

Análisis de interpretaciones de gráficas de movimiento y sus implicaciones didácticas. Un estudio de caso

Eduardo Carlos Briceño Solís
Universidad Autónoma de Zacatecas

Resumen

El presente estudio reporta un re-análisis sobre el significado que desarrolla un estudiante sobre gráficas de movimiento con el uso de tecnología digital. Para ello se planteó la pregunta: ¿Cuál es la posible interpretación que hace un estudiante de nivel medio superior de gráficas de movimiento? El re-análisis de las explicaciones y las interpretaciones evidenció usos de las gráficas que revelan posibles significados que les atribuye el estudiante y, a partir de esto, se propusieron actividades de aprendizaje para la enseñanza de gráficas cartesianas.

Analysis of motion graph interpretation and its implications for didactics. A study of case

Abstract

This study reports a re-analysis of the meaning that a student develops on motion graphics with the use of digital technology. For this, the question was raised: What is the possible interpretation that a high school student makes of movement graphs? The re-analysis of the explanations and interpretations evidenced uses of the graphs that reveal possible meanings attributed to them by the student and based on this, learning activities were proposed for the teaching of Cartesian graphs.

Introducción

La interpretación de gráficas es importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ya que en las gráficas se pueden reconocer patrones y, a través de ellas, realizar estimaciones numéricas y mediar procedimientos algebraicos (Zaldívar y Briceño, 2019). Actualmente, éstas se integran con la tecnología escolar, en particular, en situaciones de enseñanza de conceptos como el de función. Ejemplo de esto último son los estudios relacionados con la interpretación que estudiantes hacen de gráficas de movimiento (Garza, Zaldívar, Quiroz y Rodríguez, 2020; Miranda, Radford y Guzmán, 2007; Ramos, Briceño y

Palabras clave

Didáctica y
tecnología, gráfica,
interpretación,
movimiento.

Keywords

Didactics and
technology, graph,
interpretation,
movement.

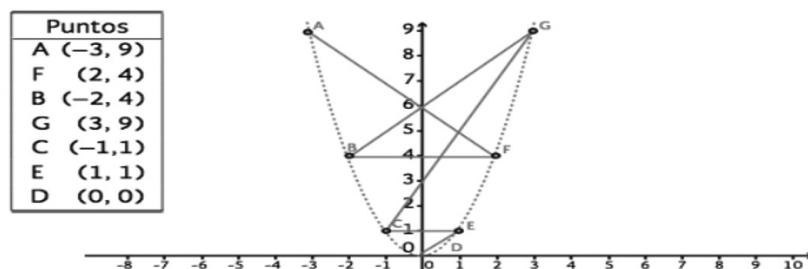
Recibido: 31/01/2021

Aceptado: 07/02/2022

Záldivar, 2015; Suárez y Cordero, 2010). Recientemente, Sánchez y Castañeda (2021) han señalado que en los reportes técnicos sobre la pandemia de COVID-19 en México se presentan gráficas, estimaciones, tablas y otros datos que muestran el desarrollo de la pandemia, entremezclando así nociones matemáticas con epidemiológicas. Estos autores mencionan que se necesitan cuatro saberes para interpretar la información de estos reportes: comunicación matemática; representación matemática; interpretación de la simbología y comprensión del formalismo matemático, y modelación matemática (Sánchez y Castañeda, 2021). Desde tiempo atrás se han caracterizado niveles de comprensión de registros gráficos en relación con las habilidades para: “leer datos”, “leer dentro de los datos” y “leer más allá de los datos”, siendo las dos últimas donde se ha manifestado mayor complejidad en su desarrollo (Curcio, 1987). Algunas dificultades reportadas en relación con la interpretación de gráficas se describen a continuación.

En Cantoral (2013) se analizó el procedimiento de graficación de un estudiante en el ámbito escolar (véase la figura 1).

•Figura 1. Dificultades de graficación de un estudiante



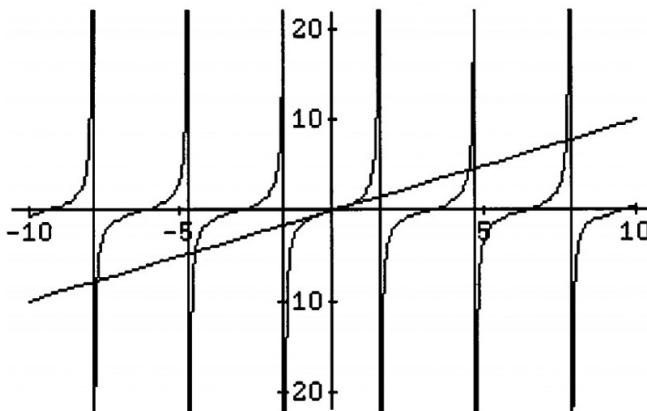
Fuente: Cantoral (2013, p. 31)

En la figura 1 se observa que el trazo de un estudiante de bachillerato siguió el orden en que le fueron presentadas las coordenadas que se le indicó graficar. El primer orden que se le presentó fue el alfabético (curva punteada; la tabla correspondiente no está presente en la figura 1). Enseguida, se proporcionaron las mismas coordenadas ordenadas como se muestra a la izquierda en la figura 1, a lo que el estudiante respondió con trazos rectos (no punteados). A esta práctica de graficación se ha denominado distribución de puntos (Cordero, Cen y Suárez, 2010), donde el estudiante ubica los puntos en el plano cartesiano y une uno tras de otro según el orden en el que se le presentan, aunque no siempre resulte correcto desde el punto vista de las matemáticas como disciplina académica.

La interpretación de gráficas precisa de procesos agudos de visualización, aunque Eysenck y Dreyfus (citados por Dolores y Cuevas, 2007) reportaron que varios estudiantes utilizan poco el pensamiento visual, el cual requiere procesos cognitivos superiores, prefiriendo en cambio el trabajo algorítmico.

Por otra parte, la tecnología como medio de visualización de gráficas se ha relacionado con problemas de interpretación. Por ejemplo, Guin y Trouche (1998) reportaron la dificultad de 32 estudiantes al interpretar las gráficas en la figura 2 para determinar las soluciones de la ecuación $\tan(x) = x$, mencionando que hay un número infinito de soluciones, lo cual es matemáticamente correcto; pero atribuyendo, sin argumentación solvente, las soluciones a los diversos cortes entre la recta $f(x) = x$ y la gráfica de la función trigonométrica $f(x) = \tan(x)$. Además, se han llegado a considerar las asíntotas como parte de la gráfica de la función $f(x) = \tan(x)$.

•Figura 2. Gráfica de: $f(x) = x$, $f(x) = \tan(x)$

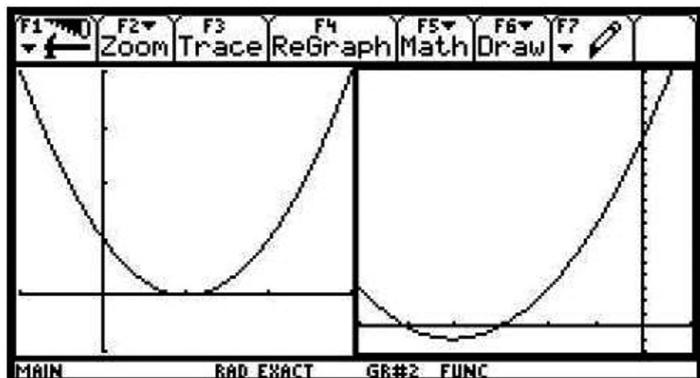


Fuente: Guin y Trouche (1998, p. 196)

Otra evidencia al respecto es la interpretación de gráficas asociadas con la variación de parámetros de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$. Al interpretar el parámetro c a partir de la representación algebraica, ciertos estudiantes expresaron que “ c es positivo si la parábola asciende y c es negativo si la parábola desciende”, lo cual es matemáticamente incorrecto. Sin embargo, cuando interpretaron el signo del coeficiente c a partir de las parábolas representadas en la figura 3, estos estudiantes respondieron correctamente que c es igual a cero para la parábola de la izquierda y que c es menor que cero para la parábola de la derecha. Ante esta situación, vale

preguntar: ¿qué llevó a los estudiantes a tales razonamientos?, ¿de qué manera influyó la interpretación de las gráficas en la movilización correcta de su conocimiento matemático?

•Figura 3. Dos parábolas con ecuaciones desconocidas



Fuente: Trouche (2005, p. 142)

Ante estas dificultades en la interpretación de gráficas en el plano cartesiano es importante reconocer el pensamiento del estudiante de bachillerato como un sistema que llega a presentar dificultades de comprensión de las matemáticas (Miranda, Radford y Guzmán, 2007). Asimismo, en el contexto de México, se han reportado dificultades de estudiantes al interpretar la rapidez de movimiento a partir de gráficas en el plano cartesiano. Estas dificultades se han relacionado con concepciones alternativas de los estudiantes respecto de la rapidez, asociadas con la idea de magnitud y no con la de pendiente de una recta tangente a la curva (Dolores, Chi, Canul, Cantú y Pastor, 2009). En educación básica se han implementado situaciones de aprendizaje donde el estudiante construye primero el concepto de plano cartesiano con el objetivo de propiciar la construcción de sentido sobre el uso correcto de sus ejes (Aravena y Morales, 2018).

También se ha documentado la interpretación de gráficas realizada por profesores en tareas no tradicionales, reportando que sus explicaciones y argumentos provienen de diversas experiencias y contextos que evidencian fuentes de significación susceptibles de ser utilizadas al resolver estas tareas (Buendía, 2012).

Hasta aquí esta revisión ilustra que la interpretación de gráficas es una problemática que necesita seguir siendo investigada, dado que se ha mostrado relacionada con contextos de la vida cotidiana o escolar de estudiantes y profesores, es decir, con contextos socioculturales diversos y cambiantes. En ese sentido, este trabajo analizó la interpretación de gráficas

de movimiento que hizo un estudiante, revelando el proceso de pensamiento de construcción de significado a partir de la lectura de gráficas.

Fundamento teórico

Aquí se presenta el referente teórico que se utilizó para analizar la interpretación de gráficas realizada por un estudiante. Se optó por el constructo teórico del “uso de la gráfica” de la teoría socioepistemológica ya que se consideró que este “uso” no se centra en el objeto matemático directamente sino que trata de hacer emerger aquellos andamios que se construyen en ciertas prácticas sociales o escolares que propician la comprensión de las matemáticas. Por lo tanto, la idea de representación del objeto matemático no fue el centro de estudio ni se buscó discurrir teóricamente sobre su representación mediante artefactos, herramientas o signos pero se ubicó el “uso” de gráficas en prácticas escolares que fueron entendidas como prácticas sociales (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006, p. 85). Lo que conllevó a identificar, en situaciones específicas, aquellas prácticas escolares que permiten inferir explicaciones sobre los procesos de construcción, adquisición y difusión de conocimiento matemático (Cantoral *et al.*, 2006). Consecuentemente, aquellas prácticas que intencionalmente se proponen en situaciones de enseñanza dan paso a hacer “usos” específicos del conocimiento matemático. Estos “usos” son los que, en teoría, proveen evidencia sobre cómo el estudiante desarrolla cierto significado de objetos como una gráfica. Estos procesos también se caracterizan por la “funcionalidad” del conocimiento matemático en relación con la resignificación progresiva de tal conocimiento. En ese sentido, el trazado de gráficas en situaciones específicas, desde esta teoría, se considerada una práctica que permite al estudiante explicar y argumentar situaciones, haciendo “uso” de su conocimiento a través del “funcionamiento” y la “forma” de las gráficas (Cordero, 2016), lo que a continuación se explica con más detalle.

Suárez (2014) afirma que el “funcionamiento” y la “forma” de una gráfica están relacionados con los significados que emergen de aquello que se expresa al interpretarla. De esta manera, dichas expresiones pueden ser acciones u operaciones que involucran a la gráfica (“funcionamiento”), mientras que la “forma” responde a cómo se obtiene información a partir de ella. Al respecto, Buen-día (2011) afirma que:

Este constructo teórico de *uso de las gráficas* y su categoría de análisis –funcionamiento y forma– permiten explorar la naturaleza del saber matemático y permite abordar cuestiones acerca de cómo las gráficas desarrollan conocimiento matemático, cómo lo explican o cómo lo fundamentan (p. 42).

En un sentido, el significado desde esta postura teórica emerge cuando la gráfica se “usa” para analizar la estructura interna del sistema representado (“funcionamiento”), es decir, cierta configuración de la gráfica expresa globalidad, variación y, en ocasiones, tendencia a través de un patrón de ajuste denominado curva (“forma”; Zaldívar y Briceño 2019).

Para Cen (2015), en el “uso de la gráfica”, el “funcionamiento” conlleva cierta intención de “usar” la gráfica en actividades matemáticas que conducen a la elaboración de explicaciones sobre la manera peculiar en la que se está procediendo. Cen describe el constructo “uso de la gráfica” y lo define como:

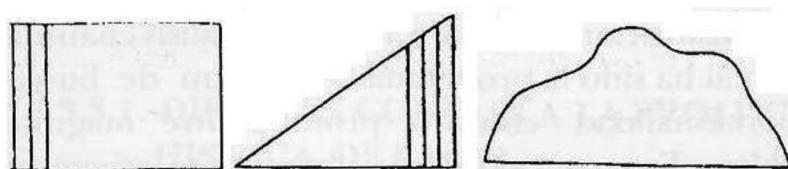
...el funcionamiento es la acción que se desea desempeñe la gráfica en la situación que se trate, mientras que la forma es la manera en la cual el sujeto actúa sobre la gráfica, por lo que en la forma del uso de la gráfica la apariencia perceptible de la gráfica (objeto) es fundamental pues de alguna manera orienta el proceder del sujeto (proceso) lo cual se ve reflejado en las argumentaciones de los participantes (p. 121).

En síntesis, en el “funcionamiento” hay una intención de “uso” que lleva a responder la pregunta para qué se “usa”, cuál es su papel en la situación. La “forma” tiene que ver con la pregunta: cómo se “usa” una vez establecido el “funcionamiento”, es decir, indica cómo se presentó tal “funcionamiento”.

Tal planteamiento privilegia la construcción de conocimiento mediante el “uso de la gráfica”, por lo tanto, aquí una gráfica no es el objeto de investigación sino el “uso” que se hace de ella. Lo que significa que el “uso de la gráfica” es un constructo que adquiere sentido y significado en situaciones específicas (Cordero, 2015).

Este constructo tiene como una de sus bases epistemológicas lo reportado en la obra de Oresme (Cordero *et al.*, 2010) donde por medio del “uso” de figuras geométricas se representó la concepción de movimiento de aquella época. Por ejemplo, la forma de un rectángulo representó una cualidad que no varía, un triángulo una cualidad de variación uniforme y otra figura sobre la misma línea con un contorno distinto representó una variación no uniforme (véase la figura 4).

•**Figura 4.** Figuración de las cualidades en la obra de Oresme



Fuente: Suárez (2014, p. 94)

La representación de movimiento por medio de figuras geométricas proporcionó una interpretación del “uso” de las matemáticas que se abordó en situaciones de variación de la época. La caracterización de este “uso” de figuras geométricas surgió al prescribir que la “forma” es la manera en que se “usaron” las figuras geométricas para explicar una cualidad de movimiento, lo cual llevó al “funcionamiento” al argumentar que la figura correspondiente representa una cualidad de cambio (véase la figura 4; Suárez, 2014).

Esta referencia histórica al “uso” de figuras para desarrollar cierto conocimiento sobre el cambio muestra a ese conocimiento como una resignificación de la concepción de variación de aquella época. Con esta misma idea se consideró aquí el “uso de gráficas” a través del “funcionamiento” y la “forma” de gráficas para hacer emergir interpretaciones que hace un estudiante a partir de su relación pedagógica con gráficas de movimiento. Por tanto, aquí se empleó el referente previo para responder a la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuál es la posible interpretación que hace un estudiante de nivel medio superior de gráficas de movimiento?

Método

El método utilizado fue el estudio de caso. El interés fue comprender el significado que atribuye un estudiante a gráficas de movimiento en un contexto específico a través de observar cómo se “usan” ciertas gráficas para explicar cierto movimiento. El proceso metodológico favoreció las interacciones entre un estudiante, una profesora y otros participantes, lo que dio lugar a explicaciones y argumentos del estudiante cuando comunicó a la profesora y a otros estudiantes lo que interpretó de ciertas gráficas de movimiento. Dado que el interés aquí fue indagar el “uso” que hizo un estudiante de ciertas gráficas, la elección de este método permitió conocer con mayor profundidad el objeto de estudio (Álvarez y San Fabián, 2012).

Los datos que se reportan aquí corresponden a un estudiante que participó en un taller, el cual se encuentra documentado en Torres (2004), donde se implementó una situación de modelación matemática, primero al trazar gráficas con lápiz sobre papel y después a través de un sensor de movimiento y una calculadora con función de graficación digital. Como ya se describió, tal taller se organizó en dos momentos, una actividad de interpretación, a papel y lápiz, de una situación de movimiento, seguida de otra con el empleo de tecnología digital, donde se compararon gráficas *de posición contra tiempo y velocidad contra tiempo*. La elección de estos dos momentos fue fundamentada por Suárez y Cordero (2010) y Suárez (2014), afirmando que a partir de hechos descritos en el primer momento se pueden hacer emergir interpretaciones de la “forma” en el sentido de Oresme y, en el segundo momento, se puede lograr la resignificación de esas gráficas por la mediación

de tecnología digital. La comparación de esos dos momentos permite analizar si se pueden concluir “usos” diferentes de las gráficas en uno y otro. Los datos recolectados de estos dos momentos son los descritos en el cuadro 1.

•Cuadro 1. Datos a partir de los cuales se hicieron emergir posibles interpretaciones sobre el “uso” de gráficas

Actividad con lápiz y papel	Actividad con tecnología digital
Imágenes de gráficas de movimiento trazadas con lápiz sobre papel	Gráficas de movimiento elaboradas empleando tecnología digital
Transcripciones de las interacciones de los participantes en orden cronológico, es decir, de sus diálogos en relación con... y durante el trazado de..., gráficas con lápiz sobre papel	Transcripciones de las interacciones de los participantes en orden cronológico, es decir, de sus diálogos en relación con... y durante la elaboración de..., gráficas empleando tecnología digital

Fuente: Elaboración propia

En el cuadro 1 se describe la manera como fueron organizados los datos recabados; a su vez, en el cuadro 2 se describe cómo se procedió para su caracterización.

•Cuadro 2. “Uso de la gráfica”: caracterización

“Funcionamiento” (para qué se usa)	Descripción del “funcionamiento” de la gráfica
“Forma” (cómo se usa)	Descripción de la “forma” de la gráfica

Fuente: Elaboración propia

La puesta en escena de la situación de modelación de movimiento

Los datos recabados durante la situación de modelación brindaron información sobre el significado de las gráficas que fue construyendo un estudiante en su interpretación de cierto movimiento. La situación de modelación de movimiento consistió en realizar físicamente un movimiento (que se registró con un sensor digital) y su correspondiente representación mediante gráficas trazadas con lápiz sobre papel, posteriormente, interpretar dicho movimiento según la gráfica en la pantalla de una calculadora generada mediante el registro de un sensor digital, y así se preguntó al estudiante sobre sus interpretaciones de los distintos gráficos de movimiento. A continuación, se describen extractos de transcripciones de los diálogos entre

estudiante y profesora, acompañados de la gráfica de movimiento correspondiente a cada momento: 1. Interpretaciones *a priori* expresadas por un estudiante a partir de gráficas de movimiento trazadas con lápiz sobre papel y 2. A *posteriori* a partir de gráficas de movimiento obtenidas con tecnología digital. Como se describe en el cuadro 2, se caracterizó el “uso” de cada gráfica, en su “funcionamiento” y “forma”, al analizar las transcripciones de diálogos entre estudiante, profesora y otros estudiantes.

En la situación de modelación de movimiento participaron treinta estudiantes de nivel medio superior, según lo reportado por Suárez y Cordero (2010) y Suárez (2014), pero aquí se retomaron sólo los datos de uno de esos estudiantes, el cual se seleccionó por haber expresado más información durante la experiencia de modelación. Se aclara que estos datos fueron recolectados por una profesora y otros alumnos que monitorearon la experiencia de modelación, la cual se desarrolló durante tres días, dos horas al día. El estudiante seleccionado trabajó en grupo de tres estudiantes y fue observado por un monitor con la función de animarlos a expresar en voz alta sus discusiones, afirmaciones y observaciones. La dinámica de trabajo consistió en presentar una situación con una persona en movimiento para luego trazar una representación gráfica de tal movimiento, con lápiz sobre papel y, posteriormente, con el uso de un sensor de movimiento y calculadora graficadora.

La experiencia de modelación

Se solicitó al estudiante seleccionado bosquejar una gráfica de movimiento con lápiz sobre papel para luego elaborar otra con tecnología digital, como se cita a continuación. Tales gráficas de posición representaron el movimiento de una persona que se aleja de un punto de partida hasta 500 metros para luego regresar; en total, la persona dispuso de nueve minutos. No obstante, durante dicho trayecto se detuvo durante cuatro minutos. Se presenta, a continuación, la transcripción de la situación de aprendizaje denominada Epifanía (Torres, 2004).

Epifanía

“Valentina llegó temprano a su clase de música. A punto estaba de sentarse cuando advirtió que había olvidado su cuaderno en su refugio predilecto: la siempre cómoda y acogedora biblioteca. No podía perderse el comienzo de la clase, así que fue a la biblioteca, cogió su cuaderno y regresó a su asiento, a tiempo para comenzar su, probablemente disfrutable, clase de música. Pero en el camino se encontró a su bienamado Juan y se detuvo a intercambiar algunas muestras de su muy

auténtico cariño, lo que le llevó 4 minutos, pero de los largos, lo que la obligó a recuperar estos instantes, tan bien aprovechados, porque cuando salió del salón no previó la Epifanía". La biblioteca está en un punto diametralmente opuesto del salón de música en el patio circular, que tiene 500 metros de diámetro, de la escuela. Valentina tardó en total 9 minutos.

1. Construye una gráfica que describa los cambios de Valentina en su trayecto de ida y vuelta con respecto al tiempo.
2. Todos hemos escuchado o hecho descripciones de objetos en movimiento, que incluyan expresiones como 'detenido', 'rápido', 'lento', 'más rápido', 'disminuyó su velocidad', 'más alejado', 'aceleró más', y muchas otras que seguramente te han asaltado la memoria.

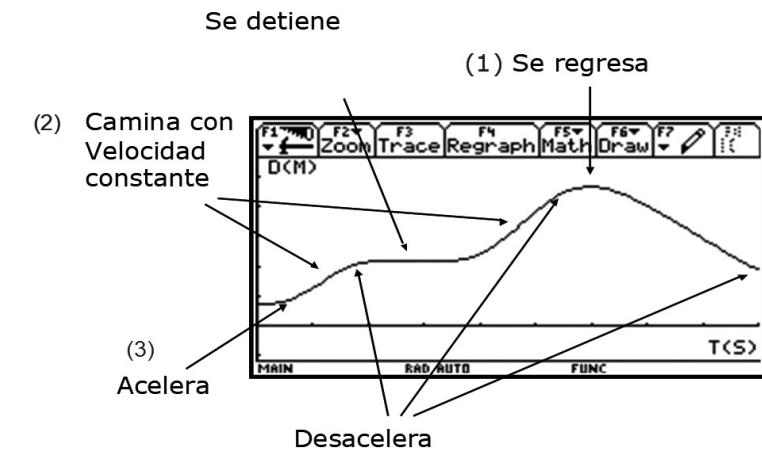
Convengamos en que la velocidad de Valentina es positiva cuando se dirige a la biblioteca y negativa en sentido contrario. Identifica en la gráfica intervalos en los que la velocidad sea negativa, positiva o nula, y describe las características de la gráfica, al igual que en el párrafo anterior, introduce matices en la descripción de la velocidad y anota las características correspondientes de la gráfica (Torres, 2004, p. 37).

Los datos obtenidos de la experiencia de modelación provienen de los siguientes tipos de registro: 1. Reporte de los equipos de estudiantes donde se registraron explicaciones realizadas por el estudiante seleccionado, así como decisiones que él fue tomando para dar respuesta a la situación planteada; 2. Registro de monitores, quienes hicieron anotaciones en correspondencia con los diálogos; 3. Registro de cada una de las visualizaciones en la pantalla de la calculadora, de gráficas de *posición contra tiempo* y *velocidad contra tiempo*, así como las transcripciones obtenidas de audio y video (Torres, 2004).

Según Briceño y Cordero (2010), las explicaciones de la variación de movimiento generan la posibilidad de prefigurar relaciones entre gráfica y cambio, lo que propicia el desarrollo de pensamiento variacional. En este estudio se ha recabado evidencia empírica a favor de esta premisa pues el trazado de gráficas con tecnología digital favoreció la expresión de interpretaciones sobre diferentes segmentos de las gráficas (aquí nombrados "curvas"), como se muestra en la figura 5.

Por medio de las interpretaciones y explicaciones del estudiante seleccionado se puede entender el "uso de la gráfica" como medio para caracterizar cómo se está entendiendo la variación, lo que se revela al dar lectura a una gráfica de movimiento. Se quiere con esto hacer emergir el significado que atribuye el estudiante seleccionado al comparar sus interpretaciones y explicaciones en dos momentos (con cierta gráfica trazada con lápiz sobre papel y con otra trazada con tecnología digital).

•**Figura 5.** Una de las posibles gráficas de *posición contra tiempo* al modelar la situación Epifanía



Fuente: Suárez (2014, p. 110)

Resultados

Se presentan a continuación transcripciones producto de la experiencia de modelación de la situación Epifanía, relacionadas con un estudiante que fue seleccionado por el valor informativo de sus expresiones en ambos momentos (con una gráfica trazada con lápiz sobre papel y otra trazada con tecnología digital). En adelante, las transcripciones se presentan organizadas de la siguiente manera: expresiones conversacionales entre el estudiante seleccionado y la profesora, acompañadas de comentarios de este autor, dentro de corchetes cuadrados, en su análisis del “funcionamiento” y la “forma” de cada gráfica. Se emplearon las abreviaturas Est. para hacer referencia al estudiante seleccionado y Prof. para señalar las expresiones de la profesora.

Extracto 1. Modelación de movimiento (*posición contra tiempo*) con lápiz sobre papel versus con tecnología digital

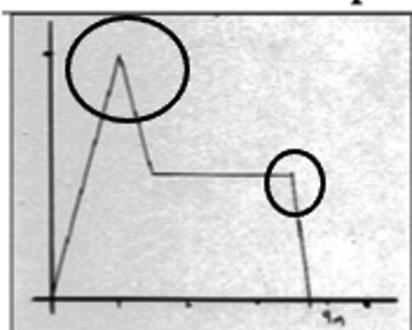
A la izquierda del cuadro 3 se presentan expresiones sobre cómo cierta gráfica trazada con lápiz sobre papel representa la situación de movimiento Epifanía, mientras que a la derecha se consignan expresiones sobre cómo cierta gráfica trazada con tecnología digital representa tal situación. Abajo se muestra la conversación entre el estudiante seleccionado y la profesora al comparar ambas gráficas.

•**Cuadro 3.** Expresiones sobre cómo gráficas de posición contra tiempo representan la situación de movimiento Epifanía

Gráfica trazada con lápiz sobre papel

1. Est. Nuestra gráfica original que tenemos fue desde el punto 0 hasta la altura máxima que eran 1000 metros, según a la mitad y aquí se aceleró (véase la figura 6)

•**Figura 6.** Gráfica trazada con lápiz sobre papel

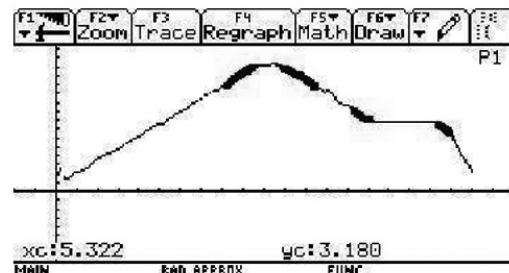


Fuente: Torres (2004, p. 84)

Gráfica trazada con tecnología digital

2. Est. Ahora, en la práctica, lo que acabamos de hacer... busqué lo más parecido, planeamos exactamente el mismo problema que habíamos tenido nosotros desde un tiempo, digámoslo así, empezó a caminar durante 15 segundos de tiempo total, entonces a los 7.5 segundos se devuelve aquí, se regresó y se quedó a cierto tiempo, y se volvió... se aceleró, esto nos dio algo similar a nuestra gráfica original (véase la figura 7)

•**Figura 7.** Gráfica trazada con tecnología digital



Fuente: Torres (2004, p. 60)

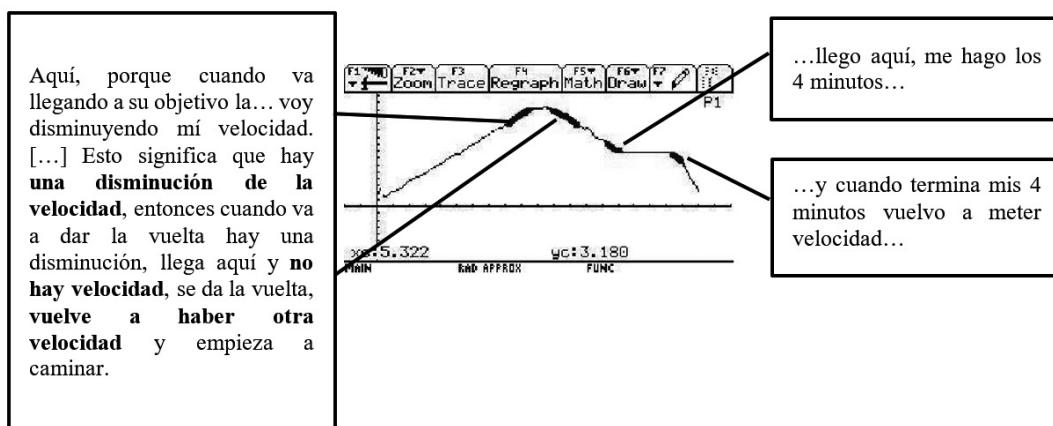
3. Prof. ¿Cuál es la diferencia entre la primera [trazada con lápiz sobre papel] y la segunda [trazada con tecnología digital]?
4. Est. La diferencia son las curvaturas.
5. Prof. ¿Qué significan esas curvaturas?
6. Est. Primero que nada... son los **momentos...**
7. Prof. Y eso... ¿qué significa?
8. Est. Esto significa que hay una disminución de la velocidad, entonces cuando va a dar la vuelta hay una disminución, llega aquí y no hay velocidad, se da la vuelta, vuelve a haber otra velocidad y empieza a caminar.
9. Prof. Y eso... ¿qué significa?
10. Est. Aquí, porque cuando va llegando a su objetivo [se refiere al máximo de la gráfica] la... voy disminuyendo mi velocidad, llego aquí, me hago los 4 minutos, y cuando termina mis 4 minutos vuelvo a meter velocidad **poco a poco, no de golpe**. Entonces, nuestro error [apuntando a uno de los segmentos de gráfica encerrados en círculos en la figura 6] es **haberlo representado de golpe**.

Fuente: Elaboración propia

Análisis del extracto 1

En el cuadro 3 se observa que el estudiante realizó una primera comparación reflexiva del movimiento representado entre la gráfica trazada con lápiz sobre papel y aquella trazada con tecnología digital pues “curva” y “recta” implican movimientos cualitativamente diferentes. Por ejemplo, con la explicación: “Entonces, el error es haberlo representado de golpe” el estudiante cae en cuenta de que el movimiento necesita disminuir de velocidad antes de regresar, lo que requiere una representación “curva” en lugar de un trazo “recto”. Cuando la profesora intervino preguntando por la diferencia entre ambas gráficas el estudiante cae en cuenta que los incrementos y los decrementos de velocidad requieren ser representados con segmentos curvados. La figura 8 muestra los diálogos del estudiante en relación con segmentos de la gráfica elaborada con tecnología digital.

•**Figura 8.** Análisis de segmentos de la gráfica elaborada con tecnología digital en relación con el cambio de movimiento



Fuente: Torres (2004, p. 60)

De esta manera, el estudiante logró darse cuenta de su error inicial de modelación al comparar su gráfica elaborada con lápiz sobre papel contra la realizada con tecnología digital ya que ésta última mostró una serie de segmentos curvados no contemplados en la primera. En este sentido, la visualización con tecnología digital es una herramienta que favorece la cognición humana de objetos abstractos con la que el estudiante logró relacionar efectivamente las características del cambio de movimiento con las de la gráfica y darse cuenta de su error inicial de interpretación. Indicadores de “funcionamiento” se observan en asociaciones expresadas entre características cualitativas que

explican la variación de movimiento a partir de los segmentos curvados de la gráfica elaborada con tecnología digital (“poco a poco”, “una disminución de la velocidad”, “no hay velocidad” y “vuelve a haber otra velocidad”) y los de “forma” como las consecuencias globales de ese “funcionamiento” (“se detiene” y “se regresa”; véase el cuadro 4).

•**Cuadro 4.** “Funcionamiento” y “forma” de las gráficas en el extracto 1, es decir: cualidades del movimiento según segmentos de las gráficas

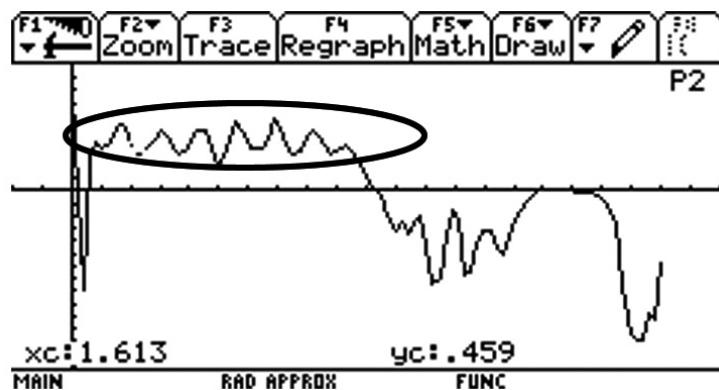
“Funcionamiento” (para qué se usa)	Para representar cambios de movimiento por medio de segmentos curvados
“Forma” (cómo se usa)	Para representar momentos en un movimiento (“se detiene” y “se regresa”)

Fuente: Elaboración propia

Extracto 2. Modelación de velocidad contra tiempo

A continuación, se muestran las explicaciones y las interpretaciones del estudiante seleccionado en relación con una gráfica de *velocidad contra tiempo*, elaborada con tecnología digital a partir de una de las gráficas de *distancia contra tiempo*. Estas explicaciones e interpretaciones se detonaron cuando la profesora preguntó al estudiante sobre el significado de las secciones curvadas que en la figura 9 se presentan circuladas; la conversación se muestra en el cuadro 5.

•**Figura 9.** Gráfica de *velocidad contra tiempo* generada con tecnología digital



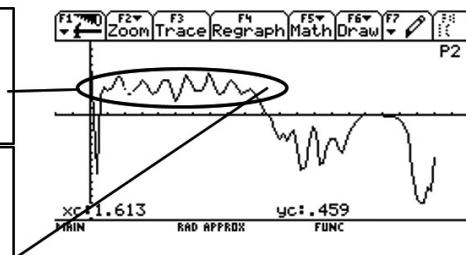
Fuente: Torres (2004, p. 63)

•**Cuadro 5.** Expresiones sobre cómo gráficas de *velocidad contra tiempo* representan la situación de movimiento Epifanía

1. Prof. ¿Qué significan esas curvaturas? [Lo que está circulado]
2. Est. Es el ritmo de la persona que lleva al caminar. El tiempo que va el pie en el aire, ese es el ritmo que va a llevar, por eso las curvas no están tan separadas unas de otras [se refiere a la forma de zigzag circulada en la figura 9]. Aquí, en la gráfica, la suma de las velocidades hasta ese punto es 0 [el cruce previo con el eje horizontal], mientras que la velocidad que aumentó es igual a la velocidad que está disminuyendo en los pequeños intervalos, por eso topa en ese punto cero [el cruce posterior con el eje horizontal], pero la línea se prolonga.
3. Prof. A ver, pasa al frente a mostrarnos [La gráfica de la figura 10 se estaba proyectando y el estudiante pasó a deliberar sobre el significado de esos segmentos curvados].

•**Figura 10.** Expresiones del estudiante en relación con una gráfica de *velocidad contra tiempo*

4. Est. Empezó aquí... [Señalando la parte inicial del gráfico] entonces la suma de las velocidades positivas con las de las negativas más abajo, en este punto ya es cero.
5. Est. Es decir, las velocidades que son positivas con las velocidades que son negativas en este momento son iguales [se refiere a que una suma nula quedaría representada por un posterior cruce con el eje horizontal].



Fuente: Elaboración propia con base en la gráfica de Torres (2004, p. 63)

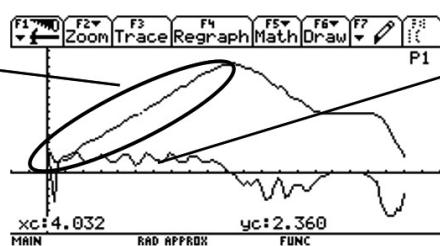
Es plausible que el estudiante estuviera pensando en los segmentos curvados ascendentes y descendentes de la parte circulada de la gráfica, como representaciones de movimientos con velocidad positiva o negativa, respectivamente, y cuya suma resulta en velocidad nula. Si éste es el caso, el estudiante estaría implicando una operación analítica para justificar el cruce posterior de la gráfica con el eje horizontal. Es decir, el estudiante estaría atribuyendo a los segmentos curvados el significado de velocidades positivas y negativas. En tanto, la profesora propuso al estudiante que reconsiderara su interpretación al comparar la gráfica de *velocidad contra tiempo* con la de *posición contra tiempo*, lo que dio lugar a la conversación que se muestra a continuación.

Comparación de las gráficas de posición y velocidad contra tiempo

6. Prof. Pongamos ahora en esta gráfica de velocidad la de posición, ¿qué podrías comentarnos al respecto?

•Figura 11. Comparación de gráficas de movimiento de *posición contra tiempo*

7. **Est.** De este punto... a este punto en la gráfica de distancia lleva ciertas variaciones de velocidad, por eso hay velocidades positivas y negativas.



8. **Est.** Sí, positivas y negativas. Ésta es positiva, pero ésta es negativa...

Fuente: Torres (2004, p. 64)

Al comparar las gráficas (*distancia contra tiempo con velocidad contra tiempo*) el estudiante expresó que en la parte circulada de la gráfica (de *posición contra tiempo*) se pudieron observar pequeñas ondulaciones, a pesar de asemejarse a un segmento de línea recta, mismas ondulaciones que relacionó con los segmentos curvados en la gráfica de *velocidad contra tiempo*. Por lo tanto, el estudiante expresó que los segmentos curvados ascendentes (en la gráfica de velocidad contra tiempo) representan movimientos con velocidad positiva, los descendentes representan movimientos con velocidad negativa y la “suma” de estos movimientos implica permanecer alrededor de una posición fija, es decir, como si el movimiento consistiera en avances y retrocesos que se anulan. Sin embargo, ese razonamiento es disciplinariamente incorrecto pues los segmentos curvados descendentes no representan movimientos de velocidad negativa sino que son así los movimientos representados por tramos de la gráfica por debajo del eje horizontal. Así, el “uso de la gráfica” de *velocidad contra tiempo*, por el estudiante, es el de segmentos curvados ascendentes y descendentes que pueden operarse analíticamente (sumar y restar), orientándolo a anticipar que la gráfica debería necesariamente cruzar eventualmente el eje horizontal (refiriéndose a una velocidad igual cero como resultado de sumar velocidades positivas y negativas). De forma implícita, el estudiante está operando con la “forma” de los segmentos curvados de la gráfica (lo que sube menos lo que baja).

Análisis del extracto 2

El “funcionamiento” y la “forma” parecen relacionarse con segmentos curvados ascendentes y descendentes de la gráfica. El “funcionamiento”, por parte del estudiante, consistió en atribuir a la velocidad de movimiento un valor positivo o negativo según los

segmentos curvados fuesen ascendentes o descendentes. Mientras que la “forma” consistió en la consideración de realizar operaciones analíticas entre segmentos curvados.

•Cuadro 6. “Funcionamiento” y “forma” de las gráficas en el extracto 2

“Funcionamiento” (para qué se usa)	Interpretación del signo de la velocidad de movimiento según el segmento curvado es ascendente o descendente
“Forma” (cómo se usa)	Operaciones analíticas con segmentos curvados ascendentes y descendentes

Fuente: Elaboración propia

A continuación, se presenta una discusión de estos resultados que perfila una reflexión sobre las implicaciones didácticas para la enseñanza de las matemáticas.

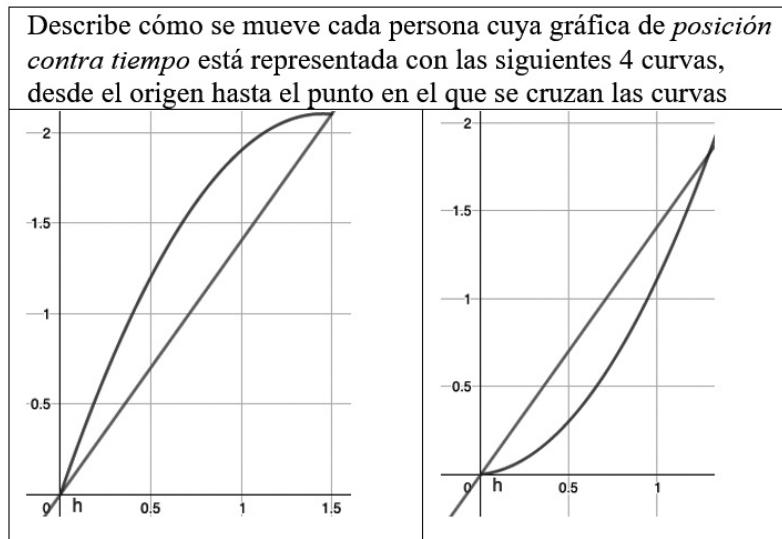
Discusión

Los resultados aquí descritos abordan al estudiante como individuo cognosciente, quien atribuye significado a gráficas de movimiento. La interpretación de gráficas ha sido estudiada con estudiantes, y se han reportado resultados grupales del papel que juega tal interpretación para la comprensión de las relaciones entre las “formas” de las gráficas con situaciones físicas de movimiento (Ramos *et al.*, 2015; Suárez, 2014; Zaldívar y Briceño, 2019). Aquí se indagó qué interpreta cierto estudiante sobre una situación de movimiento representada con ciertas gráficas, interpretación que surgió a través del análisis del “funcionamiento” y la “forma” de gráficas. Esto, como se ha mencionado, forma parte de los saberes culturales y personales que constituyen formas de realizar la lectura de gráficas. Por ejemplo, el significado atribuido a segmentos curvados de una gráfica como cualidad del movimiento representado (véase el cuadro 4), así como un valor positivo y negativo atribuido a segmentos curvados (véase el cuadro 6), son parte del saber personal del estudiante seleccionado.

El análisis del extracto 1, en el que los segmentos curvados fueron asociados con cualidades de movimiento, permite sugerir la implementación didáctica de actividades de interpretación de movimiento donde se comparan dos diferentes tipos de curvas. Por ejemplo, una propuesta es que el estudiante reconozca la noción abstracta de variación a partir de gráficas de *posición contra tiempo* con “forma” recta y curvada en un

mismo espacio gráfico, como se muestra en la figura 12. El propósito de tal actividad de aprendizaje es que cada una de las “formas” diferentes se asocien con la cualidad de movimiento correcta (véase el cuadro 4).

•Figura 12. Propuesta de actividad de aprendizaje sobre la noción abstracta de variación

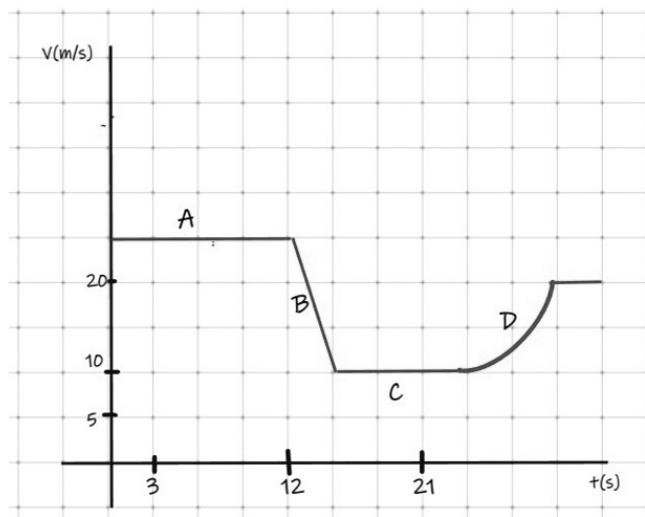


Fuente: Elaboración propia

Esta actividad de aprendizaje puede presentar variaciones, como la introducción de pares de curvas con otras formas. Se sugiere que el estudiante primero haya experimentado u observado gráficas de movimiento trazadas con tecnología digital (sensores, simuladores o applets). Complementariamente, se puede solicitar a los estudiantes que cuantifiquen el grado de variación por medio de la estimación de la razón de cambio (¿cuánto y cómo ha variado el movimiento de un punto a otro?)

Del análisis del extracto 2 se recomiendan actividades de aprendizaje donde se solicite la interpretación de gráficas de *velocidad contra tiempo*. Por ejemplo, con la figura 13 se puede orientar a los estudiantes para que describan el movimiento representado con cada uno de los segmentos A, B, C y D con la intención de que logren reconocer cuándo el movimiento representado tiene velocidad constante y cuándo éste decrece y crece. Asimismo, esta actividad puede presentar variaciones con otras “formas”.

•**Figura 13.** Propuesta de actividad para interpretación de gráficas de velocidad contra tiempo



Fuente: Elaboración propia

El lector puede considerar que estas actividades de aprendizaje ya forman parte del ámbito escolar y que resulta ocioso plantearlas nuevamente, sin embargo, de lo que se trata es que éstas permiten indagar, entre estudiantes y profesor, la habilidad que se tiene de interpretación de gráficas como una oportunidad para reconstruir este saber personal. Desde luego, la validez externa de esta indagación sólo podrá ser establecida en el futuro cuando estudios en otros escenarios escolares comparén sus resultados con los aquí obtenidos, cuando se haya acumulado suficiente evidencia empírica que permita apreciar la frecuencia de ciertas dificultades y aciertos de interpretación de gráficas.

Conclusiones

Los resultados aquí expuestos contribuyen a ampliar el marco de conocimiento sobre los saberes escolares que se fomentan mejor a partir de la implementación de tecnología digital para el trazado de gráficas de movimiento. También muestran la complejidad implícita de la interpretación de gráficas y la necesidad de proponer actividades de aprendizajes como las aquí propuestas.

Este estudio de caso mostró parte de lo que piensa un estudiante cuando da lectura a una gráfica, abonando a la comprensión del constructo teórico “uso de la gráfica”.

Por último, esta investigación hizo emerger, en parte, cómo el estudiante seleccionado organizó sus conocimientos a través de la interpretación de gráficas, de manera que pudo corregir interpretaciones erróneas a través de comparar gráficas trazadas por él con lápiz sobre papel con aquellas trazadas con tecnología digital.

Se declara que la obra que se presenta es original, no está en proceso de evaluación en ninguna otra publicación, así también que no existe conflicto de intereses respecto a la presente publicación.

• Referencias

- Álvarez, C. & San Fabián, J. (2012). La elección del estudio de caso en la investigación educativa. *Gazeta de Antropología*, 28(1), Artículo 14.
- Aravena, A. & Morales, A. (2018). El plano cartesiano en estudiantes de quinto básico: Su resignificación en una situación específica, *Bolema*, 32(62), 825-846. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a04>
- Briceño, E. & Cordero, F. (Julio, 2010). *Desarrollo del pensamiento variacional con el uso tecnológico en un ambiente de difusión del conocimiento*. Trabajo presentado en la XXIV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa organizada por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A. C., Ciudad de Guatemala. <https://www.clame.org.mx/documentos/alme23.pdf>
- Buendía, G. (2011). El uso de las gráficas en la matemática escolar: Una mirada desde la socioepistemología. *Premisa*, 48, 41-49.
- Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. *Educación Matemática*, 24(2), 9-35.
- Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública.
- Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. & Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: Algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(4), 27-46.
- Cen, C. L. (2015). *Una caracterización del uso de las gráficas de las funciones por profesores de bachillerato* (Tesis doctoral inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.
- Cordero, F. (2015). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano* (pp. 287-310). Madrid, España: Díaz de Santos.
- Cordero, F. (Diciembre, 2016). *La función social del docente de matemáticas: Pluralidad, transversalidad y reciprocidad*. Trabajo presentado en las XX Jornadas de Educación Matemática organizadas por la Sociedad Chilena de Educación Matemática, Valparaíso, Chile.
- Cordero, F., Cen, C. L. & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: Una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(2), 187-214.
- Curcio, F. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(5), 382-393.

- Dolores, C. & Cuevas, I. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), 69-96.
- Dolores, C., Chi, A., Canul, E., Cantú, C. & Pastor, C. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 5(18), 41-57.
- Garza, A., Zaldívar, J., Quiroz, S. & Rodríguez, C. (2020). Análisis de la práctica de graficación en estudiantes de ingeniería en un contexto de laboratorio de física. *Uniciencia*, 34(2), 95-113. <https://doi.org/10.15359/ru.34-2.6>
- Guin, D. & Trouche, L. (1998). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3(3), 195-227. <https://doi.org/10.1023/A:1009892720043>
- Miranda, I., Radford, L. & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, 19(3), 5-30.
- Ramos, J., Briceño, E. & Zaldivar, J. (2015). Estrategias variacionales en estudiantes de bachillerato de la UAPUAZ en situación experimental. *El Cálculo y su Enseñanza*, 6(6), 145-166.
- Sánchez, M. & Castañeda, A. (2021). What mathematical competencies does a citizen need to interpret Mexico's official information about the COVID-19 pandemic? *Educational Studies in Mathematics* 108(1-2), 227-248. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10082-9>
- Suárez, L. (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar*. Madrid, España: Díaz de Santos.
- Suárez, L. & Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-II), 319-333.
- Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología* (Tesis de maestría inédita). Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.
- Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators. Turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 137-162). Boston, EUA: Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-23435-7_7
- Zaldívar, J. & Briceño, E. (2019). ¿Qué podemos aprender de nuestros estudiantes? Reflexiones en torno al uso de las gráficas. *Educación Matemática*, 31(2), 212-240. <https://doi.org/10.24844/em3102.09>