

Análisis Hidrodinámico del Flujo Oscilatorio Reciprocatante en Ducto Cilíndrico Finito

¹J. L. Luviano Ortiz, ¹A. Hernández Guerrero, ²E. Ramos, ¹J. M. Luna

¹ Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Guanajuato.
Apdo. 215A, Salamanca, Guanajuato, México, Tel. 464-6479940. Fax (464) 2311
j_luviano@yahoo.com.mx, abelh@salamanca.ugto.mx, luna_fimee@yahoo.com.mx

²Centro de Investigación en Energía
Universidad Nacional Autónoma de México
Apdo. 34 62580, Temixco, Morelos, México
erm@cie.unam.mx

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio numérico tridimensional para analizar el comportamiento hidrodinámico de un flujo oscilatorio reciprocatante de un fluido incompresible que se encuentra en el interior de un ducto cilíndrico de longitud finita. Para generar el flujo reciprocatante se colocaron en los extremos del ducto dos pistones que se desplazan con un movimiento armónico y en fase. El número de Womersley fue de 16 y el desplazamiento axial/diámetro fue de uno. El comportamiento hidrodinámico del flujo es considerado y discutido para las fases de aceleración y desaceleración del ciclo. Los resultados numéricos muestran la generación de vórtices para diferentes fases del ciclo y uno de los resultados específicos más representativos encontrados es que en la posición de 185°, después de que los pistones alcanzan su máximo desplazamiento, el patrón del flujo pierde la simetría axial que se había presentado para fases anteriores del ciclo.

Abstract

A numerical three-dimensional study has been carried out to analyze the hydrodynamic behavior of an incompressible periodically reversing flow in a cylindrical pipeline of finite length. In order to generate the reciprocating flow were placed at the ends of the pipeline two pistons that move with a harmonic movement and in phase. The Womersley number was set to 16 and the axial displacement/diameter was set to 1. The flow patterns are discussed for the accelerating and decelerating phases during the oscillating cycle. The numerical results show the generation of vortices for different phases. An interesting result found is that in the position of 185°, just after the pistons reached the position of maximum displacement, the flow pattern losses the axial symmetry that had been previously developed.

Palabras clave:

Flujo oscilatorio reciprocatante, ducto finito, número de Womersley, flujo incompresible

Key words:

Periodically reversing flow, finite length pipeline, Womersley number, incompressible flow

Nomenclatura

A_0	Amplitud de la oscilación, x_{max} / D
D	Diámetro del ducto [m]
L_p	Longitud del ducto [m]
p, P	Presión del fluido, dimensional [Pa] y adimensional
r, R	Coordenada radial, dimensional [m] y adimensional
t, T	Tiempo dimensional [s] y adimensional
u_r, U_r	Velocidad radial, dimensional [m/s] y adimensional
u_x, U_x	Velocidad axial, dimensional [m/s] y adimensional
u_β, U_β	Velocidad azimutal, dimensional [m/s] y adimensional
$u_{x_{max}}, U_{x_{max}}$	Velocidad axial máxima promedio de la sección transversal, dimensional [m/s] y adimensional
x, X	Coordenada axial, dimensional [m] y adimensional
x_{max}	Desplazamiento máximo del pistón [m]

Símbolos Griegos

λ	Número de Womersley, $\sqrt{\omega/v}$
μ	Viscosidad del fluido [Pa·s]
ν	Viscosidad cinemática del fluido [m ² /s]
ϕ	Ángulo de fase [°]
ω	Frecuencia oscilatoria [rad/s]

Introducción

Los flujos oscilatorios en conductos cilíndricos se encuentran con frecuencia en importantes aplicaciones de ingeniería tales como motores de combustión interna y motores Stirling. Las mediciones pioneras realizadas por Richardson y Tyler (1929) en flujos oscilatorios en conductos de sección circular, indicaron que bajo condiciones adecuadas, la velocidad

axial máxima del fluido ocurre cerca de la pared. Este fenómeno es conocido como *efecto anular* y contrasta con el perfil de Poiseuille en el que la velocidad axial máxima ocurre en el centro del conducto. Una solución exacta a las ecuaciones que describen el flujo dentro de un conducto circular sujeto a una diferencia de presiones que depende del tiempo de manera periódica fue encontrada por Womersley (1955). Uchida (1956) obtuvo una solución analítica exacta para los perfiles de velocidad de un flujo pulsante superpuesto a un flujo de velocidad constante.

Hino *et al.* (1976) estudiaron experimentalmente la transición del flujo usando un anemómetro de hilo caliente. El ducto usado por ellos tiene una asimetría en las condiciones de frontera; mientras en un extremo colocaron un pistón, el otro está abierto a la atmósfera. Sus mediciones mostraron que para los valores del número de Reynolds variando de 105 a 5830, y para los valores del parámetro de Stokes variando de 1.35 a 6.19 se tenía un flujo laminar durante la fase de aceleración en la primera mitad del ciclo, y para números de Reynolds oscilatorios grandes, un flujo turbulento durante la fase de desaceleración.

Otros estudios teóricos como los de Rao y Devanathan (1973) y Hall (2000) usaron perturbaciones para desarrollar la formulación del flujo pulsante en un tubo de sección transversal variando lentamente. Del mismo modo, Ray *et al.* (2002) consideraron el problema inverso en el cual la razón del flujo máximo pulsante es especificada en lugar del gradiente de presión. Estos investigadores realizaron experimentos para confirmar la validez de sus modelos. En un contexto similar, Das y Arakeri (1996) presentaron soluciones analíticas del gradiente de presión resultante y la distribución de velocidad para una razón del flujo volumétrico variando con el tiempo en un ducto. Se asumió que el flujo era laminar y completamente desarrollado. Un estudio similar sobre flujo pulsante en un canal con variación en la razón del flujo volumétrico fue presentado por Muntges y Majdalani (1974). Sin embargo, ninguno de estos estudios ha sido comprobado por las validaciones experimentales.

Zhao y Cheng (2005) investigaron experimentalmente la transición a la turbulencia de un flujo oscilatorio reciprocativo en un tubo con condiciones de frontera simétricas y concluyeron que la desestabilización del flujo laminar ocurre también en la fase de desaceleración, confirmando lo observado por Hino *et al.* (1976). Aunque ahora se sabe que para ciertas fases del ciclo el flujo axisimétrico pierde estabilidad, las características físicas de la desestabilización son todavía desconocidas. En este trabajo describimos con detalle uno de los mecanismos de la pérdida de estabilidad usando un modelo que incluye la solución numérica de las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento.

Definición del Problema

Considérese un flujo oscilatorio reciprocativo como el mostrado en la Figura 1 y que consiste fundamentalmente de un conducto de longitud L_p y diámetro D ($D = L_p/5$). La oscilación del flujo es inducida por dos pistones que se mueven de

manera sinusoidal con una frecuencia (ω) y en fase (frecuencia relativa cero) dentro del cilindro. El desplazamiento máximo y la velocidad máxima de los pistones se denotan x_{\max} y $u_{x,\max}$, respectivamente. Se supone que el espacio dentro del ducto está lleno de un fluido newtoniano e incompresible. La velocidad u_m de los pistones está dada por

$$u_{x,m} = u_{\max} \sin \phi \quad (1)$$

donde el ángulo (ϕ), está relacionado a la frecuencia de oscilación (ω) y el tiempo (t) a través de la expresión $\phi = \omega t$. Debe señalarse que la velocidad promedio máxima ($u_{x,\max}$) de la sección transversal está relacionada con el desplazamiento máximo del pistón (x_{\max}) por

$$u_{x,m} = \frac{x_{\max} \omega}{2} \quad (2)$$

Como condición de frontera, se considera que las componentes axial, azimutal y radial de la velocidad son igual a cero en todas las secciones de la pared que no son móviles, y que en las caras de los pistones, las componentes radial y azimutal son cero y que la componente axial tiene un valor igual a la velocidad del pistón.

En este trabajo, se supone que los pistones se desplazan de manera sinusoidal, con la misma frecuencia y con una fase relativa de medio ciclo. Sólo se explorarán casos en los que las velocidades son suficientemente bajas, como para despreciar los efectos de compresibilidad del fluido.

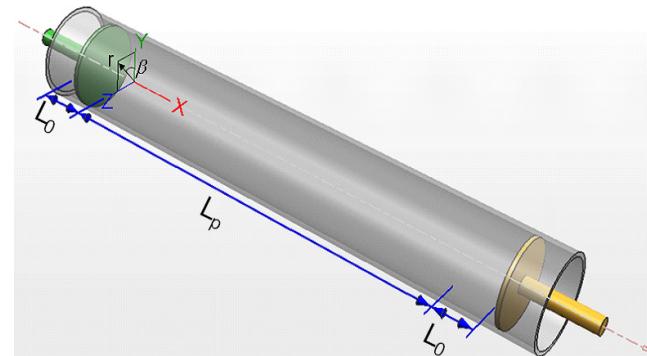


Figura 1. Geometría del conducto en el que se simulará el flujo oscilatorio reciprocativo. El eje de coordenadas cilíndricas (r, β, x) está fijo respecto a las paredes laterales y está alineado con el eje de simetría del dispositivo.

Ecuaciones de Conservación y Condiciones de Frontera Parámetros Adimensionales

El escalamiento de las variables y los parámetros se hace de acuerdo a las definiciones siguientes

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{D}, & A_0 &= \frac{x_{\max}}{D}, & R &= \frac{r}{D} \\ U_x &= \frac{u_x}{u_{x,\max}}, & U_r &= \frac{u_r}{u_{x,\max}}, & \phi &= \omega t \\ U_\beta &= \frac{u_\beta}{u_{x,\max}}, & P &= \frac{P}{\rho u_{x,\max}^2}, & T &= \omega t \end{aligned} \quad (3)$$

Ecuaciones de Conservación

En coordenadas cilíndricas, las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento pueden ser escritas en forma adimensional como:

Ecuación de conservación de masa.

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R U_r) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} (U_\beta) + \frac{\partial}{\partial X} (U_x) = 0 \quad (4)$$

En la expresión anterior, U_r , U_β y U_x son las componentes de la velocidad en las direcciones r , β y x respectivamente.

Ecuaciones de conservación cantidad de movimiento.

Dirección radial r :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_r}{\partial T} + \frac{A_0}{2} \left(U_r \frac{\partial U_r}{\partial R} + \frac{U_\beta}{R} \frac{\partial U_r}{\partial \beta} - \frac{U_\beta^2}{R} + U_x \frac{\partial U_r}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial R} \right) = \\ \frac{1}{4\lambda^2} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R U_r) \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \beta^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial U_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial X^2} \right] \end{aligned} \quad (5a)$$

Dirección azimutal β :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\beta}{\partial T} + \frac{A_0}{2} \left(U_r \frac{\partial U_\beta}{\partial R} + \frac{U_\beta}{R} \frac{\partial U_\beta}{\partial \beta} + \frac{U_r U_\beta}{R} + U_x \frac{\partial U_\beta}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \beta} \right) = \\ \frac{1}{4\lambda^2} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R U_\beta) \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial \beta^2} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial U_r}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial X^2} \right] \end{aligned} \quad (5b)$$

Dirección axial x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_x}{\partial T} + \frac{A_0}{2} \left(U_r \frac{\partial U_x}{\partial R} + \frac{U_\beta}{R} \frac{\partial U_x}{\partial \beta} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial X} \right) = \\ \frac{1}{4\lambda^2} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U_x}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 U_x}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial X^2} \right] \end{aligned} \quad (5c)$$

Condiciones de Frontera

Las condiciones de frontera para la velocidad adoptada en el presente análisis numérico son de no deslizamiento en las paredes del conducto; esto es $U_r = U_\beta = U_x = 0$ en las paredes inmóviles. La posición de los pistones y las condiciones de frontera para velocidad de los pistones en forma adimensional son:

Pistón izquierdo:

$$\begin{aligned} X = -\frac{1}{2} A_0 [1 + \cos(\phi)] \\ U_x = \frac{u_x}{u_{x,\max}} = \sin(\phi) \end{aligned} \quad (6)$$

Pistón derecho:

$$\begin{aligned} X = \frac{L_p}{D} + \frac{1}{2} A_0 [1 - \cos(\phi)] \\ U_x = \frac{u_x}{u_{x,\max}} = \sin(\phi) \end{aligned} \quad (7)$$

Procedimiento Numérico

La conversión de las ecuaciones diferenciales de conservación en ecuaciones algebraicas, se hizo usando la técnica de volumen finito. El flujo oscilatorio implica variaciones temporales, como se muestra en las Ecuaciones (5, 6 y 7), y por lo tanto, la simulación debe hacerse como función del tiempo.

A fin de simular los pistones se propuso una malla deformable en la cual cada nodo adquirió una nueva posición en cada paso de tiempo. En los cálculos numéricos se encontró conveniente romper la región de cálculo en tres diferentes tipos de malla: una malla independiente del tiempo para la zona central del conducto y dos mallas móviles en los extremos.

Resultados

Los resultados mostrados en este trabajo corresponden al comportamiento hidrodinámico del flujo reciprocante para un número de Womersley $\lambda = 16$ y con una frecuencia oscilatoria de $\omega = 0.1024$ rad/s.

Las propiedades dinámicas del flujo indican que se pueden distinguir dos comportamientos cualitativos: el estado transitorio y el estado estacionario. En el transitorio, el flujo cambia su estructura como función del tiempo y el patrón de movimiento es dependiente de las condiciones iniciales. En el estado estacionario, aunque el flujo sigue dependiendo del tiempo, después de un determinado ciclo, se encuentra el mismo patrón de movimiento. En este modo, el flujo es independiente de las condiciones iniciales y basta con describir la dinámica para un ciclo, pues este comportamiento se repite periódicamente para ciclos futuros. Estrictamente hablando, el estado estacionario sólo se alcanza de manera asintótica, pero dada la precisión finita de los cálculos numéricos, se puede considerar que después de un tiempo de cálculo, se ha alcanzado el estado estacionario. En este trabajo, sólo se discutirán los resultados obtenidos en el estado estacionario. En la Figura 2 se muestra la comparación de la solución obtenida para el modelo numérico en el conducto cilíndrico con respecto a la solución analítica presentada por Uchida (1956) para el perfil de velocidad. La solución de Uchida (1956) para el desplazamiento $\phi = 220^\circ$ es mostrada con rombos y se puede observar que se tiene una buena aproximación con la solución obtenida en el presente trabajo.

En las figuras correspondientes a los campos de velocidad (Figuras (3-10)) se tienen dos líneas amarillas verticales en cada uno de los lados del ducto. Las líneas amarillas en los extremos del ducto corresponden a la posición de los pisto-

nes mientras que las otras dos líneas amarillas corresponden al máximo desplazamiento que los pistones alcanzan. Por lo tanto, cuando uno de los pistones se localice cerca de su máximo desplazamiento sólo se observará una línea vertical amarilla en ese extremo pues la línea correspondiente a la posición del pistón se superpondrá con la línea que corresponde al máximo desplazamiento del pistón.

Se inicia la descripción del comportamiento, a partir de la posición $\phi = 26^\circ$. En esta posición el fluido se está acelerando en la dirección $+X$, su comportamiento es similar al de un flujo unidireccional pues la mayor velocidad del fluido se encuentra en un radio mayor a $R > 2/5$.

Entre las fases $90^\circ < \phi < 180^\circ$ los pistones, al igual que el fluido, se están desacelerando. Cerca de la posición $\phi = 150^\circ$ (Figura 3), la velocidad del flujo cercano a la pared ha disminuido y el flujo localizado cerca de la pared del ducto retorna a pesar de que en esta posición los pistones no han alcanzado aún su máximo desplazamiento. Debido a esto, en este punto se forma un flujo a contracorriente, ya que el fluido localizado en el centro del ducto continúa moviéndose en la dirección del movimiento de los pistones ($+X$) mientras que el fluido cerca de la pared se desplaza en la dirección contraria ($-X$). La estructura de la capa límite en esta zona del ducto y en esta fase corresponde a la de la capa de Stokes para un flujo oscilatorio. El flujo que retorna lo hace hasta una posición cercana a $X=3/2$, donde es reincorporado al fluido que fluye a lo largo de la parte central del ducto.

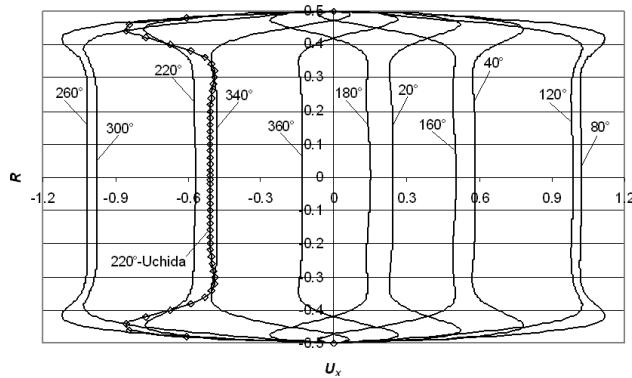


Figura 2. Verificación del perfil de velocidad adimensional con la solución analítica de Uchida [9].

En la posición $\phi = 150^\circ$ (Figura 3) la velocidad de los pistones es menor que la velocidad del fluido localizado en la parte central del ducto, por lo tanto, en esta posición el pistón es una barrera que frena al fluido y esto ocasiona que el fluido retrone muy lentamente cerca de las paredes del ducto.

Conforme el ángulo de desplazamiento (ϕ) se incrementa, la velocidad del flujo cercano a la pared también incrementa su magnitud, mientras que la velocidad de flujo localizado en el centro del ducto decrece y el comportamiento del flujo en la parte central del ducto pasa a ser similar al de un flujo unidireccional.

En la posición $\phi = 170^\circ$, el fluido cercano a la pared del duc-

to retorna hasta una posición próxima a $X=4/5$ en la cual es reincorporado al fluido que fluye por la parte central del cilindro (ver Figura 4). Las líneas amarillas verticales localizadas en los extremos del ducto representan la posición de los pistones. Para esta fase, $\phi = 170^\circ$ el comportamiento del flujo en la parte central del ducto es prácticamente unidireccional. Además, en esta posición el pistón derecho hace la función de una barrera que frena al fluido que fluye por la parte central del ducto puesto que la velocidad del pistón es menor que la velocidad del flujo, obligando de esta manera a que el flujo retrone cerca de las paredes del ducto. En la Figura 4 se puede apreciar además que el fluido que retorna junto a las paredes del ducto forma un flujo a contracorriente con el fluido que se mueve en la parte central del ducto en la dirección $+X$.

En la posición $\phi = 176^\circ$, el fluido que se encuentra cerca de las paredes en la dirección $-X$, retorna hasta una posición cercana a $X=1/2$ y es reincorporado al fluido que se mueve en la parte central del ducto. Además, en la parte derecha del ducto se continúa frenando el flujo. En la posición $\phi = 178.5^\circ$ (Figura 5) el flujo cercano al pistón derecho forma un vórtice con estructura similar a la de un toroide cuyo centro está localizado en $X=581/100$, $R=11/50$. Una parte del fluido que se mueve en la parte central del ducto diverge para formar el vórtice mientras que otra parte sigue moviéndose a lo largo del eje axial. En la posición $\phi = 179.25^\circ$ (Figura 6) el flujo axial localizado justamente antes del vórtice es forzado a chocar con esta estructura. En esta posición, se genera un punto de estancamiento debido a la colisión de frente de los dos flujos axiales. En el corte bidimensional esta estructura se puede identificar como un *punto silla*. En la zona más cercana al pistón, se forma un segundo punto silla que en conjunto con el primero definen el vórtice. Para esta fase, el centro de vórtice está localizado en $X=146/25$, $R=269/1000$, mientras que las posiciones de los dos puntos silla son $X=563/100$, y $X=29/5$ respectivamente.

En la posición $\phi = 180^\circ$ (Figura 7), cerca del pistón izquierdo y sobre el eje axial, se localiza un punto de estancamiento generado por la unión del fluido que se mueve cerca de las paredes y es reincorporado al fluido que se encuentra en la parte central del ducto. En esta fase, el centro del vórtice derecho se ha desplazado a la posición $X=1463/250$ y $R=283/1000$ y la posición de cada uno de los dos puntos silla es $X=277/50$, y $X=117/20$ respectivamente. A partir de esta fase ($\phi = 180^\circ$), el punto silla localizado en el lado izquierdo seguirá desplazándose hacia el lado derecho, mientras el otro punto silla, localizado en el lado derecho se desplazará hacia el lado izquierdo y ambos irán unidos al vórtice que simultáneamente incrementa su tamaño.

Para $\phi = 182^\circ$ (Figura 8) por una dinámica similar a la descrita anteriormente, se forma un punto silla en una posición cercana al pistón izquierdo, en la posición $X=67/200$. La estructura vorticosa toroidal que en fases anteriores se encontraba cerca del pistón derecho, se transforma en una superficie vorticosa

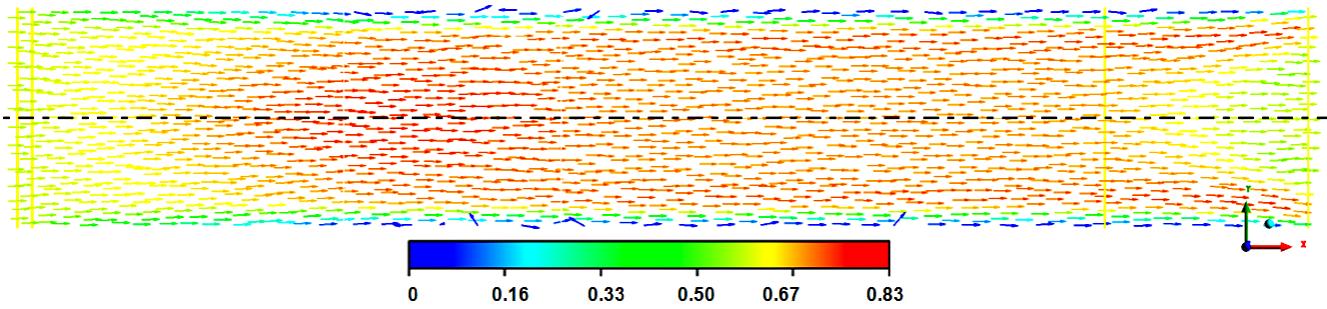


Figura 3. Campo de velocidad adimensional (U_x) en la posición $\phi = 150^\circ$ en el plano XY ($\beta = 0$). Los colores de la velocidad corresponden a su magnitud y la barra está en unidades adimensionales

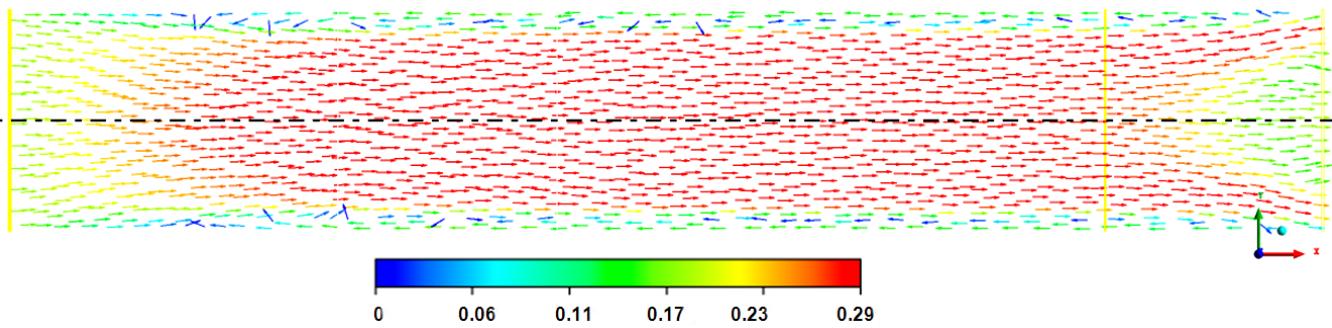


Figura 4. Campo de velocidad adimensional (U_x) en la posición $\phi = 170^\circ$ en el plano XY ($\beta = 0$). Los colores de la velocidad corresponden a su magnitud y la barra está en unidades adimensionales.

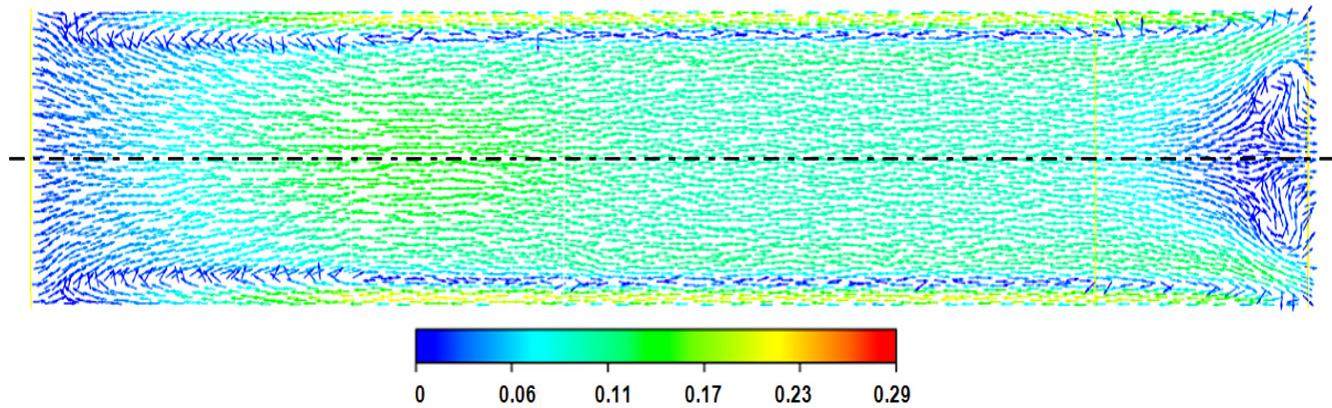


Figura 5. Campo de velocidad adimensional (U_x) en la posición $\phi = 178.5^\circ$ en el plano XY ($\beta = 0$). Los colores de la velocidad corresponden a su magnitud y la barra está en unidades adimensionales.

en forma de nariz que avanza hacia la izquierda. Se encuentra que el punto de estancamiento de mayor avance de esta estructura, se encuentra en la posición $X=5317/1000$. El origen de la formación de la superficie de vórtice obedece a la acción que el pistón derecho ejerce en el flujo pues el pistón está retornando y por lo tanto a partir este punto en el ciclo el vórtice comenzará a desaparecer gradualmente.

En la fase $\phi=185^\circ$ (Figura 9), el punto silla izquierdo está localizado en $X=7/8$ y el punto de estancamiento del lado derecho ha desaparecido. El comportamiento de flujo del lado derecho es desordenado, compuesto por pequeños vórtices irregulares que son producto de la desestabilización de la superficie vortica.

En la posición $\phi=185.25^\circ$ (Figura 10) la mayor parte del

fluído se desplaza en la dirección $-X$, sin embargo, una pequeña cantidad de fluido continúa desplazándose en la dirección $+X$. Así, el flujo que va a la derecha, se encuentra confinado a una burbuja que tiene una estructura de flujo similar a un vórtice toroidal y los dos puntos silla que se forman en el eje axial, delimitan las fronteras de la burbuja. En esta fase, las posiciones de estos puntos de estancamiento son $X=9/10$ y $X=72/25$. A partir de esta fase los dos puntos de estancamiento continuarán acercándose e induciendo de esta manera a una reducción gradual del tamaño del vórtice. Una vez que el vórtice desaparece, el comportamiento global del movimiento del fluido será similar al de un flujo unidireccional.

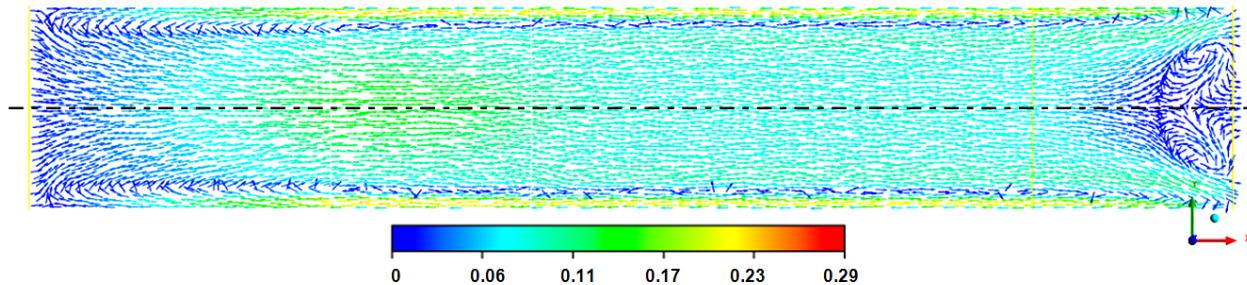


Figura 6. Campo de velocidad adimensional (U_x) en la posición $\phi = 179.25^\circ$ en el plano XY ($\beta = 0$). Los colores de la velocidad corresponden a su magnitud y la barra está en unidades adimensionales.

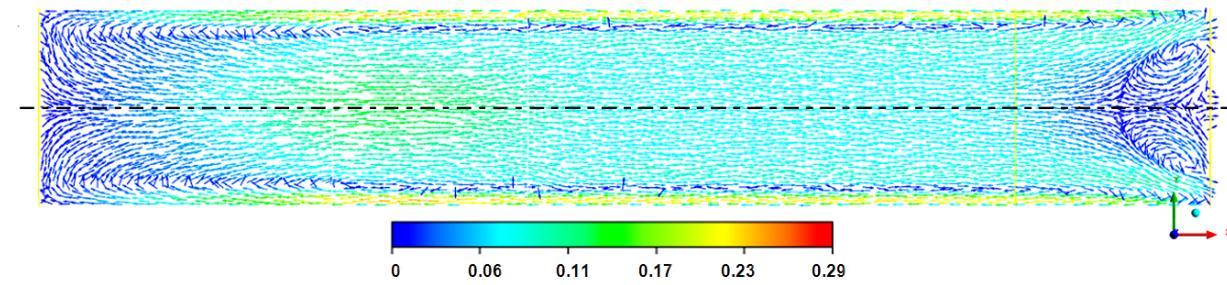


Figura 7. Campo de velocidad adimensional (U_x) en la posición $\phi = 180^\circ$ en el plano XY ($\beta = 0$). Los colores de la velocidad corresponden a su magnitud y la barra está en unidades adimensionales.

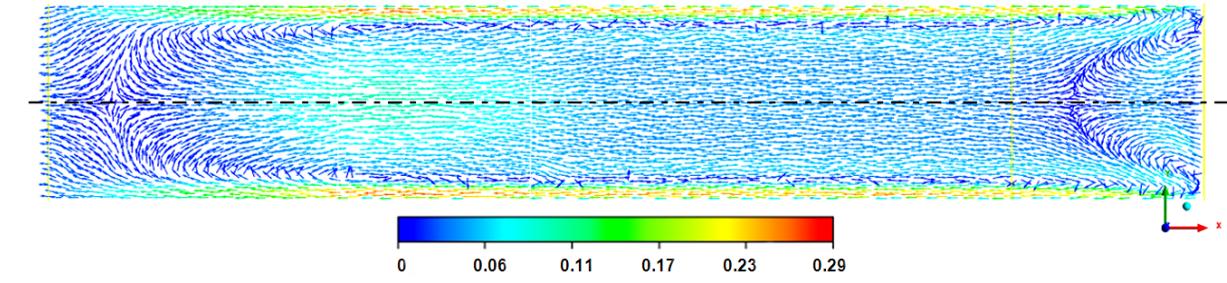


Figura 8. Campo de velocidad adimensional (U_x) en la posición $\phi = 182^\circ$ en el plano XY ($\beta = 0$). Los colores de la velocidad corresponden a su magnitud y la barra está en unidades adimensionales.

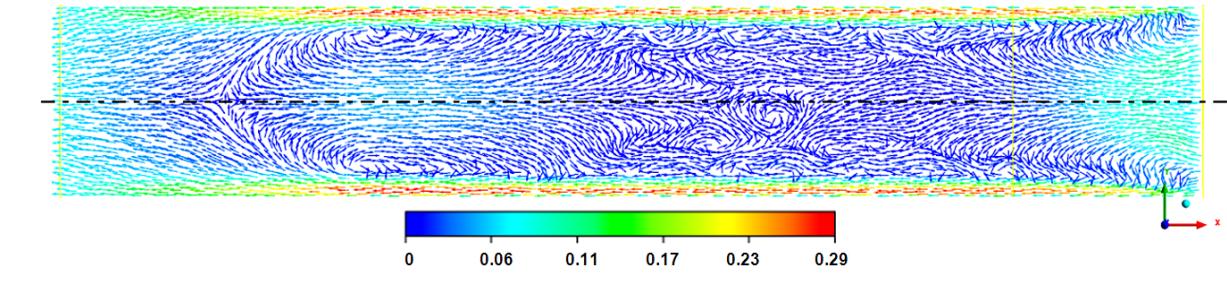


Figura 9. Campo de velocidad adimensional (U_x) en la posición $\phi = 185^\circ$ en el plano XY ($\beta = 0$). Los colores de la velocidad corresponden a su magnitud y la barra está en unidades adimensionales.

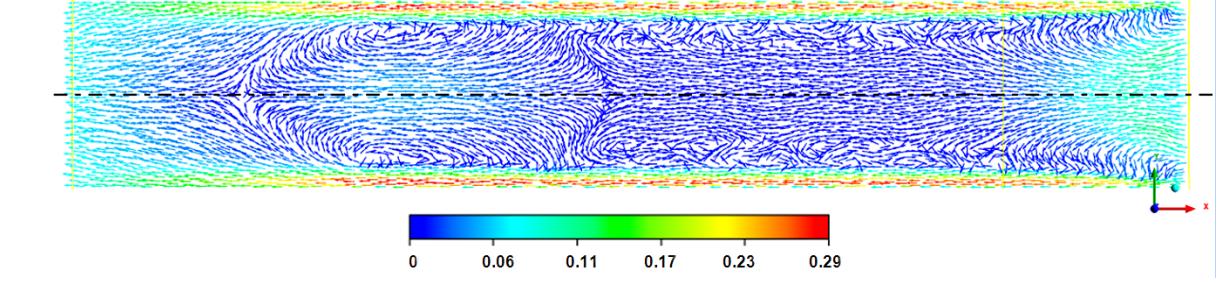


Figura 10. Campo de velocidad adimensional (U_x) en la posición $\phi = 185.25^\circ$ en el plano XY ($\beta = 0$). Los colores de la velocidad corresponden a su magnitud y la barra está en unidades adimensionales.

Conclusiones

Motivados por las aplicaciones de vanguardia en las cuales un flujo oscilatorio podría ser usado para diversas aplicaciones, se analizó el comportamiento hidrodinámico del flujo oscilatorio en un conducto cilíndrico. Se propuso una metodología de integración de las ecuaciones de conservación que incluye una malla deformable para simular la posición de los pistones en cada paso de tiempo.

Además de observar en este trabajo el conocido efecto de Richardson, así como la capa límite de Stokes, fue posible apreciar la formación y el desarrollo de vórtices del tipo toroide generados en el ciclo, cerca de $\phi=180^\circ$.

De manera muy interesante, este estudio permitió analizar los puntos críticos como los puntos silla o puntos hiperbólicos y los centros de vórtice o puntos elípticos. Además el análisis tridimensional permitió observar que para los parámetros explorados, el comportamiento del flujo no es axialmente simétrico en un breve intervalo del ciclo.

Referencias

- E. G. Richardson and E. Tyler, "The transverse velocity gradient near the mouths of pipes in which an alternating or continuous flow of air is established", London Vol. 42, pp. 1-15, (1929).
- J. R. Womersley, "Method for the calculation of velocity, rate of the flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known", . Vol. 127, pp. 553-563, (1955).

S. Uchida, "The pulsating viscous flow superposed on the steady laminar motion of an incompressible fluid in a circular pipe", . Vol. 7, pp. 403-422, (1956).

M. Hino, M. Sawamoto, and S. Takasu, "Experiments on the transition to turbulence in an oscillating pipe flow", , Vol. 75, pp. 193-207, (1976).

Rao, A. R., and Devanathan, R., "Pulsatile Flow in Tubes of Varying Cross-Sections", , Vol. 24, No. 14, pp. 203–213, (1973).

D. Das, and J.H Arakeri. "Unsteady laminar duct flow with a given volume flow rate variation." Trans. ASME: , Vol. 67, Issue 2, pp. 274-281, (2000).

Muntges, D. E., and Majdalani, J., "Pulsatory Channel Flow for an Arbitrary Volumetric Flowrate", 32nd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit. St. Louis, Missouri AIAA Paper 2002-2856, June, (2002).

T. Zhao, and P. Cheng, "Experimental studies on the onset of turbulence and frictional losses in an oscillatory turbulent pipe flow", Vol. 17, pp. 356-362, (1996).

Hall, P., "Unsteady Viscous Flow in a Pipe of Slowly Varying Cross-Section", , Vol. 64, No. 2, pp. 209–226, (1974).

S. Ray, B. Ünsal, F. Durst, Ö. Ertunc, O. A. Bayoumi. "Mass flow rate controlled fully developed laminar pulsating pipe flows", Trans. ASME: , Vol. 127, Issue 3, pp. 405-418, (2005).