

Parameter optimization of Green and Ampt equation using a nonlinear algorithm

Optimización de parámetros de la ecuación de Green y Ampt mediante un algoritmo no lineal

Sebastián Fuentes¹; Carlos Fuentes²; Carlos Chávez^{1*}

¹Universidad Autónoma de Querétaro, Centro de Investigaciones del Agua, Departamento de Ingeniería de Riego y Drenaje. Cerro de las Campas sn, col. Las Campanas, C. P. 76010, México.

²Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Coordinación de Riego y Drenaje. Paseo Cuauhnáhuac, núm. 8532, Jiutepec, Morelos, C. P. 62550, México.

*Corresponding author: chagcarlos@uaq.mx, tel. 442 192 12 00 ext. 6036.

Abstract

Introduction: The Richards equation or a simplification, such as the Green and Ampt equation, is mainly used to describe the flow of water in the soil. The Richards equation produces accurate results, but lacks general analytical solutions, so the Green and Ampt equation is used as an intermediate way of modeling the phenomenon by maintaining physical-mathematical bases in the representation.

Objective: To optimize the parameters of saturated hydraulic conductivity and wetting front suction of the Green and Ampt equation by means of a nonlinear optimization algorithm, and to validate the solution to optimize the parameters as a function of soil textures.

Methodology: The Levenberg-Marquardt algorithm was used to estimate the infiltration parameters of the Green and Ampt equation, and the initial pair of values was taken according to soil texture.

Results: This model was used to calculate the hydraulic conductivity parameters at saturation and wetting front suction.

Study limitations: A homogeneous soil column and a constant initial moisture content were considered for the whole column.

Originality: The optimization algorithm was oriented to keep the parameter values within the range established in the textural classes.

Conclusions: An optimization algorithm was implemented to estimate the parameters K_s and h_f by solving the Green and Ampt equation, which included code performance review and experimental validation with infiltration tests.

Keywords: infiltration, saturated hydraulic conductivity, wetting front suction, Levenberg Marquardt algorithm, soil texture.

Resumen

Introducción: Para describir el flujo de agua en el suelo se utiliza principalmente la ecuación de Richards o una simplificación, como la ecuación de Green y Ampt. La primera produce resultados precisos, pero carece de soluciones analíticas generales, por lo cual se utiliza la ecuación de Green y Ampt como una forma intermedia de modelar el fenómeno al mantener bases físico-matemáticas en la representación.

Objetivo: Optimizar los parámetros de conductividad hidráulica a saturación y la succión en el frente de humedecimiento de la ecuación de Green y Ampt mediante un algoritmo de optimización no lineal, y validar la solución para obtener la optimización de parámetros en función de las texturas de los suelos.

Metodología: Se utilizó el algoritmo de Levenberg-Marquardt para estimar los parámetros de infiltración de la ecuación de Green y Ampt, y en función de la textura del suelo se tomaron el par de valores iniciales.

Resultados: El modelo obtenido permitió calcular los parámetros de conductividad hidráulica a saturación y la succión en el frente de humedecimiento.

Limitaciones del estudio: Se consideró una columna homogénea de suelo y un contenido de humedad inicial constante en toda la columna.

Originalidad: El algoritmo de optimización se orientó para mantener los valores de los parámetros dentro del rango establecido en las clases texturales.

Conclusiones: Se implementó un algoritmo de optimización para calcular los parámetros K_s y h_f mediante la solución de la ecuación de Green y Ampt, la cual incluyó la revisión del funcionamiento del código y la validación experimental con pruebas de infiltración.

Palabras clave: infiltración, conductividad hidráulica a saturación, succión en el frente de humedecimiento, algoritmo Levenberg Marquardt, textura del suelo.



Introduction

Soil water flow is important in areas such as soil mechanics, irrigation, drainage, hydrology and agriculture (Fuentes et al., 2020). This phenomenon can be described physically with the Richards equation (1931), which produces accurate results if the hydrodynamic properties and boundary conditions are known, but it lacks general analytical solutions, and therefore highly complex numerical methods are usually required for its solution (Damodhara-Rao et al., 2006; Ma et al., 2010; Malek & Peters, 2011). Alternatively, there are physically based approximate models, which are the result of simplifying the initial conditions. In particular, the equation of Green and Ampt (1911) is an alternative to simulate the process of vertical infiltration of water into the soil, which has been used in surface irrigation. (Chávez et al., 2018, 2020; Naghedifar et al., 2020; Saucedo et al., 2015).

The application of the Green and Ampt equation involves soil physical property parameters (Ali & Islam, 2018; Damodhara-Rao et al., 2006); however, there are two key parameters that are not viable to measure experimentally: saturated hydraulic conductivity (K_s) and wetting front suction (h_f). The value of K_s can be measured directly in the field using rainfall simulators, infiltration meters and constant or variable load permeameters (Gómez-Tagle et al., 2008), as well as Guelph permeameter. However, these methods need long periods of time to achieve a stable value, which leads to the use of large volumes of water for estimation (Castiglioni et al., 2018). This uncertainty in the values of these soil hydrodynamic parameters can be considered an obstacle to optimal irrigation design due to the high degree of difficulty in calculating them, although most of the time it depends on the experience of the modeler. The parameters of the Green and Ampt equation have been optimized by least-squares fitting under rainfall conditions (Chen et al., 2015; Xiang et al., 2016). Chen et al. (2015) showed that these parameters are affected by the duration of precipitation used in their modeling. Currently, different theoretical and empirical approaches such as pedotransfer functions (Saxton & Rawls, 2006; Trejo-Alonso et al., 2020) and artificial neural networks are used to estimate these parameters (Trejo-Alonso et al., 2021). Nevertheless, pedotransfer functions are only applicable in the area where the model was calibrated, and neural networks represent a high computational cost (higher computational time).

Therefore, the objectives of this work were to optimize the parameters K_s and h_f of the Green and Ampt equation by using a nonlinear optimization algorithm and to validate the solution to achieve the optimization of parameters as a function of soil textures.

Introducción

El movimiento del agua del suelo es importante en áreas como la mecánica de suelos, el riego, el drenaje, la hidrología y la agricultura (Fuentes et al., 2020). Este fenómeno se puede describir físicamente mediante la ecuación de Richards (1931), la cual produce resultados precisos si se conocen las propiedades hidrodinámicas y condiciones de frontera, pero carece de soluciones analíticas generales, por lo que normalmente se requieren métodos numéricos de alta complejidad para su solución (Damodhara-Rao et al., 2006; Ma et al., 2010; Malek & Peters, 2011). Como alternativa, existen modelos aproximados de base física, que son resultado de la simplificación de las condiciones iniciales. De manera particular, la ecuación de Green y Ampt (1911) es una alternativa para simular el proceso de infiltración vertical de agua en el suelo, la cual ha sido utilizada en el riego por gravedad (Chávez et al., 2018, 2020; Naghedifar et al., 2020; Saucedo et al., 2015).

La aplicación de la ecuación de Green y Ampt requiere parámetros de las propiedades físicas de los suelos (Ali & Islam, 2018; Damodhara-Rao et al., 2006); sin embargo, hay dos parámetros clave que no es viable medirlos experimentalmente: la conductividad hidráulica a saturación (K_s) y la succión en el frente de humedecimiento (h_f). El valor de K_s se puede medir directamente en campo mediante simuladores de lluvia, infiltrómetros y permeámetros de carga constante o variable (Gómez-Tagle et al., 2008), así como el permeámetro de Guelph. Sin embargo, estos métodos requieren largos periodos de tiempo para lograr un valor estable, lo cual conlleva a utilizar grandes volúmenes de agua para su estimación (Castiglioni et al., 2018). La incertidumbre en los valores de estos parámetros hidrodinámicos del suelo se puede considerar un obstáculo para el óptimo diseño del riego debido al alto grado de dificultad para calcularlos, aunque la mayoría de las veces depende de la experiencia del modelador. Se han realizado optimizaciones de los parámetros de la ecuación de Green y Ampt mediante un ajuste de mínimos cuadrados bajo condiciones de lluvia (Chen et al., 2015; Xiang et al., 2016). Chen et al. (2015) demostraron que estos parámetros se ven afectados por la duración de las precipitaciones utilizadas en su modelación. Actualmente, se utilizan diferentes enfoques teóricos y empíricos como funciones de pedotransferencia (Saxton & Rawls, 2006; Trejo-Alonso et al., 2020) y redes neuronales artificiales para calcular estos parámetros (Trejo-Alonso et al., 2021). No obstante, las funciones de pedotransferencia solo son aplicables en la zona donde se calibró el modelo, y las redes neuronales requieren un alto costo computacional (mayor tiempo de cómputo).

Materials and methods

The Green and Ampt equation

The Green and Ampt equation is established from the continuity equation and Darcy's law (1856) with the following assumptions: a) the initial moisture profile in a soil column is uniform: $\theta = \theta_o$, b) water pressure at the soil surface is hydrostatic: $\psi = h \geq 0$ (where h is the water depth on the soil surface), c) there is a well-defined wetting front characterized by a negative pressure: $\psi = -h_f < 0$ (where h_f is the wetting front suction) and d) the region between the soil surface and the wetting front is completely saturated (piston flow): $\theta = \theta_s$ and $K = K_s$ (where K_s is the saturated hydraulic conductivity; that is, the value of the hydraulic conductivity of Darcy's law corresponding to the volumetric water content at saturation). The resulting ordinary differential equation is as follows:

$$\frac{dI(t)}{dt} = K_s \left[1 + \frac{(h + h_f)(\theta_s - \theta_o)}{I} \right] \quad (1)$$

where I the cumulative infiltration, t is the time, and θ_s and θ_o are the initial and saturated moisture contents, respectively.

If the water depth over the surface is considered independent of time, Equation (1) is analytically integrated with the initial condition $I = 0$ at $t = 0$, which results in the following:

$$I = K_s t + \lambda \ln \left(1 + \frac{I}{\lambda} \right), \lambda = (h + h_f)(\theta_s - \theta_o) \quad (2)$$

When the amount of water flowing at infinity is neglected, the infiltrated water depth as assumed by Green and Ampt is equal to the volume per unit area stored in the piston: $I(t) = z_f(t)\Delta\theta$ with $\Delta\theta = \theta_s - \theta_o$, and $z_f(t)$ is the piston front (Fuentes et al., 2012).

Parameter optimization

In nonlinear regression models, each observation y_i is written as a response function $f(x_i; \beta)$. An important difference in nonlinear regression models is that the number of parameters β of the regression is not directly related to the number of variables x_i in the model (Cornejo-Zuniga & Rebolledo-Vega, 2016). To estimate the parameters K_s and h_f using an infiltration test, the Levenberg-Marquardt algorithm (Moré, 1978) is applied, which has been a standard technique for nonlinear least squares problems (Chávez et al., 2022; Fuentes, et al., 2022; Šimůnek & Hopmans, 2018). The parameter update is performed iteratively with the following expression:

$$p = -[J^T J + \mu I_d]^{-1} J^T r \quad (3)$$

Considerando lo anterior, los objetivos de este trabajo fueron optimizar los parámetros K_s y h_f de la ecuación de Green y Ampt mediante el uso de un algoritmo de optimización no lineal y validar la solución para obtener la optimización de parámetros en función de las texturas de los suelos.

Materiales y métodos

La ecuación de Green y Ampt

La ecuación de Green y Ampt se establece a partir de la ecuación de continuidad y la ley de Darcy (1856) con las siguientes hipótesis: a) el perfil de humedad inicial en una columna de suelo es uniforme: $\theta = \theta_o$, b) la presión del agua en la superficie del suelo es hidrostática: $\psi = h \geq 0$ (donde h es la lámina de agua sobre la superficie del suelo), c) existe un frente de humedecimiento bien definido caracterizado por una presión negativa: $\psi = -h_f < 0$ (donde h_f es la succión en el frente de humedecimiento), y d) la región entre la superficie del suelo y el frente de humedecimiento está completamente saturada (flujo en pistón): $\theta = \theta_s$ y $K = K_s$ (donde K_s es la conductividad hidráulica a saturación; es decir, el valor de la conductividad hidráulica de la ley de Darcy correspondiente al contenido volumétrico de agua a saturación). La ecuación diferencial ordinaria resultante es la siguiente:

$$\frac{dI(t)}{dt} = K_s \left[1 + \frac{(h + h_f)(\theta_s - \theta_o)}{I} \right] \quad (1)$$

donde I es la lámina infiltrada acumulada, t es el tiempo, y θ_s y θ_o son los contenidos de humedad a saturación e inicial, respectivamente.

Si el tirante de agua sobre la superficie se considera independiente del tiempo, la Ecuación (1) se integra analíticamente con la condición inicial $I = 0$ en $t = 0$, lo cual resulta en lo siguiente:

$$I = K_s t + \lambda \ln \left(1 + \frac{I}{\lambda} \right), \lambda = (h + h_f)(\theta_s - \theta_o) \quad (2)$$

Cuando se desprecia la cantidad de agua que fluye en el infinito, la lámina infiltrada como lo suponen Green y Ampt es igual al volumen por unidad de área almacenado en el pistón: $I(t) = z_f(t)\Delta\theta$ con $\Delta\theta = \theta_s - \theta_o$, y $z_f(t)$ es el frente del pistón (Fuentes et al., 2012).

Optimización de parámetros

En los modelos de regresión no lineal, cada observación y_i se escribe en términos de una función de respuesta $f(x_i; \beta)$. Una diferencia importante de los modelos de regresión no lineal es que el número de parámetros

where J is the Jacobian matrix related to the variations of the infiltration function for each parameter to be optimized, I_d is the identity matrix, r is the vector of differences between the measured infiltrated water depth and the one calculated with the optimization algorithm, and μ is the damping parameter that is fitted in each iteration. The Jacobian matrix is calculated as follows:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial K_s} & \frac{\partial I_1}{\partial h_f} \\ \frac{\partial I_2}{\partial K_s} & \frac{\partial I_2}{\partial h_f} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial I_m}{\partial K_s} & \frac{\partial I_m}{\partial h_f} \end{bmatrix} \quad (4)$$

where I_m is the equation of Green and Ampt and m is the number of measured data. In this algorithm the values of the Jacobian matrix are approximated numerically by centered derivatives to improve computational time.

The optimization of the parameters was coded in a program with functions and subroutines, which start with a pair of initial values, to subsequently calculate the Jacobian matrix and the error vector. This allows to solve Equation (3), which results in a new pair of values. This allows to calculate the error vector and check if it is smaller than the previous iteration due to a tolerance. If it is higher than the tolerance, the algorithm starts again with the pair found in the last iteration, and if this error vector is lower than the tolerance, the program stops and prints the results. The diagram is shown in Figure 1.

Input parameters

The input data required are the initial and saturation moisture contents, as well as data derived from an infiltration test (time and infiltrated water depth). To determine the initial moisture content (θ_o), the input variables are bulk density of soil (ρ_t), gravimetric moisture content (ω_o) and density of water (ρ_w):

$$\theta_o = \left(\frac{\rho_t}{\rho_w} \right) \omega_o \quad (5)$$

Porosity (φ) is the void space volume of the porous media, which is calculated from bulk density (ρ_t) and quartz particle density (ρ_s):

$$\varphi = 1 - \frac{\rho_t}{\rho_s} \quad (6)$$

where $\rho_s = 2.65 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$.

Saturation moisture content (θ_s) is the volume of water retained in the pore space, usually assimilated to the

β de la regresión no se relaciona directamente con el número de variables x_i en el modelo (Cornejo-Zuniga & Rebolledo-Vega, 2016). Para estimar los parámetros K_s y h_f a partir de una prueba de infiltración, se utiliza el algoritmo Levenberg-Marquardt (Moré, 1978), el cual ha sido una técnica estándar para problemas de mínimos cuadrados no lineales (Chávez et al., 2022; Fuentes, et al., 2022; Šimůnek & Hopmans, 2018). La actualización de parámetros se realiza de manera iterativa con la siguiente expresión:

$$p = - [J^T J + \mu I_d]^{-1} J^T r \quad (3)$$

donde J es la matriz Jacobiana relacionada con las variaciones de la función de infiltración respecto a cada parámetro a optimizar, I_d es la matriz identidad, r es el vector de diferencias entre la lámina infiltrada medida y la calculada con el algoritmo de optimización, y μ es el parámetro de amortiguación que se ajusta en cada iteración. La matriz Jacobiana se calcula de la siguiente manera:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial K_s} & \frac{\partial I_1}{\partial h_f} \\ \frac{\partial I_2}{\partial K_s} & \frac{\partial I_2}{\partial h_f} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial I_m}{\partial K_s} & \frac{\partial I_m}{\partial h_f} \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde I_m es la ecuación de Green y Ampt, y m es el número de datos medidos. En este algoritmo los valores de la matriz Jacobiana se aproximan numéricamente mediante derivadas centradas para mejorar el tiempo de cómputo.

La optimización de los parámetros se codificó en un programa con funciones y subrutinas, las cuales comienzan con un par de valores iniciales, para posteriormente calcular la matriz Jacobiana y el vector de errores. Con esto es posible resolver la Ecuación (3), que da como resultado un par de valores nuevos. Lo anterior permite calcular el vector de errores y revisar si es menor a la iteración anterior dada una tolerancia. En caso de ser mayor a la tolerancia, el algoritmo inicia de nuevo con el par encontrado en la última iteración, y si este vector de errores es menor a la tolerancia, el programa termina e imprime los resultados. El diagrama completo se muestra en la Figura 1.

Parámetros de entrada

Los datos de entrada que se requieren son los contenidos de humedad inicial y a saturación, así como los datos obtenidos de una prueba de infiltración (tiempo y lámina infiltrada). Para obtener el contenido de humedad inicial (θ_o), las variables de acceso son la densidad aparente del

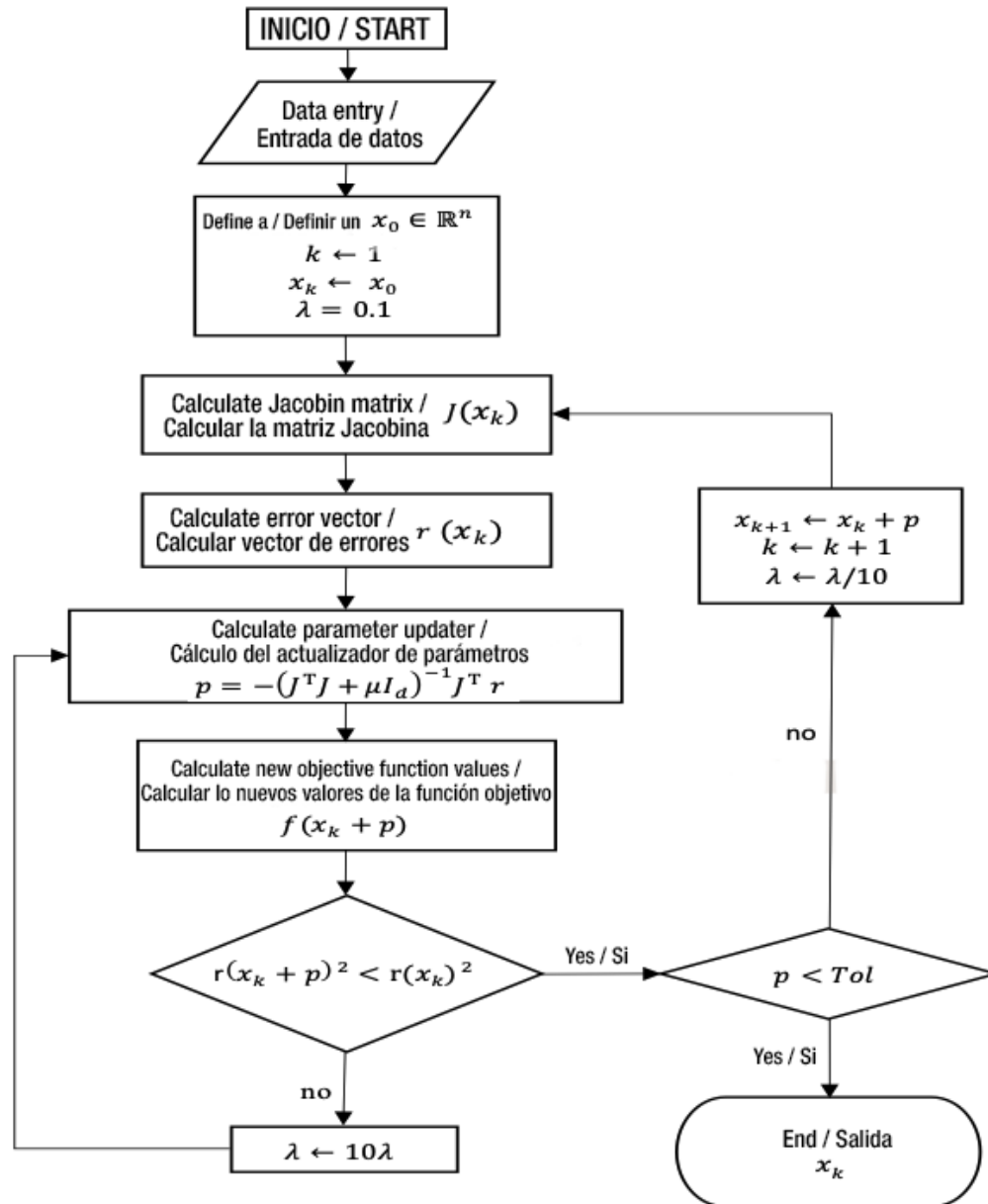


Figure 1. Levenberg-Marquardt flow chart for parameter optimization.

Figura 1. Diagrama de flujo de Levenberg-Marquardt para la optimización de parámetros.

volumetric porosity (φ) by the following inequality: $0 \leq \theta_s \leq \varphi$; nevertheless, it is important to note that, for a soil apparently saturated with water, a certain amount of air is usually trapped. Therefore, the saturated water content can be taken $\theta_s = 0.9\varphi$ (Haverkamp et al., 2016; Rogowski, 1971). In this study, θ_s will be taken as the total porosity: $\theta_s \approx \varphi$.

Laboratory experiment

Soil samples were taken from agricultural plots in the region of San Juan del Río, Querétaro, Mexico, following the methodology proposed by Reynolds and Topp (2007). The soil was sieved with a number 10 mesh (2 mm) and was outdoor dried for one week. Before

suelo (ρ_t), el contenido gravimétrico de humedad (ω_o) y la densidad del agua (ρ_w):

$$\theta_o = \left(\frac{\rho_t}{\rho_w} \right) \omega_o \quad (5)$$

La porosidad (φ) es el volumen del espacio vacío de los medios porosos, la cual se calcula a partir de la densidad aparente (ρ_t) y la densidad de las partículas de cuarzo (ρ_s):

$$\varphi = 1 - \frac{\rho_t}{\rho_s} \quad (6)$$

donde $\rho_s = 2.65 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$.

placing the soil in the column, a sample was taken and sent to the laboratory to determine the initial moisture content using the gravimetric method.

The infiltration test was carried out using two acrylic columns of different lengths and circular cross section. Both columns had a porous plate covered by a filter and placed at the bottom to retain the soil and allow water and air to escape (Figure 2). The inside of the columns were partially coated with wax to create roughness between the soil and the acrylic column. The soil was placed in the column in 5 cm thick layers at a density similar to that obtained in the field. A constant water depth was kept during the infiltration test.

Table 1, adapted by Saucedo et al. (2013), shows the mean values of some soil parameters (θ_o , θ_s , K_s and h_f) based on soil texture, using the relationships proposed by Rawls et al. (1991). To determine these values, the soils used were analyzed at the laboratory with the Bouyoucos hydrometer using the methods of the Mexican standard NOM-021-SEMARNAT-2000

El contenido de humedad a saturación (θ_s) es el volumen de agua contenido en el espacio poroso, normalmente asimilada a la porosidad volumétrica (ϕ) por la siguiente desigualdad: $0 \leq \theta_s \leq \phi$; sin embargo, es importante denotar que, en un suelo aparentemente saturado con agua, generalmente queda atrapada una cierta cantidad de aire. Por lo tanto, el contenido volumétrico de humedad a saturación puede ser tomado como $\theta_s = 0.9\phi$ (Haverkamp et al., 2016; Rogowski, 1971). En este trabajo, θ_s será tomado como la porosidad total: $\theta_s \approx \phi$.

Experimento de laboratorio

Se tomaron muestras de suelo de parcelas agrícolas de la región de San Juan del Río, Querétaro, México, siguiendo la metodología propuesta por Reynolds y Topp (2007). El suelo se tamizó con malla número 10 (2 mm) y se secó al aire libre durante una semana. Antes de colocar el suelo en la columna, se tomó una muestra para enviarla al laboratorio con el fin de obtener el contenido de humedad inicial por el método gravimétrico.

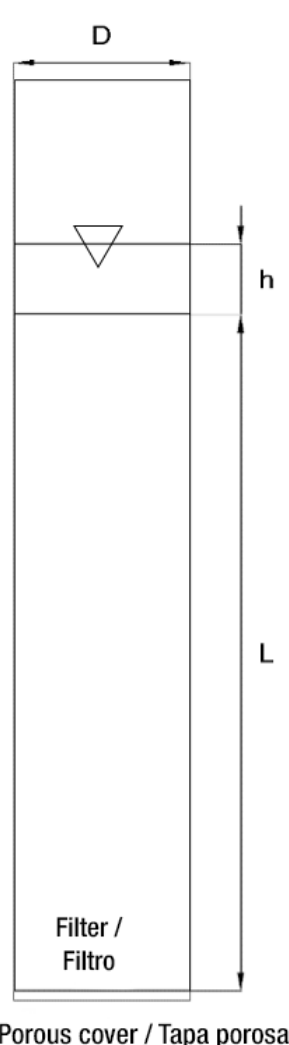


Figure 2. Schematic representation of a soil column.

Figura 2. Representación esquemática de una columna de suelo.

Table 1. Mean parameters of the Green and Ampt infiltration equation according to soil texture.**Cuadro 1. Parámetros medios de la ecuación de infiltración de Green y Ampt en función de la textura del suelo.**

Soil texture / Textura del suelo	Parameters / Parámetros			
	θ_o (cm ³ ·cm ⁻³)	θ_s (cm ³ ·cm ⁻³)	h_f (cm)	K_s (cm·h ⁻¹)
Clay / Arcilla	0.36	0.49	140.26	0.05
Silty clay / Arcillo-limoso	0.32	0.48	100.16	0.05
Silty clay loam / Franco-arcillo-limoso	0.26	0.49	60.12	0.15
Clay loam / Franco-arcilloso	0.25	0.48	36.00	0.4
Sandy clay / Arcilla-arenosa	0.25	0.42	25.72	0.5
Silt / Limo	0.14	0.50	30.52	0.8
Loam / Franco	0.20	0.46	20.04	1.5
Silt loam / Franco-limoso	0.17	0.55	30.07	1.0
Sandy clay loam / Franco-arcillo-arenoso	0.18	0.42	35.61	2.0
Sandy loam / Franco-arenoso	0.16	0.46	10.00	2.9

(Secretaría del Medio Ambiente y Recursos Naturales [SEMARNAT], 2002) and the texture triangle of the United States Department of Agriculture (USDA). Within the operation of the optimization algorithm, the following condition was included: if the difference of parameters in the current iteration with the previous one is lower than 0.00001 %, or the number of iterations is equal to 20, end the algorithm sequence and display the results.

Results and discussion

Decoding the algorithm

The optimization algorithm was programmed using the Visual Basic.net language in the Microsoft Visual Studio 2019 integrated development environment. This program can be installed on any Windows 10 platform, and the speed in RAM required is minimal, so any computer with a mid-range processor and 4 GB of RAM supports it. The program consists of four main sections: a) main menu, b) displayed data from an infiltration test, c) graphical results of measured vs. optimized irrigation water depth and d) optimization results (Figure 3).

Para realizar la prueba de infiltración, se utilizaron dos columnas de acrílico de diferente longitud y sección transversal circular. Ambas columnas tenían una placa porosa cubierta por un filtro y colocada en la parte inferior con el propósito de retener el suelo y permitir la salida del agua y el aire (Figura 2). El interior de las columnas se recubrió parcialmente con cera para crear rugosidad entre el suelo y la columna de acrílico. El suelo se colocó en la columna en capas de 5 cm de espesor a una densidad similar a la obtenida en campo. Durante la prueba de infiltración se mantuvo un tirante de agua constante.

En el Cuadro 1, adaptado por Saucedo et al. (2013), se presentan los valores medios de algunos parámetros del suelo (θ_o , θ_s , K_s y h_f) a partir de la textura del suelo, partiendo de las relaciones propuestas por Rawls et al. (1991). Para conocer estos valores, los suelos utilizados se analizaron en el laboratorio con el hidrómetro de Bouyoucos utilizando los métodos de la norma mexicana NOM-021-SEMARNAT-2000 (Secretaría del Medio Ambiente y Recursos Naturales [SEMARNAT], 2002) y el triángulo de texturas del Departamento de Agricultura de Estados Unidos de América (USDA). Dentro del funcionamiento del algoritmo de optimización se agregó la siguiente condición: si la diferencia de parámetros en

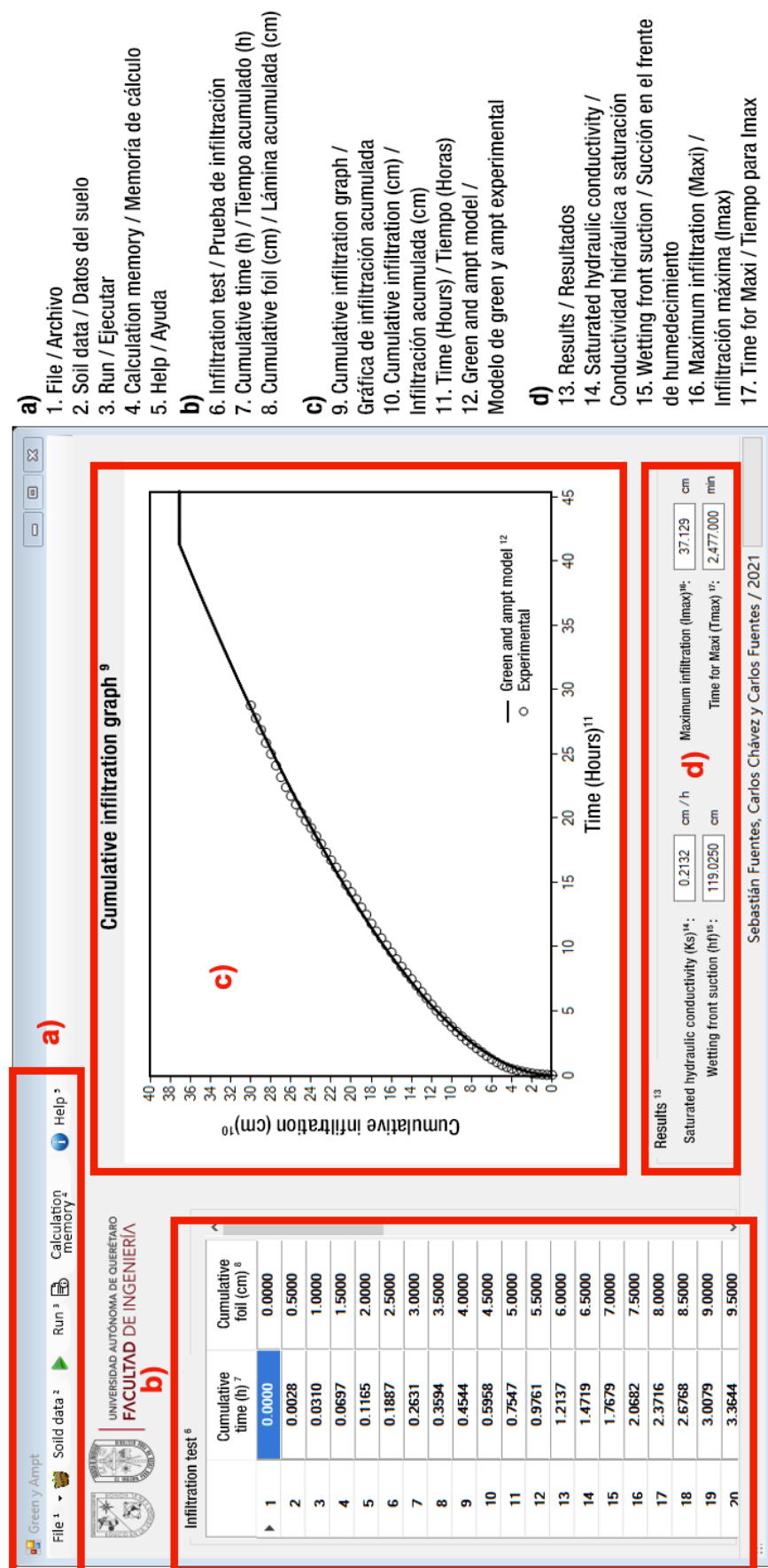


Figure 3. Main window of the computer program under development.
Figura 3. Ventana principal del programa de cómputo desarrollado.

Table 2. Routines used in the computer program.

Cuadro 2. Rutinas utilizadas en el programa de cómputo.

Titel/ Título	Routine/Rutina	Task/Acción
File/ Archivo	Import Excel data/ Importar datos de Excel	It opens data from an infiltration test in *.xls format (time and cumulative infiltration)./ Abre datos de una prueba de infiltración en formato *.xls (tiempo y lámina infiltrada acumulada).
	Open examples/ Abrir ejemplos	Data from an infiltration test is loaded, including input parameters./ Se cargan datos de una prueba de infiltración, donde también se incluyen sus parámetros de entrada.
	Save optimized data/ Guardar datos optimizados	It saves the simulated data with the optimized parameters in *.xls format (time and cumulative infiltration)./ Guarda los datos simulados con los parámetros optimizados en formato *.xls (tiempo y lámina infiltrada acumulada).
	Exit program/ Salir del programa	Closes the program./ Cierra el programa.
Soil data/ Datos del suelo	Input data/ Datos de entrada	It displays a window in which the user must enter the required input parameters (bulk density, initial moisture, water depth, infiltration test column length and soil texture)./ Muestra una ventana en la cual el usuario debe introducir los parámetros de entrada necesarios (densidad aparente, humedad inicial, carga superficial, longitud de columna de la prueba de infiltración y textura del suelo).
Run/ Ejecutar	Run/ Ejecutar	It starts the parameter optimization process, while charting the iterations in real time./ Inicia el proceso de optimización de parámetros, al mismo tiempo que grafica en tiempo real las iteraciones.
Calculation memory/ Memoria de cálculo	Calculation memory/ Memoria de cálculo	It displays a window with the results for each iteration performed by the Levenberg-Marquardt algorithm./ Muestra una ventana con los resultados en cada iteración realizada por el algoritmo de Levenberg-Marquardt.
Help/Ayuda	Help/ Ayuda	It opens a window displaying the authors' contact information./ Abre una ventana donde se muestran los datos de contacto de los autores.

Table 3. Physical characteristics of the study sites.

Cuadro 3. Propiedades físicas de los sitios de estudio.

Soil sample/ Muestra de suelo	D (cm)	ρ_t (g·cm ⁻³)	θ_s (cm ³ ·cm ⁻³)	θ_o (cm ³ ·cm ⁻³)	L (cm)	h (cm)	Texture/ Textura
S1	9.2	1.0810	0.5921	0.1462	70.0000	6.0000	Sandy loam/ Franco-arenosa
S2	8.8	1.1588	0.5627	0.1259	85.0000	6.0000	Clay/Arcillosa
S3	8.8	1.1713	0.5580	0.0280	85.0000	5.0000	Sandy loam/ Franco-arenosa

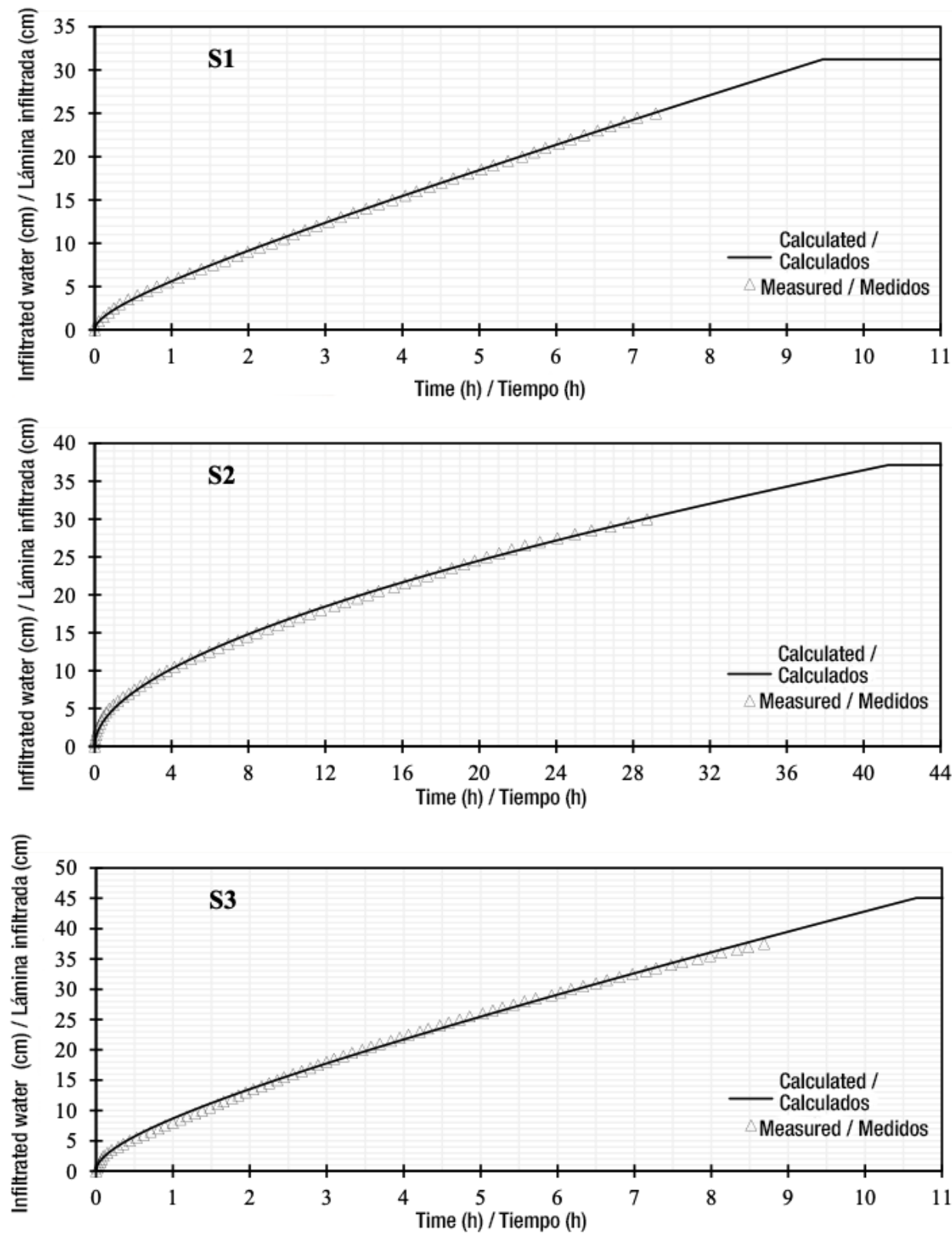


Figure 4. Comparison between infiltrated water depth measured and calculated with the Green and Ampt equation.
Figura 4. Comparación entre la lámina infiltrada medida y la calculada con la ecuación de Green y Ampt.

Table 2 shows the routines used for the proper operation of the computer program we developed. The task performed by each routine is also described.

Infiltration test

The initial conditions of the experiment are described in Table 3, showing the results of the analyses conducted at the laboratory, as well as the lengths of the columns (L) filled with soil, diameters (D) and surface water depths (h).

With the data from the initial conditions of the experiments and the infiltrated water depth over a period of time, the parameters K_s and h_f of the Green and Ampt equation were optimized according to the soil texture. The results of the optimization for each site are displayed in Figure 4, showing the fit of the Green and Ampt model to the measured values.

Table 4 shows the optimization achieved, and the root mean square error (RMSE), resulting from the infiltrated water depth measured and the theoretical infiltrated water depth. Errors lower than 0.45 cm are observed, showing that the optimization of parameters with initial values related to soil texture works adequately. It is important to highlight that, from the previous graph, it is possible to observe the good fit of the optimized model with the data measured at the laboratory.

Numerical validation

The validation of the numerical algorithm was performed to remove programming errors and check the consistency of correct solutions. Data reported in the literature were used, and the results were obtained using the one-dimensional solution of the Richards equation (Chávez et al., 2016; Fuentes et al., 2020). The data used correspond to a sandy loam soil from Montecillo, Mexico (Zataráin et al., 2003). Parameter values for this soil are: $\rho_t = 1.3607 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$,

la iteración actual con la anterior es menor a 0.00001%, o el número de iteraciones es igual a 20, termine la ejecución del algoritmo y muestre los resultados.

Resultados y discusión

Codificación del algoritmo

El algoritmo de optimización se programó en el lenguaje Visual Basic.net en el entorno de desarrollo integrado Microsoft Visual Studio 2019. Este programa se puede instalar en cualquier plataforma de Windows 10, y la velocidad en la memoria RAM que se requiere es mínima, por lo que cualquier ordenador con un procesador de gama media y 4 GB de RAM lo soporta. El programa consta de cuatro secciones principales: a) menú principal, b) datos desplegados de una prueba de infiltración, c) resultados gráficos de la lámina de riego medida vs la optimizada y d) resultados de la optimización (Figura 3).

En el Cuadro 2 se muestran las rutinas utilizadas para el adecuado funcionamiento del programa de cómputo desarrollado. Además, se describe la acción que realizan cada una de ellas.

Pruebas de infiltración

Las condiciones iniciales del experimento se describen en el Cuadro 3, donde se muestran los resultados de los análisis obtenidos en el laboratorio, así como las longitudes de las columnas (L) rellenas de suelo, los diámetros (D) y los tirantes de agua en la superficie (h).

Con los datos de las condiciones iniciales de los experimentos y la lámina infiltrada en el tiempo, se optimizaron los parámetros K_s y h_f de la ecuación de Green y Ampt en función de la textura del suelo. Los resultados de la optimización se muestran para cada sitio en la Figura 4, donde se aprecia el ajuste del modelo de Green y Ampt a los valores medidos.

Table 4. Optimized values of the site analyzed according to the soil texture.

Cuadro 4. Valores optimizados del sitio analizado en función de la textura del suelo

Soil/Sitio	$K_s \text{ (cm}\cdot\text{h}^{-1}\text{)}$	$h_f \text{ (cm)}$	RMSE (cm)/RECM (cm)
S1	2.4869	2.0000	0.1323
S2	0.2132	119.0250	0.3052
S3	2.8071	10.0561	0.4236

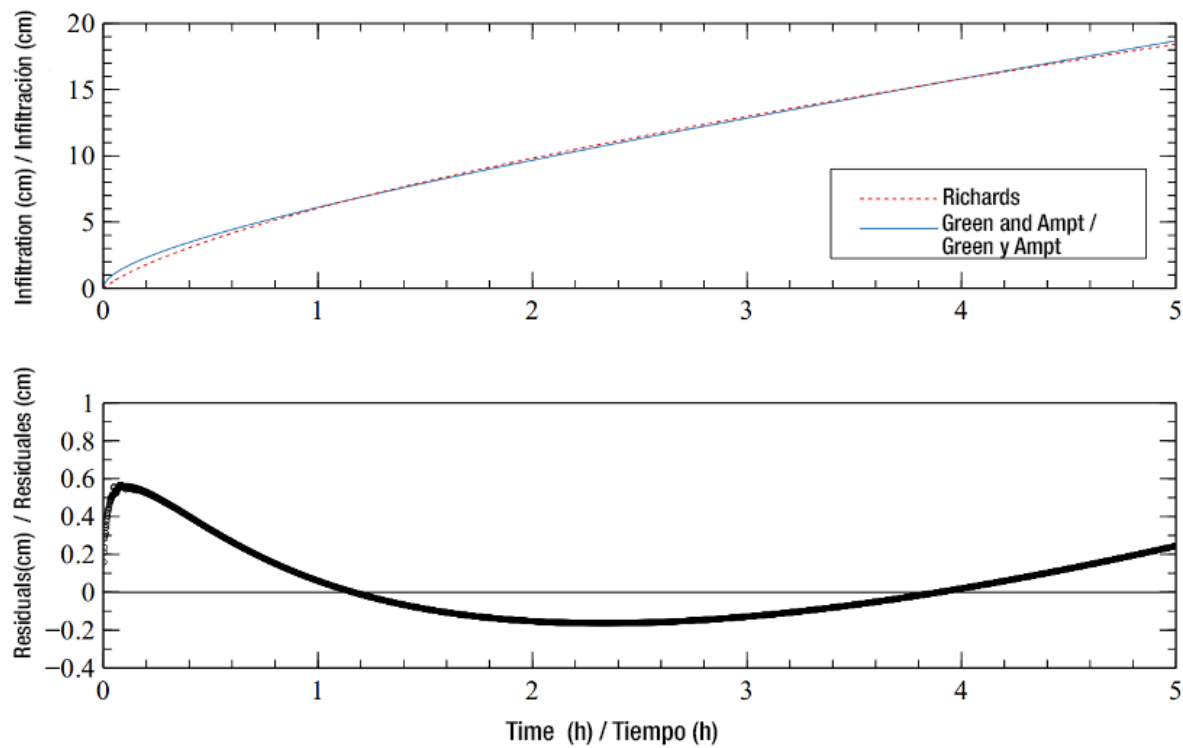


Figure 5. Comparison of the infiltrated water depth derived from the Richards equation and the one modeled with the Green and Ampt equation.
Figura 5. Comparación de la lámina infiltrada obtenida con la ecuación de Richards y la modelada con la ecuación de Green y Ampt.

Table 5. Optimized parameter values compared with those in the literature.
Cuadro 5. Valores de los parámetros optimizados comparados con los de la literatura.

Experiment / Experimento	K_s reported (cm·h ⁻¹) / K_s reportado (cm·h ⁻¹)	K_s optimized (cm·h ⁻¹) / K_s optimizado (cm·h ⁻¹)
Montecillo	1.84	2.28

$\theta_o = 0.1391 \text{ cm}^3 \cdot \text{cm}^{-3}$, $h = 1.50 \text{ cm}$, $\varphi = 0.4865 \text{ cm}^3 \cdot \text{cm}^{-3}$, $\theta_s = \varphi$ and $L = 70 \text{ cm}$. The parameters K_s and h_f of the Green and Ampt equation were optimized using the computational program according to soil texture (Figure 5).

When comparing the result and the one reported in the literature (Table 5), it is observed that there is no considerable difference, since RMSE (0.1953 cm) is considered the same, and this indicates that the result measured using the Green and Ampt model optimizing K_s and h_f varies very little.

The parameter h_f is characteristic of the Green and Ampt equation; therefore, it cannot be compared with any other parameter of other equations. However, the

El Cuadro 4 muestra la optimización obtenida, así como la raíz del error cuadrático medio (RECM), que es resultado de la lámina infiltrada medida y la lámina infiltrada teórica. Se observan errores menores a 0.45 cm, lo cual indica que la optimización de parámetros con valores iniciales relacionados con la textura del suelo funciona de manera adecuada. Es importante resaltar que, a partir de la gráfica anterior, se puede observar el buen ajuste que presenta el modelo optimizado con los datos medidos en laboratorio.

Validación numérica

La validación del algoritmo numérico se realizó para eliminar errores de programación y revisar la consistencia de soluciones correctas. Se usaron

value is adapted depending on the proportions of sand, silt and clay in soil, so it can be considered inversely proportional to K_s , because when K_s decreases, the value of h_f increases.

If only soil texture is considered for the surface irrigation design, the average K_s value for the sandy loam soil analyzed would be $2.9 \text{ cm}\cdot\text{h}^{-1}$ (Table 1). However, this type of soil is dominated by sand characteristics, which leads to K_s values higher than $1.5 \text{ cm}\cdot\text{h}^{-1}$. The range of variation between both values is very wide, which causes a substantial change in the characteristic values of infiltration.

Therefore, it is recommended to perform infiltration tests in soil columns to adequately represent the flow in a one-dimensional manner, since other tests, such as the double ring infiltrometer shows a two-dimensional flow and, in addition, there is a preferential flow along the cylinder walls, which in most cases is attributed to the infiltration velocity. The advantage of using columns with soil samples altered at the laboratory allows control of all variables, such as bulk density, soil depth, water depth, initial moisture, among others.

Temporal sensitivity of optimized infiltration test parameters

A sensitivity analysis of the Green and Ampt parameters was performed to verify how the estimation errors of the two parameters propagate to the infiltration estimates. Optimizations were made with the experimental results at different times for each site. For S1 a cumulative increment of $\Delta t = 1 \text{ h}$, for S2 a $\Delta t = 4 \text{ h}$ and for S3 a $\Delta t = 1 \text{ h}$. Figure 6 shows that the parameters have the same trend, while K_s gradually decreases, the value of h_f increases. The inverse process occurs with the same trend; this indicates that the algorithm optimizes the values according to the soil texture and the more infiltration data one has, the optimized parameters can vary considerably, either decreasing or increasing their values gradually and inversely proportional to each other. It also shows the importance of performing an infiltration test at long times, because, if it is performed at short times, the pores are not filled with water, and one would only have a value of hydraulic conductivity and not the saturated hydraulic conductivity.

The program is delimited so that each pair of new values proposed are within the limits of the parameters, i.e., $K_s > 0$ and $0 < h_f \leq 200$. Parameters are adapted according to soil texture, with emphasis on the Equation (7):

$$S^2 = 2K_s h_f \Delta \theta \quad (7)$$

datos reportados en la literatura, cuyos resultados se obtuvieron mediante la solución unidimensional de la ecuación de Richards (Chávez et al., 2016; Fuentes et al., 2020). Los datos utilizados corresponden a un suelo franco-arenoso de Montecillo, México (Zataráin et al., 2003). Los valores de los parámetros de este suelo son: $\rho = 1.3607 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$, $\theta_o = 0.1391 \text{ cm}^3\cdot\text{cm}^{-3}$, $h = 1.50 \text{ cm}$, $\varphi = 0.4865 \text{ cm}^3\cdot\text{cm}^{-3}$, $\theta_s = \varphi$ y $L = 70 \text{ cm}$. Mediante el programa de cómputo se optimizaron los parámetros K_s y h_f de la ecuación de Green y Ampt, en función de la textura del suelo (Figura 5).

Al comparar el resultado obtenido y el reportado en la literatura (Cuadro 5), se observa que no existe una diferencia considerable, ya que se considera igual la raíz del RECM (0.1953 cm), y ésta nos indica que existe poca variación del resultado medido contra el modelo de Green y Ampt optimizando K_s y h_f .

El parámetro h_f es característico de la ecuación de Green y Ampt; por ello, no puede ser comparado con ningún otro parámetro de otras ecuaciones. Sin embargo, el valor se ajusta dependiendo de las proporciones de arena, limo y arcilla del suelo, por lo que se puede considerar inversamente proporcional a K_s , ya que cuando éste disminuye, el valor de h_f aumenta.

Si únicamente se considera la textura del suelo para realizar el diseño del riego por gravedad, el valor medio de K_s para el suelo franco-arenoso analizado sería de $2.9 \text{ cm}\cdot\text{h}^{-1}$ (Cuadro 1). Sin embargo, en este tipo de suelo predominan las características de la arena, lo cual conlleva a que se tengan valores de K_s mayores a $1.5 \text{ cm}\cdot\text{h}^{-1}$. El rango de variación entre ambos valores es muy amplio, lo cual genera un cambio sustancial en los valores característicos de la infiltración.

Por lo anterior, se recomienda realizar pruebas de infiltración en columnas de suelo para representar unidimensionalmente el flujo de manera adecuada, ya que, en otro tipo de pruebas como el método de doble cilindro, normalmente se cuenta con un flujo bidimensional y, además, ocurre un flujo preferencial por las paredes de los cilindros que en la mayoría de las veces se le atribuyen a la velocidad de infiltración. La ventaja al utilizar columnas con muestras de suelo alteradas en laboratorio es que permite tener control de todas las variables, como la densidad, la profundidad, la lámina de agua, la humedad inicial, entre otras.

Sensibilidad temporal de los parámetros optimizados de la prueba de infiltración

Se realizó un análisis de sensibilidad de los parámetros de Green y Ampt para verificar cómo se propagan los errores de estimación de los dos parámetros a las estimaciones de la infiltración. Se hicieron

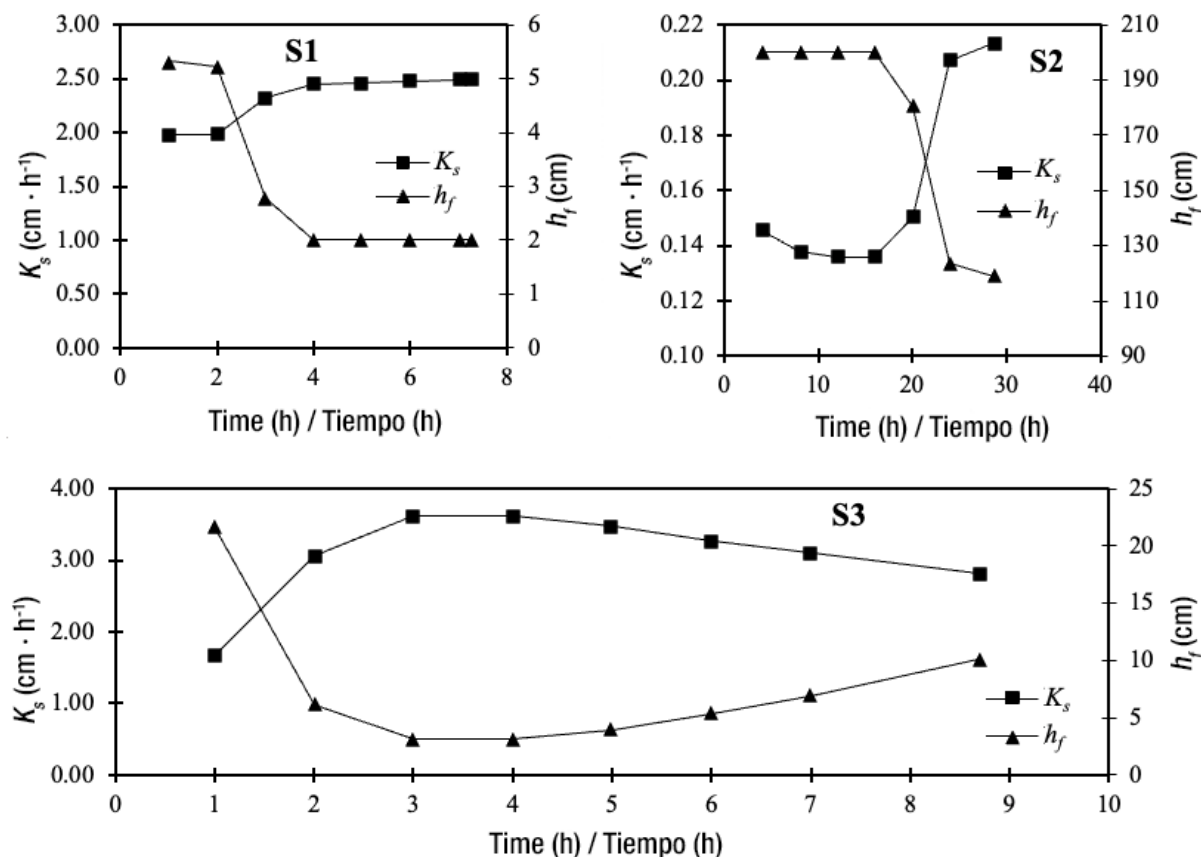


Figure 6. Evolution of K_s and h_f parameters.

Figura 6. Evolución de los parámetros K_s y h_f .

where S is the sorptivity of the porous medium (Philip, 1957). Without the use of initial parameters related to soil texture, there can be an infinite number of parameters to fit the data measured in an infiltration test.

In this study, a computer with the following characteristics was used: Intel® Core™ i7-4710MQ CPU @ 2.50 GHz and 32 GB RAM memory. The computation time required to find the optimal values of K_s and h_f in the experiments was 2 s. This is because the Green and Ampt solution requires no knowledge of values at the previous time level; therefore, it is possible to solve it exclusively in the required time, as in the exact times where it is compared with the measured data. On the other hand, the Richards equation needs the pressure values at the previous time level, which delays, in at least one iteration, the calculation of the infiltrated water depth.

Conclusions

An optimization algorithm was used to calculate the parameters K_s and h_f by solving the inverse problem of the

optimizations with the experimental results in different times for each site. In S1 an accumulated increment of $\Delta t = 1$ h, in S2 an $\Delta t = 4$ h and in S3 an $\Delta t = 1$ h. In Figure 6 it is observed that the parameters present the same tendency, while K_s decreases gradually, the value of h_f increases. The inverse process occurs with the same tendency; this indicates that the algorithm optimizes the values according to the texture of the soil and between more infiltration data are taken, the optimized parameters can vary considerably, either decreasing or increasing their values gradually and inversely proportional to each other. Also, it shows the importance of performing a long-term infiltration test, because if it is performed in short times, the pores are not completely filled with water and only a value of hydraulic conductivity and not the hydraulic conductivity at saturation would be obtained.

The program is delimited so that each pair of new values that are proposed are within the limits of the parameters; that is, $K_s > 0$ and $0 < h_f \leq 200$. The parameters are adjusted according to the texture of the soil, emphasizing in Equation (7):

Green and Ampt equation, which included reviewing the performance of the code and experimental validation with infiltration tests. The algorithm was tested using infiltration data taken from the literature, and the results found were satisfactory, with RMSE values < 0.45 cm.

The estimation of hydrodynamic parameters of saturated hydraulic conductivity and wetting front suction was performed with the Levenberg-Marquardt algorithm. The main advantage of the presented optimization is the short computational time required to optimize the parameters of the Green and Ampt equation, compared to the Richards equation reported in the literature. It was shown that, by using infiltration test data from the literature, the values derived for K_s with the proposed nonlinear optimization algorithm are very similar to those found with the Richards equation, which provides certainty and reliability when calculating the parameters.

The sensitivity analysis suggests that the duration time of the infiltration test significantly affects the K_s and h_f values, so it is recommended to perform an infiltration test up to the maximum infiltration, since variations in the infiltrated water depth with time may cause the curve to be adapted to a different pair of parameters.

Acknowledgments

The first author thanks CONACyT for the grant No. 957179, and the Universidad Autónoma de Querétaro for the support provided to carry out his studies in the PhD in Engineering program.

End of English version

References / Referencias

- Ali, S., & Islam, A. (2018). Solution to Green–Ampt infiltration model using a two-step curve-fitting approach. *Environmental Earth Sciences*, 77(7), 1-9. <https://doi.org/10.1007/s12665-018-7449-8>
- Castiglioni, M. G., Behrends-Kraemer, F., & Marquez-Molina, J. J. (2018). Conductividad hidráulica saturada determinada por distintos procedimientos en suelos con alta humedad inicial. *Ciencia del suelo*, 36(2), 158-169. https://www.researchgate.net/publication/336412222_Conductividad_hidraulica_saturada_determinada_por_distintos_procedimientos_en_suelos_con_alta_humedad_inicial
- Chávez, C., Fuentes, C., & Mota, C. (2016). Programa para modelar la transferencia de agua usando la ecuación de Richards 1D. Patente núm. INDAUTOR 03-2016-110812360600-01.
- Chávez, C., Fuentes, S., Fuentes, C., Brambila-Paz, F., & Trejo-Alonso, J. (2022). How surface irrigation contributes to climate change resilience - a case study of practices in Mexico. *Sustainability*, 14(13), 7689. <https://doi.org/10.3390/su14137689>

$$S^2 = 2K_s h_f \Delta \theta \quad (7)$$

donde S es la sorbilidad del medio poroso (Philip, 1957). Sin el uso de parámetros iniciales relacionados con la textura del suelo, pueden existir una infinidad de parámetros de ajuste de los datos medidos en una prueba de infiltración.

En este trabajo se utilizó un ordenador con las siguientes características: Procesador Intel® Core™ i7-4710MQ CPU @ 2.50 GHz y memoria RAM de 32 GB. El tiempo de cómputo requerido para encontrar los valores óptimos de K_s y h_f en los experimentos fue de 2 s. Esto debido a que la solución de Green y Ampt no requiere del conocimiento de valores en el nivel de tiempo anterior; por lo tanto, es posible resolverla exclusivamente en el tiempo requerido, como en los tiempos exactos donde se compara con los datos medidos. Por su parte, la ecuación de Richards requiere los valores de presión en el nivel de tiempo anterior, lo cual retrasa, en al menos una iteración, el cálculo de la lámina infiltrada.

Conclusiones

Se implementó un algoritmo de optimización para calcular los parámetros K_s y h_f mediante la solución del problema inverso de la ecuación de Green y Ampt, lo cual incluyó la revisión del funcionamiento del código y la validación experimental con pruebas de infiltración. El algoritmo se puso a prueba utilizando datos de infiltración tomados de la literatura, y los resultados encontrados fueron satisfactorios, con valores de RECM < 0.45 cm.

La estimación de los parámetros hidrodinámicos de conductividad hidráulica a saturación y succión en el frente de humedad se realizó con el algoritmo de Levenberg-Marquardt. La principal ventaja de la optimización presentada es el poco tiempo de cómputo que requiere para optimizar los parámetros de la ecuación de Green y Ampt, comparado con la ecuación de Richards reportada en la literatura. Se mostró que, al usar datos de pruebas de infiltración de la literatura, los valores obtenidos de K_s con el algoritmo de optimización no lineal propuesto son muy similares a los encontrados con la ecuación de Richards, lo cual brinda certeza y confiabilidad al realizar el cálculo de los parámetros.

El análisis de sensibilidad indica que el tiempo de duración de la prueba de infiltración afecta significativamente los valores K_s y h_f , por lo que se recomienda realizar una prueba de infiltración hasta la infiltración máxima, ya que las variaciones en la lámina infiltrada, con el paso del tiempo, pueden provocar que la curva se ajuste a un diferente par de parámetros.

- Chávez, C., Limón-Jiménez, I., Espinoza-Alcántara, B., López-Hernández, J. A., Bárcenas-Ferruzca, E., & Trejo-Alonso, J. (2020). Water-use efficiency and productivity improvements in surface irrigation systems. *Agronomy*, 10(11), 1759. <https://doi.org/10.3390/agronomy10111759>
- Chávez, C., Mota, C., Fuentes, C., & Quevedo, A. (2018). Modelación bidimensional de la infiltración del agua en surcos aplicando el gradiente conjugado. *Tecnología y Ciencias del Agua*, 9(1), 89-100. <https://doi.org/10.24850/j-tyca-2018-01-06>
- Chen, L., Xiang, L., Young, M. H., Yin, J., Yu, Z., & Genuchten, M. T. (2015). Optimal parameters for the Green-Ampt infiltration model under rainfall conditions. *Journal of Hydrology and Hydromechanics*, 63(2), 93-101. <https://doi.org/10.1515/johh-2015-0012>
- Cornejo-Zuniga, O., & Rebolledo-Vega, R. (2016). Estimación de parámetros en modelos no lineales: algoritmos y aplicaciones. *Revista EIA*, 13(25), 81-98. <https://revistas.eia.edu.co/index.php/reveia/article/view/1019/976>
- Damodhara-Rao, M., Raghuwanshi, N. S., & Singh, R. (2006). Development of a physically based 1D-infiltration model for irrigated soils. *Agricultural Water Management*, 85(1-2), 165-174. <https://doi.org/10.1016/j.agwat.2006.04.009>
- Darcy, H. (1856). Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Hachette Livre BNF.
- Fuentes, S., Fuentes, C., Saucedo, H., & Chávez, C. (2022). Border irrigation modeling with the barré de Saint-Venant and Green and Ampt equations. *Mathematics*, 10(7), 1039. <https://doi.org/10.3390/math10071039>
- Fuentes, C., Parlange, J. Y., & Palacios-Vélez, O. (2012). Teoría de la infiltración. In: Fuentes, C. & Rendón, L. (Eds.), *Riego por gravedad* (pp. 142-197). Universidad Autónoma de Querétaro.
- Fuentes, S., Trejo-Alonso, J., Quevedo, A., Fuentes, C., & Chávez, C. (2020). Modeling soil water redistribution under gravity irrigation with the Richards equation. *Mathematics*, 8(9), 1581. <https://doi.org/10.3390/math8091581>
- Gómez-Tagle, C. A., Gómez-Tagle, R. A. F., Batlle-Sales, J., Zepeda-Castro, H., Guevara-Santamaría, M. A., Maldonado, L. S., & Pintor A. J. E. (2008). Conductividad hidráulica saturada de campo: uso de un infiltrómetro de carga constante y anillo sencillo. *Terra Latinoamericana*, 26(4), 287-297. https://www.researchgate.net/publication/237036591_CONDUCTIVIDAD_HIDRAULICA_SATURADA_DE_CAMPO_USO_DE_UN_INFILTROMETRO_DE_CARGA_CONSTANTE_Y_ANILLO_SENCILLO
- Green, W. H., & Ampt, G. A. (1911). Studies on soil physics, I: The flow of air and water through soils. *The Journal of Agricultural Science*, 4(1), 1-24.
- Haverkamp, R., Debionne, S., Angulo-Jaramillo, R., & de Condappa, D. (2016). Soil properties and moisture movement in the unsaturated zone. In: Cushman, J. H., & Tartakovsky, D. M. (Eds.), *The Handbook of Groundwater Engineering* (pp. 149-190). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781315371801>
- Ma, Y., Feng, S., Su, D., Gao, G., & Huo, Z. (2010). Modeling water infiltration in a large layered soil column with a modified Green-Ampt model and HYDRUS-1D. *Computers*

Agradecimientos

El primer autor agradece al CONACyT por la beca otorgada No. 957179, así como a la Universidad Autónoma de Querétaro por el apoyo brindado para realizar los estudios en el programa de Doctorado en Ingeniería.

Fin de la versión en español

- and Electronics in Agriculture, 71(1), 40-47. <https://doi.org/10.1016/j.compag.2009.07.006>
- Malek, K., & Peters, R. T. (2011). Wetting pattern models for drip irrigation: New empirical model. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 137(8), 530-536. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)IR.1943-4774.0000320](https://doi.org/10.1061/(ASCE)IR.1943-4774.0000320)
- Moré, J. J. (1978). The Levenberg-Marquardt algorithm: Implementation and theory. In: Watson, G. A. (Ed), *Numerical Analysis* (pp. 105-116). Springer. <https://doi.org/10.1007/BFb0067700>
- Naghedifar, S. M., Ziaei, A. N., & Ansari, H. (2020). Numerical analysis and optimization of triggered furrow irrigation system. *Irrigation Science*, 38(3), 287-306. <https://doi.org/10.1007/s00271-020-00672-5>
- Philip, J. R. (1957). The theory of infiltration: 4. Sorptivity and algebraic infiltration equations. *Soil Science*, 84(3), 257-264. <https://doi.org/10.1097/00010694-195709000-00010>
- Rawls, W. J., Gish, T. J., & Brakensiek, D. L. (1991). Estimating soil water retention from soil physical properties and characteristics. In: Lal, R., & Stewart, B. A. (Eds.), *Soil restoration* (pp. 213-234). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3144-8_5
- Rendón, L., Saucedo, H., & Fuentes, C. (2012). Diseño del riego por gravedad. In: Fuentes, C. & Rendón, L. (Eds.), *Riego por gravedad* (pp. 324-357). Universidad Autónoma de Querétaro.
- Reynolds, W. D., & Topp, G. C. (2007). Soil water analyses: Principles and parameters. In: Carter, M. R. & Gregorich, E. G. (Eds.), *Soil sampling and methods of analysis* (pp. 913-939). CRC Press.
- Richards, L. A. (1931). Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*, 1(5), 318-333. <https://doi.org/10.1063/1.1745010>
- Rogowski, A. S. (1971). Watershed physics: model of the soil moisture characteristic. *Water Resources Research*, 7(6), 1575-1582. <https://doi.org/10.1029/WR007i006p01575>
- Saucedo, H., Zavala, M., Fuentes, C., & Castanedo, V. (2013). Gasto óptimo en riego por melgas. *Tecnología y Ciencias del Agua*, 4(3), 135-148. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2007-24222013000300008
- Saucedo, H., Zavala, M., & Fuentes, C. (2015). Diseño de riego por melgas empleando las ecuaciones de Saint-Venant, y Green y Ampt. *Tecnología y Ciencias del Agua*, 6(5), 103-112.
- Saxton, K. E., & Rawls, W. J. (2006). Soil water characteristic estimates by texture and organic matter for hydrologic solutions. *Soil Science Society of America Journal*, 70(5), 1569-1578. <https://doi.org/10.2136/sssaj2005.0117>

- Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales (SEMARNAT). (2002). *Norma Oficial Mexicana NOM-021-RECNAT-2000, que establece las especificaciones de fertilidad, salinidad y clasificación de suelos. Estudios, muestreo y análisis*. SEMARNAT. <https://biblioteca.semarnat.gob.mx/janium/Documentos/Ciga/libros2009/DO2280n.pdf>
- Šimůnek, J., & Hopmans, J. W. (2018). Parameter optimization and nonlinear fitting. In: Dane, J. H. & Topp, G. C. (Eds.), *Methods of soil analysis, Part 1, Physical methods* (pp. 139-157). Soil Science Society of America. <https://doi.org/10.2136/sssabookser5.4.c7>
- Trejo-Alonso, J., Fuentes, C., Chávez, C., Quevedo, A., Gutierrez-Lopez, A., & González-Correa, B. (2021). Saturated hydraulic conductivity estimation using artificial neural networks. *Water*, 13(5), 1-15. <https://doi.org/10.3390/w13050705>
- Trejo-Alonso, J., Quevedo, A., Fuentes, C., & Chávez, C. (2020). Evaluation and development of pedotransfer functions for predicting saturated hydraulic conductivity for Mexican soils. *Agronomy*, 10(10), 1516. <https://doi.org/10.3390/agronomy10101516>
- Xiang, L., Ling, W., Zhu, Y., Chen, L., & Yu, Z. (2016). Self-adaptive Green-Ampt infiltration parameters obtained from measured moisture processes. *Water Science and Engineering*, 9(3), 256-264. <https://doi.org/10.1016/j.wse.2016.05.001>
- Zataráin, F., Fuentes, C., Rendón, L., & Vauclin, M. (2003). Propiedades hidrodinámicas efectivas del suelo en el riego por melgas. *Ingeniería Hidráulica en México*, 18(3), 5-15. http://revistatyca.org.mx/ojs/index.php/tyca/article/view/945/pdf_1