los resultados que aquí se alcanzan no son, tampoco, un caso general.

Un contexto de crecimiento donde la moneda no es superneutral

1. Consumidores

Mino y Shibata (1995), proponen un modelo de generaciones traslapadas en tiempo continuo como el debido a Blanchard (1985), en el que suponemos que una generación nacida en una fecha s cualquiera, calcula el valor presente de la utilidad total desde el momento inicial y para todo el futuro, pero ese individuo está completamente desconectado de los individuos nacidos en cualquier instante anterior o posterior al momento s .

El cálculo intertemporal incluye tanto la cantidad instantánea de bien a consumir, como la cantidad de saldos reales a mantener. La forma funcional propuesta es

$$U = \int_s^{\infty} \left\{ \alpha \ln[c(s,t)] + (1-\alpha) \ln[m(s,t)] \right\} e^{-\rho t} dt \quad [26]$$

la cual cumple con que la utilidad marginal en cada instante es positiva pero decreciente para los dos argumentos de la función. Los agentes descuentan la utilidad futura a la tasa ρ .

La restricción presupuestaria correspondiente da cuenta de que el cambio en la posición de activos del consumidor depende tanto de los rendimientos recibidos instantáneamente, a una tasa de interés $r(t)$, sobre los activos que devengan rendimientos, más el salario, $w(t)$, percibido al ofrecerse inelásticamente una unidad de esfuerzo laboral en cada instante más una cantidad de transferencias $\tau(t)$ ofrecidas por el gobierno en igual proporción a cada agente económico. Los gastos del consumidor son el consumo que realiza y la tasa nominal de interés, $r(t) + \pi(t)$ que los individuos dejan de percibir por mantener una cantidad de saldo real, m , en cada instante. Formalmente se establece

$$\dot{v}(s,t) = w(t) + r(t)v(s,t) + \tau(t) - c(s,t) - [r(t) + \pi(t)]m(s,t) \quad [27]$$

El problema del consumidor nacido en la fecha s es el de maximizar la función objetivo [26] sujeto a la restricción [27]. De las condiciones necesarias para encontrar un máximo a partir del problema anterior, se deducen dos funciones relevantes para el análisis que sigue. Por una parte, la demanda de saldos reales por parte del consumidor está descrita en la forma

$$m(s,t) = \frac{(1-\alpha)c(s,t)}{\alpha[r(t) + \pi(t)]} \quad [28]$$

La demanda por bienes de consumo, por otra parte, depende de

$$c(s, t) = \alpha \rho \{ v(s, t) + h(s, t) \} \quad [29]$$

La función de demanda por saldos reales [28], es creciente respecto al consumo de bienes, y decreciente en relación con la tasa nominal de interés, es decir, la tasa real de interés más inflación.

La ecuación [29], por otra parte, describe que el consumo instantáneo es financiado por la riqueza individual en posesión del consumidor. La riqueza bajo su poder está dividida en dos partes: por un lado, la riqueza no humana $v(s, t)$, esto es, el acervo de activos en posesión de un individuo nacido en s que calcula para cualquier fecha t , y por otra parte, del flujo de riqueza humana, $h(t)$, entendido como el valor presente de la suma del salario percibido en cada periodo, $w(t)$, más la transferencias gubernamentales percibidas, $\tau(t)$.

Se define una variable agregada, X , cualquiera que ésta fuera, como su nivel en la fecha cero, más el valor presente de la suma de ésta en todo el futuro, tomando en cuenta que la población crece a la tasa n , y debido a la identidad de agentes se arriba a

$$X(t) = x(0, t) + n \int_0^t x(s, t) e^{ns} ds$$

El consumo agregado en cualquier instante t , está definido como

$$C(t) = \alpha \rho [V(t) + H(t)] \quad [30]$$

La demanda de saldos reales presentada a nivel agregado es

$$M(t) = \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \frac{C(t)}{r(t) + \pi(t)} \quad [31]$$

La restricción presupuestaria agregada se puede reexpresar en la forma

$$\dot{V}(t) = r(t)V(t) + [w(t) + \tau(t)]L(t) - \frac{C(t)}{\alpha} \quad [32]$$

Derivando [30] respecto al tiempo y empleando la restricción presupuestaria agregada [32] tenemos que el movimiento del consumo agregado se define como sigue:

$$\dot{C}(t) = [r(t) + n - \rho]C(t) - \alpha n \rho V(t) \quad [33]$$

2. Productores

La firma representativa, que produce un sólo bien compuesto en cada instante, Q , emplea una tecnología mixta con rendimientos decrecientes a factor por una parte, más una tecnología con rendimientos no decrecientes a factor del tipo AK . Se emplean dos factores productivos, el capital y el trabajo solamente

$$Q(t) = K(t)^\beta L(t)^{1-\beta} + AK(t) \quad [34]$$

El productor maximiza el beneficio dados los precios de los insumos y del bien producido, considerando que el precio del bien final es el numérico, tenemos que a partir de las condiciones de primer orden se arriba a un precio de renta del capital igual a

$$r(t) = \frac{\beta Q(t)}{K(t)} + (1 - \beta)A \quad [35]$$

En [35] se describe que la firma contratará capital hasta el punto en que la razón producto capital sumada al estado de los conocimientos técnicos

en la parte de rendimientos no decrecientes de la función de producción se igualen con la tasa de interés vigente en el mercado.

3. *Condiciones de equilibrio*

Se postulan tres condiciones de equilibrio relevantes. Por una parte, en el mercado de bienes tenemos que el ingreso total se divide en consumo e inversión, respetando las reglas contables pertinentes para una economía cerrada. Por otra parte, el gobierno que realiza transferencias a los consumidores, las financia exclusivamente mediante la creación de moneda nueva, de modo que si μ es la tasa de crecimiento del acervo de dinero, en equilibrio tenemos que

$$\tau L = \mu M \quad [36]$$

Finalmente se tiene que el equilibrio en el mercado de activos implica que el total de la riqueza es igual al acervo de capital más el acervo de dinero en cada instante

$$V(t) = M(t) + K(t) \quad [37]$$

4. *El sistema dinámico agregado*

Para deducir las condiciones dinámicas agregadas, partimos de la siguiente definición de las variables en términos del acervo de capital. Sean $q = Q(t)/K(t)$, $c = C(t)/K(t)$, $m = M(t)/K(t)$ y $h = H(t)/K(t)$.

Con lo anterior, se reescribe la función de producción [34] en el modo siguiente

$$\frac{L}{K} = (q - A)^{\frac{1}{1-\beta}} \quad [38]$$

derivando [38] respecto al tiempo y despejando el movimiento de la razón producto capital, se obtiene

$$\dot{q} = (1 - \beta)(q - A) \left(n - \frac{\dot{K}}{K} \right) \quad [39]$$

Siguiendo las definiciones contables que describen el equilibrio en el mercado de los bienes, tenemos que

$$\frac{\dot{K}}{K} = q - c \quad [40]$$

e introduciendo la parte derecha de [40] en [39] arribamos a la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{q} = (1 - \beta)(q - A)(n - q + c) \quad [41]$$

En [41] se presenta una ecuación diferencial en q y en c . En este caso se plantea que la variación del producto en términos del capital depende tanto del nivel de la razón producto-capital como del nivel del consumo respecto al acervo de capital físico y del estado de los conocimientos tecnológicos, A , existentes.

Por otra parte, la ley del movimiento para la razón consumo-capital está dada, a partir de la ecuación [33] y tomando en cuenta los cambios de variables arriba señalados

$$\dot{c} = [n - (1 - \beta)(q - A) - \rho]c + c^2 - \alpha n \rho (1 + m) \quad [42]$$

que es una ecuación diferencial en c , m y q .

Para deducir una ecuación diferencial para los saldos reales, tal que sea posible describir la ley del movimiento correspondiente, se parte de la siguiente definición

$$\frac{\dot{M}}{M} = \mu - \pi \quad [43]$$

si se parte de [43], despejando π de la ecuación [31] que previamente se modifica en relación con el acervo de capital y ordenando términos se arriba a la ecuación que describe el movimiento de los saldos reales como proporción del acervo de capital.

$$\dot{m} = [\mu + c - (1 - \beta)(q - A)]m - \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)c \quad [44]$$

Siguiendo a Mino y Shibata (1995), se puede mostrar que una situación de equilibrio estacionario existe bajo condiciones de crecimiento endógeno. Y se puede mostrar también que la situación de equilibrio estacionario bajo condiciones de crecimiento endógeno satisface condiciones de estabilidad de punto de silla.

Asumiendo entonces que el equilibrio estacionario existe, es único y bajo ciertas condiciones es estable, entonces se analizarán a continuación las causas por las que el activo monetario no es superneutral.

Analicemos la ecuación [44] que describe el movimiento de los saldos reales como proporción del acervo de capital. Dicho de otra forma, da cuenta del cambio en el tiempo en la composición de la cartera de activos en poder de los consumidores. En tanto que se enfrentan a dos activos solamente, un aumento de m significa un aumento en el saldo real relativo al acervo de capital bajo posesión de los individuos. En el estado estacionario correspondiente a [44], es decir, cuando la proporción de

moneda a capital no se modifica porque ambas variables crecen a la misma tasa, tenemos que el nivel de consumo correspondiente es

$$si \dot{m} = 0 \rightarrow c = \frac{\alpha(1-\beta)(q-A)m - \alpha\mu m}{(1+m)\alpha - 1} \quad [45]$$

Evaluando la derivada del consumo relativo al acervo de capital respecto a la tasa de crecimiento del dinero, tenemos que

$$\frac{dc}{d\mu} = -\frac{\alpha m}{\alpha(1+m) - 1} \quad [45.1]$$

A partir de [45.1] tenemos que si se verifica que $\alpha(1+m) > 1$, entonces un aumento en la tasa de crecimiento del dinero conduce a una reducción del consumo relativo al acervo de capital. La moneda entonces no es superneutral y si el crecimiento está guiado por la acumulación de capital físico inmediatamente se sigue de [40] que una reducción de c incrementa la tasa de crecimiento del acervo de capital agregado.

La anterior es una versión del efecto Tobin que atraviesa por el consumo. Es decir, cuando la tasa de crecimiento del dinero es incrementada, primero se reduce el consumo, en un segundo momento los agentes modifican el perfil de su portafolio de activos reduciendo sus tenencias de saldos reales y aumentando su tenencia de capital.

Este resultado, descrito por Mino y Shibata (1995), sin embargo, descansa en una hipótesis relativamente frágil que es el hecho de que $\alpha(1+m) > 1$, donde generalmente $0 < \alpha < 1$, y difícilmente se sostiene tal hipótesis cuando m , la participación del saldo real entre el acervo de capital total sea menor que uno. En tal caso, se necesitan dos condiciones necesarias y suficientes para garantizar que la actual versión de efecto Tobin ocurre: por una parte, que $\alpha(1+m) > 1$ y, por otra, que $m \geq 1$.

Si, por el contrario, $\alpha(1+m) < 1$, entonces un aumento de la tasa de crecimiento del dinero provocaría un aumento del consumo relativo al

acervo de capital y, por tanto, el ritmo de acumulación de capital se reduce. El dinero, por supuesto, mantiene la propiedad de no superneutralidad, pero su efecto en el crecimiento es exactamente contrario al del efecto Tobin.

Lo fundamental es establecer, hasta este punto, que la moneda no es superneutral, pero que los efectos de tal propiedad dependen crucialmente del valor de los parámetros. En tal virtud el resultado es ambiguo.

Hasta aquí, sin embargo, se ha encontrado un hecho que parece fundamental en la literatura reciente que trata alrededor del papel de la moneda en el proceso de crecimiento: a diferencia del trabajo de Sidrauski (1967) se arriba a conclusiones de no superneutralidad. Pero las causas de la no superneutralidad de la moneda distan mucho de vincularse con el hecho de que se trate de un modelo de crecimiento endógeno.

IV. UNA EVALUACIÓN DEL ALCANCE DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Los modelos que hasta aquí han sido reseñados por supuesto que no agotan la discusión. Orphanides y Solow (1990) han mostrado en un *survey* exhaustivo sobre el tema que abarca desde los trabajos de Tobin hasta las contribuciones de fines de la década de los ochenta –sin incluir nada sobre crecimiento endógeno– que los modelos básicos de crecimiento con dinero cuando son modificados dan resultados diferentes en comparación con el modelo original.

El centro del debate está ubicado en el problema de la propiedad de superneutralidad del dinero. Se puede entender que esta ocurre cuando a una variación de la tasa de crecimiento del acervo de dinero solamente se modifican las variables monetarias, como la tasa de inflación, pero no cambian las variables reales en condiciones de equilibrio estacionario. El estudio de la superneutralidad puede efectuarse en dos formas: por una parte, evaluando si la tasa real de interés de largo plazo no se altera, de modo que la relación de Fisher se cumple, que fue el método seguido por Sidrauski; por otra parte, evaluando directamente si las relaciones de capital por persona o de producto por persona se modifican, que fue el

método seguido por Tobin. En este último caso se niega la posibilidad de superneutralidad del activo monetario.

Todos los planteamientos presentados hasta aquí muestran la siguiente característica común: la moneda entra en un portafolio más amplio de activos, en este caso con el capital físico, y los agentes eligen repartir su riqueza entre uno u otro. La moneda solamente es un acervo de riqueza y sus funciones como medio de cambio o como unidad de cuenta no aparecen.

El acervo de capital ofrece un rendimiento positivo, la moneda ofrece un rendimiento negativo. ¿Qué haría en las condiciones mostradas que los agentes se interesen por mantener dinero? Hasta este punto únicamente puede ser una hipótesis y es bajo esa situación que en parte los modelos fallan (Orphanides y Solow, 1990). En los mundos descritos el riesgo no existe tal que los rendimientos presentes y futuros de cada activo son perfectamente anticipados. Los activos sin riesgo, siguiendo a Samuelson (1947) y Merton (1990), debieran de poseer el mismo rendimiento, sin embargo, en la tradición de crecimiento con moneda ello no es así. Por hipótesis, el dinero es un activo dominado por otro, como el acervo de capital, y entonces se requiere añadir el supuesto de que los agentes deben mantener dinero en tanto activo.

En los modelos revisados se comparte la hipótesis de que la inflación es un fenómeno puramente monetario. Sin embargo, no comparten las mismas conclusiones. Bajo algunas circunstancias el dinero es superneutral, y bajo otras no lo es. En este último caso Tobin muestra sin ambigüedades que un aumento de la tasa de crecimiento del dinero estimula la acumulación de capital físico y, con Mino y Shibata (1995), bajo condiciones especiales ocurre lo mismo, pero en este último caso podría esperarse un resultado inverso según el valor de algunos parámetros.

En la misma idea, Sidrauski, al introducir el dinero en la función de utilidad muestra que la relación de Fisher se verifica y, por tanto, la moneda es superneutral. Al modificar ese modelo, suponiendo que el dinero no es un activo con utilidad, tal que sólo se incorpora en la forma de *cash-in advance*, se verifican resultados diferentes en tanto que la tasa de inflación sí altera la tasa real de interés. Lo anterior ha sido descrito

también, entre otros, por Marquis y Reffet (1991), De Gregorio (1992) y Gomme (1993).

Los modelos de crecimiento endógeno intentan explicar las condiciones bajo las cuales es posible describir un equilibrio dinámico cuando las condiciones usuales de la producción no se verifican en su totalidad: por ejemplo la presencia de rendimientos crecientes a factor o, al menos, de rendimientos no decrecientes, la introducción del conocimiento en tanto un bien no rival pero parcialmente excluyente, entre otras características. Tales propiedades de un vasto conjunto de modelos claramente dominados por el lado de la oferta, sin embargo, no tienen repercusiones en el hecho de que la moneda sea, o deje de ser, superneutral.

Lo anterior ocurre debido a un hecho esencial: suponemos generalmente que la moneda está en manos exclusivamente de los consumidores y, si por otro lado, los modelos de crecimiento endógeno sólo modifican el lado de la oferta, pero los productores nunca poseen la moneda, entonces los efectos sustantivos del dinero en el crecimiento se verifican únicamente como resultado de las decisiones de consumo-ahorro que realizan los individuos. Estos resultados se pueden alcanzar con, o sin, modelos de crecimiento endógeno.

El punto interesante, sin embargo, es que siguiendo la contribución de Mino y Shibata (1995), ésta no exige de alguna especificación de crecimiento endógeno. Esto es, la no neutralidad de la moneda aparece independientemente de las condiciones productivas –del lado de la oferta– que postulemos.

La siguiente paradoja que parece interesante anotar es la siguiente: el modelo de Sidrauski (1967) que exhibe superneutralidad de la moneda, mantiene las mismas propiedades tanto con una función de producción de rendimientos decrecientes a factor, tal y como se presentó en la primera parte, como con una formulación del tipo $Ak(t)$, la cual es una función de producción prototípica de los modelos de crecimiento endógeno de un sector (Barro y Sala-i-Martin, 1995). Si partimos de una función de utilidad del tipo de Ramsey donde la moneda es un bien con utilidad y forma parte de los argumentos de ésa, e introduciendo la función de producción $Ak(t)$, encontraremos que la tasa real de interés está determinada única-

mente por factores reales. La moneda, inclusive introduciendo la formulación anterior de rendimientos no decrecientes, exhibe la propiedad de superneutralidad.

Ello es así por las mismas causas arriba señaladas: en tanto un activo en posesión exclusiva de los consumidores –o las familias– es un objeto que interviene en las decisiones de ahorro-consumo por el lado de los demandantes de bienes finales que son los únicos que poseen un portafolio de activos. En el modelo de Sidrauski entonces la neutralidad de largo plazo se mantiene porque mantenemos las condiciones iniciales que especifican la forma en que los consumidores se enfrentan al dinero, en el modelo de Mino y Shibata (1995) o Gomme (1993), la conclusión cambia porque las condiciones de introducción del dinero en manos de los consumidores cambian.

La tradición de los modelos de crecimiento endógeno con moneda no han avanzado significativamente en relación con los resultados a los que se arribó en la tradición anterior inaugurada por Tobin y Sidrauski.

En esas mismas condiciones las respuestas normativas aún esperan. En lo que hasta aquí se ha explorado existen al menos dos sugerencias de política monetaria: por una parte, puede haber un llamado a una política activa para aquellos modelos en los que se verifica el efecto Tobin debido a que cualquier incremento en la tasa de crecimiento del acervo monetario, lleva a un estímulo para la acumulación de capital. Pero por otra parte, siguiendo a Sidrauski la política monetaria no tiene ningún sentido emplearla como medio para estimular la actividad económica porque las variables reales no se modifican y, más aún, si tenemos un modelo en el que la moneda no es superneutral pero en donde la tasa real de interés es afectada negativamente por un aumento de la tasa de inflación, entonces el llamado sería a la existencia de un política monetaria conservadora.

Las causas que en parte guiaron al surgimiento de esta rama de la teoría del crecimiento, indagar sobre las condiciones en que la política monetaria puede influir en el desempeño de largo plazo, distan mucho de estar resueltas independientemente de si el análisis se ha realizado en condiciones de crecimiento endógeno o exógeno.

BIBLIOGRAFÍA

- Barro, Robert y Xavier Sala-i-Martin, (1995): *Economic Growth*. Mc Graw-Hill.
- Benetti, Carlo, (1990) *Moneda y Teoría del Valor*. México, UAM-FCE.
- Blanchard, Olivier, (1985): "Debts, deficits and finite horizons", en *Journal of Political Economy*, vol. 93, pp. 223-247.
- Blanchard, Olivier, (1990): "Why does money affects output?", en *Handbook of Monetary Economics*, vol. II, Edited by B. M. Friedman y F.H. Hahn. North Holland, 1990
- Blanchard, Olivier and Stanley Fischer, (1989): *Lectures on Macroeconomics*. Cambridge, MIT Press.
- De Gregorio, J., (1992): "The effects of inflation in economic growth: lessons from Latin America", en *American Economic Review*, vol. 36, pp. 417-425.
- Domar, Evsey, (1946): "Expansión de Capital y Crecimiento", en A. Sen (1979), (comp.) *Economía del Crecimiento*. Lecturas del Trimestre Económico, núm. 28, FCE, México, pp. 63-74.
- Gomme, P., (1993): "Money and Growth Revisited: measuring the costs of inflation in an endogenous growth model", en *Journal of Monetary Economics*, vol. 32, pp. 51-77.
- Hahn, Frank y R. C. O. Matthews, (1965): "The Theory of Economic Growth: a Survey", en *The American Economic Association y The Royal Economic Society, Surveys of Economic Theory. Growth and Development*, vol. II. Macmillan-St. Martin Press, pp. 1-124.
- Marquis, M. H. y Reffet, K. L., (1991): "Real interest rates and endogenous growth in a monetary economy", en *Economic Letters*, vol. 37, pp. 105-109.
- Merton, Robert K., (1990): "Pricing non-monetary assets", en *Handbook of Monetary Economics*, vol. I, Edited by B.M. Friedman y F. H. Hahn. North Holland, 1990,
- Mino, K y Shibata, A., (1995): "Monetary Policy, Overlapping Generations, and Patterns of Growth", en *Economica*, vol. 62, pp. 179-194.

- Orphanides, Athanasios y Robert Solow, (1990) "Money, Inflation and Growth", en *Handbook of Monetary Economics*, vol. I, Edited by B.M. Friedman y F.H. Hahn. North Holland, 1990, pp. 224- 260.
- Samuelson, Paul A., (1947) *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Harvard University Press.
- Solow, R.M., (1956) "Un modelo de crecimiento", en A. Sen (1979) (comp.) *Economía del Crecimiento. Lecturas del Trimestre Económico*, No. 28, México Fondo de Cultura Económica, pp. 151-182.
- Sidrauski, Miguel (1967). "Inflation and Economic Growth", en *Journal of Political Economy*, vol. 75, pp. 796- 810.
- Tobin, James, (1955) "A Dynamic Aggregative Model", en *Journal of Political Economy*, vol.63, pp. 103-115.
- , (1961) "Money, Capital and Other Stores of Value", en *American Economic Review, papers and proceedings*, vol. 51, pp. 26-37.
- , (1965) "Money and Economic Growth", en *Econometrica*, vol. 33, pp. 671-684.